

文章编号: 1001-0920(2005)07-0721-06

## 基于随机采样的运动规划综述

唐华斌, 王 磊, 孙增圻

(清华大学 a 计算机科学与技术系, b 智能技术与系统国家重点实验室, 北京 100084)

**摘 要:** 综述了基于随机采样的运动规划方法。首先介绍了基于随机采样的运动规划的发展历程和几种典型方法; 然后分析了这一类规划方法的重要性质及目前仍然存在的问题; 最后展望了基于随机采样的运动规划的应用前景。

**关键词:** 运动规划; 随机; 采样

**中图分类号:** TP24      **文献标识码:** A

## A Survey on Randomized Sampling-based Motion Planning

TANG Hua-bin, WANG Lei, SUN Zeng-qi

(a Department of Computer Science and Technology, b State Key Laboratory of Intelligent Technology and System, Tsinghua University, Beijing 100084, China. Correspondent: TANG Hua-bin, Email: tanghb00@mails.tsinghua.edu.cn)

**Abstract:** Randomized sampling-based motion planning method is surveyed. The development of the planning algorithm based on randomized sampling is reviewed and several successful methods are introduced. Then important issues and problems are discussed. Finally, future application of randomized sampling-based motion planning is proposed.

**Key words:** Motion planning; Random; Sampling

### 1 引 言

运动规划成为机器人研究领域的一个标准问题, 是从 Lozano-Perez 在 1979 年引入位形空间这一概念开始的<sup>[1]</sup>。不同形式的运动规划问题由此转化为在位形空间中寻找点的无碰路径问题, 并可能使用统一的数学方法求解。此后运动规划的研究取得长足进展, 栅格法、路标法、人工势场法等全局或局部规划算法被相继提出<sup>[2]</sup>。

随着研究的深入, 基本的运动规划问题不断扩展。为了能够解决运动障碍物、多机器人、运动学和动力学限制等规划问题, 在位形空间概念的基础上相应出现了位形-时间空间<sup>[3]</sup>、状态空间<sup>[4]</sup>和状态-时间空间<sup>[5]</sup>, 空间的维度也随之增加。但基于确定性空间的精确解法是以巨大的存储空间和计算量为代价的。研究人员已经认识到, 由于计算机无法应对

“指数爆炸”的难题, 仅仅在低维空间或者特殊条件下才可能存在精确的解法。在高维空间面前, 运动规划的解析算法面临极大的困难。

问题的症结在于, 传统方法始终无法避免在一个确定性空间内对障碍物进行确定的建模和描述, 而这对于复杂环境和高维空间很难做到。基于采样的运动规划方法在这一点与传统方法有本质的不同, 它仅仅通过对位形空间或状态空间中的采样点进行碰撞检测来获取障碍物信息, 并在此基础上进行运动规划<sup>[6]</sup>。采样规划方法避免了对空间的建模, 即对障碍空间和自由空间进行描述的复杂的前期计算, 这使它完全能够处理高维空间和复杂系统的运动规划问题。

随机方式是最常用的采样手段, 也是基于采样的运动规划方法取得成功的重要原因。近年来大量

收稿日期: 2004-06-17; 修回日期: 2004-08-23

基金项目: 国家重点基础研究基金项目(G2002cb312205); 国家自然科学基金项目(60174018, 60305008, 60334020, 90205008)。

作者简介: 唐华斌(1977—), 男, 四川德阳人, 博士生, 从事移动机器人、运动规划的研究; 孙增圻(1943—), 男, 江苏靖江人, 教授, 博士生导师, 从事智能控制研究。

基于随机采样的运动规划方法及其扩展和改进算法,已在机器人学、计算机动画、工业设计、生物计算等诸多领域得到广泛应用,成为当前运动规划研究的热点

## 2 基于随机采样的运动规划方法的产生与发展

在20世纪80年代末期,计算几何学空间物体碰撞检测算法效率的不断提高,促进了网格搜索算法的发展。在这些方法中,位形空间被分成若干网格,每个网格分别属于自由空间、障碍物空间或混合空间,规划问题转化为寻找相邻“自由网格”的搜索问题。GJK算法<sup>[7]</sup>,网格逐级细分法<sup>[8]</sup>等就是这一时期的典型算法。网格搜索算法本质上是一种确定性的采样规划方法,它无法回避网格分辨率与规划需要的计算量或存储空间的平衡问题。由于算法复杂度的增长仍然是指数级的,这在一定程度上限制了确定性采样规划方法的应用,随机采样自然进入了研究人员的视野。

### 2.1 早期基于随机采样的运动规划方法

1990年,Barraquand和Latombe介绍了一种RPP方法<sup>[9,10]</sup>,这种“蒙特卡洛”方法就是后来影响深远的随机势场法。简单地说,随机势场法具有经典人工势场法简单高效的优点,并巧妙地采用随机运动来引导机器人摆脱局部极小陷阱,被普遍认为是最早成功运用随机采样的运动规划方法。随机势场法存在的主要问题是启发式势场函数选择的随意性对其性能影响较大,特别是局部极小区域较多时,算法难以取得较好的效果。

Glavina等人于1990年提出另外一种基于随机采样的运动规划方法,称为ZZ-方法<sup>[11]</sup>。虽然由于碰撞检测和局部规划算法不够成熟而无法直接用于高维空间的规划,ZZ-方法仍对后来颇为成功的PRM方法产生了巨大影响。

Mazer提出的基于随机采样的运动规划方法Ariadne'sClew最早见于1992年<sup>[12,13]</sup>。算法同时提出了随机采样优化的标准,但其中相关参数的选择成为影响规划效率的重要因素。

早期的基于随机采样的运动规划方法虽然由于各自不同的原因影响了性能,但为此后的研究奠定了良好的基础。下面详细介绍最近几年研究最深入、应用最广的两种基于随机采样的运动规划方法:概率路标法(PRM)<sup>[14]</sup>和快速探索随机树法(RRTs)<sup>[15]</sup>。

### 2.2 概率路标法

PRM方法是第1个真正意义上解决高维空间复杂运动规划问题的随机方法,它由Latombe和

Ovenmars等人于1996年前后提出,很快成为近几年最为成功和流行的基于随机采样的运动规划方法。

PRM方法通常分为采样和查询两个阶段,部分文献也将采样称为学习。在前一阶段,PRM方法通过随机采样并连接邻近的采样点构建自由空间中的“路标图”,查询阶段则通过图搜索算法找到合适的路径。根据空间维度和环境复杂程度,采样阶段可能需要较长的时间,而查询阶段可以在很短的时间内完成。

文献[16]从理论上分析了PRM方法的性能,研究了方法失效的概率与路径长度、障碍物到路径的距离和样本数之间的关系。

随机采样的策略随着不同的应用需求而得到了发展,例如基于障碍的采样<sup>[17]</sup>,基于自由空间主轴的采样<sup>[18]</sup>,非均匀的概率分布(例如高斯分布)等<sup>[19,20]</sup>,文献[21]还提出一种介于确定性和完全随机之间的“准随机”采样方法。采样策略的改进使PRM方法得以用于“狭窄通道”<sup>[22]</sup>或者动态环境的规划<sup>[23]</sup>。

文献[24]提出了一种Lazy PRM方法,它减少了采样阶段中碰撞检测这个预处理过程,加快了规划速度,实际上是一种单次查询的PRM方法。另外一些单次查询PRM方法还可以从文献[25~27]中找到。

PRM方法在许多高维空间规划的应用领域中表现出了良好的性能<sup>[19,28]</sup>。但对于存在运动动力学约束的系统,采样点的连接将是复杂的非线性问题<sup>[29]</sup>,这是PRM方法的一个主要不足,同时也体现了RRTs方法在这方面的独特优势。

### 2.3 快速探索随机树法

RRTs方法与PRM方法有着本质的不同,它不需要构建路标图的预处理过程,而是遵循控制理论的系统状态方程 $\dot{x} = f(x, u)$ ,在控制量的作用下增量式地产生新状态直至到达目标,这使它很容易满足系统运动动力学约束方面的要求。

LaValle等人的工作奠定了RRTs方法的基础。在采样策略方面,RRTGoaBias方法在控制机器人随机运动的同时,以一定概率向最终目标运动;RRTGoalZoom方法分别在整个空间和目标点周围的空间进行采样;RRTCon方法则通过加大随机步长改进规划速度<sup>[30]</sup>。双向规划思想也在RRTs中被采用,并衍生出RRTExtExt, RRTExtCon, RRTConCon等多种算法<sup>[31]</sup>。

RRTs方法受到许多研究人员的重视,文献[32]提出一种基于传感器的SRT方法;[33]在并行

系统上运用 RRTs 方法解决了多机器人规划问题; [34] 提出了移动机器人实时规划的 ERRT 算法 RRTs 方法具有代表性的应用领域还包括“H5”人形机器人<sup>[35]</sup>、火星漫游车<sup>[36]</sup>、以及计算机动画设计<sup>[37]</sup>。

由于大大降低了参数以及启发式函数选择的随意性, PRM 和 RRTs 成为目前最成功的两种基于随机采样的运动规划方法。相对来说, 前者更适用于高维静态空间, 后者适用于动态环境或者运动动力学约束下的规划。不同的基于随机采样的运动规划方法之间也存在相通之处, 例如 RRTGoaBias 方法在某些情况下可能表现出随机势场法的性质; 而双向规划 RRTs 进一步发展的“多点规划”则类似于 PRM 方法。由于 RRTs 的树状结构具有快速、均匀覆盖整个空间的良好性能, 它也可以作为其他规划方法的一个组成部分, 例如帮助随机势场法走出局部极小区域, 或者用于 PRM 方法的局部规划<sup>[27]</sup>。

### 3 基于随机采样的运动规划方法的重要性质

基于随机采样的运动规划方法与传统的基于确定性空间的解析算法有着本质的区别, 具有不同的组成要素。这里讨论几个重要的性质:

#### 1) 规划的完备性

由于基于随机采样的运动规划方法的基本手段是采样和碰撞检测, 它无法通过计算判断某一个规划问题是否有解, 同样也不会像确定性搜索方法那样不重复地搜索整个空间, 而是会始终不断尝试求解。因此对于可能无解的规划问题, 必须设定最大的循环次数以结束规划。

在恰当的采样策略下, 基于随机采样的运动规划方法是概率完备的, 即如果一个规划问题有解, 则当采样点的数目趋近于无穷大时, 规划总能够找到解。

#### 2) 规划的优化性

常用的衡量路径或者轨迹优化程度的指标包括最短时间、最短长度以及最小能耗等等。确定意义上的最优规划必须通过解析方法精确计算, 而这对于复杂系统显然是不现实的。由于大量的采样点都是随机产生的, 由这些点连接而成的路径需要进一步优化处理。对已有路径进行局部调整或平滑处理, 最常用的方法是用直线连接尽可能远且不发生碰撞的两个采样点以减少路径长度。此外, 增加采样点数目, 以及在已有路径附近多次采样, 也可起到优化路径的作用, 但必须以牺牲规划时间为代价。在平面内规划的多次实验表明<sup>[6]</sup>, RRTs 方法经简单优化得到的路径长度与同样条件下近似最优规划得到的路

径长度之比大约为 1.3~1.7。

#### 3) 采样策略

基于随机采样的运动规划最初一般都采用均匀采样的策略。当需要体现空间各部分的不同重要程度时, 非均匀采样策略很自然地运用, 例如在狭窄通道附近或者目标状态附近以更高的概率进行采样。很多连续密度函数的概率分布都可以用来采样, 其中高斯分布最为常见。一般来说, 采用非均匀的采样策略, 有利于提高算法的收敛速度, 从而更快地找到解, 但如果空间不同区域的采样密度相差过大, 又可能影响采样点对空间的覆盖能力, 最终无法求解。

文献[38]提出了“适应性采样”的新观点, 即根据当前环境信息来调整采样策略。这种动态调整的采样策略有利于用较少采样点实现高效率的规划。

#### 4) 查询方式

基于随机采样的运动规划方法按照查询方式的不同可以分成两类: 大多数方法是单次查询的, 包括 ZZ-方法、Ariadne's clew 方法、RPP 方法和 RRTs 方法等; PRM 方法则不同, 路标图构建之后可以进行多次路径搜索, 即多次查询。这两种方式各有利弊, 单次查询需要每次重新采样, 适用于动态环境; 多次查询虽然预处理比较复杂, 但搜索本身非常快。

两种方法有相互融合的趋势, 一些 PRM 的 single-query 版本, 例如 Lazy-PRM 方法已经出现。实际上, 一个更好的选择是逐步构建多次查询的数据结构, 即在单次查询过程中获取的信息被保存下来, 用于将来的查询。例如 Bruce 等提出的 ERRT 方法<sup>[34]</sup>和 Kavraki 等的 PRM 方法都体现了类似的思想<sup>[26]</sup>。

#### 5) 计算复杂度

在基于随机采样的运动规划方法中, 碰撞检测和最近节点查找等环节都需要大量的数值运算, 相关算法和数据结构的效率对于规划的效率有很大影响。基于采样的规划方法的兴起就得益于空间几何体碰撞检测算法效率的大幅提高。在计算几何学等领域, 广泛采用的高效数据结构 KD-tree 被应用到 RRTs 中, 使算法的复杂度由  $O(n)$  减为  $O(\log(n))$ 。计算效率和复杂度始终是基于采样的运动规划研究中的一个重要内容。

## 4 基于随机采样的运动规划方法存在的问题

基于随机采样的运动规划方法虽然取得了显著的成功, 但它同样存在许多尚待进一步研究解决的问题。

### 4.1 可重复性

缺乏可重复性是基于随机采样的运动规划方法

面临的首要问题与解析算法的确定结果不同,随机方法对同一个规划问题的表现可能时好时坏,连续出现完全相同的规划结果的概率很低。要判断算法对于某一规划问题的效果,往往需要多次反复的试验。基于随机采样的运动规划方法无法预测下一次规划是否能够成功,更无法预测下一次的轨迹或者轨迹的参数。

为了提高规划的可重复性,研究人员已经提出了一些相应的措施,例如文献[21]的“准随机采样”就加入了确定性因素,ERRT方法则利用保存的规划历史信息来减小完全随机造成的不稳定性。显而易见的是,基于多次统计规律的随机方法与可重复性本身就存在矛盾,只要使用随机方法,可重复性问题就不可避免,只可能在一定程度上进行调节。RRTGoaBias方法中的概率分界值就是这样一个调节参数,它可以控制规划更多地倾向于完全随机或者倾向于向确定的目标点运动。这也充分说明基于随机采样的运动规划方法具有相当的灵活性,对于规划结果一致性要求较高。例如,动态环境中的实时连续规划,必须尽量多的使用已有的确定性信息(包括之前的规划结果),从而减少完全随机带来的不稳定性。

实际上,这种缺乏可重复性恰恰带来规划结果的多样性,有助于尝试找到复杂规划问题的解。在运用基于随机采样的运动规划方法时,在追求稳定性的同时也应兼顾这种多样性。

#### 4.2 参数自适应调整

基于随机采样的运动规划面临的另一个主要问题是参数选择和调整问题,包括概率阈值的确定、采样点总数的估计、随机步长的选择等等。许多早期的基于随机采样的运动规划方法就是由于未能有效解决参数选择的难题而止步不前。虽然PRM和RRTs等方法对于参数选择的敏感性已大大降低,但不同的参数仍然可能影响规划的收敛速度、优化程度,甚至决定规划的成功与否。

大量针对具体规划问题的文献中,参数都是根据多次仿真或实验的结果确定的,在问题异常复杂和对结果优化不抱太大希望的情况下,研究人员显然宁愿通过尝试来选择一个较好的结果。但这种参数选择方式与具体规划问题的相关性太大,不适合条件变化的动态环境。为适应这一要求,提出了不同的参数自适应调整方法,大大提高了规划的性能,例如文献[38]提出的“适应性采样”策略,文献[30]提出的变步长方法等。

参数自适应调整方法可以分为两类:一类根据当前系统的状态,应用模糊规则和再励学习等来调

整参数,例如在距离障碍物较远的情况下加大随机步长,或者在接近目标点时缩小采样半径等;另一类是使用不同的参数进行大量的仿真实验,将数据输入网络进行离线训练,形成不同环境下的泛化能力,从而实现参数的自适应调整。

#### 4.3 局部算法

PRM方法和RRTs方法都涉及寻找最近或者一定范围内节点的问题,其实质是给予各个采样点不同的数值评价。采样点之间的“距离”算法目前仍然是未能很好解决的问题。一般来说,衡量“距离”的尺度可以看作是从采样点 $x$ 运动到采样点 $x$ 所对应的最小损耗,包括时间、长度或者能量等。以RRTs方法的长度为例,最优“距离” $\rho^*(x, x)$ 可以表示成

$$\rho^*(x, x) = \min_{u(t)} \int_0^T l(x(t), u(t)) dt$$

其中 $l(x(t), u(t))$ 表示机器人单个规划周期内的运动长度。规划的目的就是要找出实现机器人从采样点 $x$ 到采样点 $x$ 最短运动长度的一系列输入 $u(t)$ 。

对于完整系统,带权值的欧拉长度可以直接作为“距离”的尺度,但对于存在运动动力学约束的系统,两点之间的最短距离本身就是非常复杂的非线性优化问题,不存在普遍适用的解析算法。在实际系统中,研究人员不得不简化为完整系统处理,这可能造成局部规划与实际系统的执行能力相违背的结果。类似的问题同样存在于PRM的局部规划或者RRTs的延伸算法。对于复杂约束系统,相对简单而又适用的算法仍是困扰研究人员的难题,需要根据机器人的运动动力学模型和规划的具体要求进一步深入研究。

#### 4.4 理论研究

相对于其成功的实际应用,基于随机采样的运动规划的理论研究目前还远远落后。例如规划方法的收敛速度,采样的差异性和分散性,以及空间拓扑结构对采样的影响等研究都缺乏系统的理论分析。理论研究对于解释算法具有良好效果的原因、分析影响算法性能的因素,以及提出更好算法都具有重要指导作用,必然将在基于随机采样的运动规划算法不断趋于成熟的过程中受到更多地重视。

#### 5 基于随机采样的运动规划方法引发的思考

应用随机采样方法之后,机器人的运动规划问题,不再是寻找无碰撞路径的空间曲线计算问题,而是在由离散的采样点组成的数据结构中进行搜索,在控制量作用下改变状态并最终完成规划的过程。在这个意义上,基于随机采样的运动规划方法实际

上是将机器人学、人工智能和控制理论这3个不同的研究领域紧密地联系起来

在人工智能的研究中, 由于需要从表示知识的状态空间中寻找问题的解, 发展了大量的搜索算法, 包括宽度优先、深度优先以及著名的A\*算法等。同样, 控制理论完成了大量系统的模型分析和状态方程的建立。基于随机采样的规划方法不仅有效地避开了无法承受的大计算量, 同时巧妙利用了现有其它领域成熟的研究成果, 这是其取得成功的根本保证。

另一方面, 在所有存在高维空间、进行解析计算或者遍历搜索不太现实的应用场合, 无论是运动规划、迷宫问题, 还是旅行商问题, 随机采样都是一种值得推荐的方法。如果能较好地解决随机状态的产生策略和评估标准问题, 随机方法将成为解决各种复杂问题的一种重要决策算法, 具有广泛的应用前景。

## 6 结 语

基于随机采样的运动规划方法与传统方法有着本质的不同, 是运动规划研究的一个新方向。近年来的大量研究成果, 使基于随机采样的运动规划方法被广泛用于各种类型的运动规划, 甚至早就超越了这一领域。

成功求解传统规划算法无法解决的NP问题, 展示了基于随机采样的运动规划方法在处理高维空间和复杂问题上的独特优越性, 这也是随机方法受到普遍重视和得到快速发展的最重要原因。

目前基于随机采样的运动规划方法仍然缺乏深入的研究, 特别是系统的理论分析, 而这对于进一步理解随机这一独特现象并更加充分地发挥其控制决策潜能具有重要的意义。

## 参考文献(References)

- [1] Lozano-Perez T, Wesley M A. An Algorithm for Planning Collision-free Paths Among Polyhedral Obstacles [J]. *Communication of the ACM*, 1979, 22(10): 560-570
- [2] Latombe J C. *Robot Motion Planning* [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [3] Erdmann M, Lozano-Perez T. On Multiple Moving Objects [J]. *Algorithmica*, 1987, 2(4): 477-521.
- [4] Donald B, Xavier P, Canny J, et al. Kinodynamic Motion Planning [J]. *J of the ACM*, 1993, 40(5): 1048-1066
- [5] Fraichard Th. Dynamic Trajectory Planning with Dynamic Constraints: A 'State-Time Space' Approach [A]. *Proc of the IEEE-RSJ Int Conf on Intelligent Robots and Systems* [C]. Yokohama, 1993: 1394-1400
- [6] Lindemann S R, LaValle S M. Current Issues in Sampling-based Motion Planning [A]. *Proc 11th Int Symposium of Robotics Research* [C]. Siena, 2003
- [7] Gilbert E G, Johnson D W, Keerthi S S. A Fast Procedure for Computing the Distance Between Complex Objects in Three-dimensional Space [J]. *IEEE J of Robotics & Automation*, 1988, 4(2): 193-203
- [8] Paden B, Mees A, Fisher M. Path Planning Using a Jacobian-based Freespace Generation Algorithm [A]. *IEEE Int Conf on Robotics & Automation* [C]. Scottsdale, 1989: 1732-1737.
- [9] Barraquand J, Latombe J C. A Monte-Carlo Algorithm for Path Planning with Many Degrees of Freedom [A]. *IEEE Int Conf on Robotics & Automation* [C]. Cincinnati, 1990: 1712-1717.
- [10] Barraquand J, Latombe J C. Robot Motion Planning: A Distributed Approach [J]. *The Int J of Robot Research*, 1991, 10(6): 628-649
- [11] Glavina B. Solving Findpath by Combination of Goal-directed and Randomized Search [A]. *IEEE Int Conf on Robotics & Automation* [C]. Cincinnati, 1990: 1718-1723
- [12] Bessiere P, Ahuactzin J M, Talbi E G, et al. The 'Ariadne's Clew' Algorithm: Global Planning with Local Methods [A]. *Proc of 1993 IEEE/RSJ Int Conf on Intelligent Robots and Systems* [C]. Yokohama, 1993, 2: 1373-1380
- [13] Mazer E, Ahuactzin J M, Bessiere P. The Ariadne's Clew Algorithm [J]. *J Artificial Intell Res*, 1998, 9: 295-316
- [14] Kavraki L, Svestka P, Latombe J C, et al. Probabilistic Road Maps for Path Planning in High-dimensional Configuration Spaces [J]. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 1996, 12(4): 566-580
- [15] LaValle S M. Rapidly-exploring Random Trees: A New Tool for Path Planning [R]. Computer Science Dept, Iowa State University, 1998
- [16] Kavraki L, Kolountzakis M N, Latombe J C. A Analysis of Probabilistic Roadmaps for Path Planning [A]. *Proc IEEE Int Conf on Robotics and Automation* [C]. Minneapolis, 1996: 3020-3025
- [17] Amato N M, Bayazit O B, Dale L K, et al. OBPRM: An Obstacle-based PRM for 3D Workspaces [A]. *Proc of the Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics* [C]. Natick, 1998: 155-168
- [18] Whimrath S A, Amato N M, Stiller P F. MAPRM: A Probabilistic Roadmap Planner with Sampling on the

- Medial Axis of the Free Space[A]. *IEEE Int Conf on Robotics & Automation*[C]. Detroit, 1999: 1024-1031.
- [19] Song G, Amato N M. Using Motion Planning to Study Protein Folding Pathways [J]. *J of Computational Biology*, 2002, 9(2): 149-168
- [20] Boor V, Overmars N H, van der Stappen A F. The gaussian sampling strategy for probabilistic roadmap planners [A]. *IEEE Int Conf on Robotics & Automation*[C]. Detroit, 1999: 1018-1023
- [21] Branicky M, LaValle S M, Olsen K, et al. *Deterministic vs Probabilistic Roadmaps* [DB/OL]. <http://dora.cwru.edu/msb/pubs.html> 2002
- [22] Hsu D, Kavraki L E, Latombe J C, et al. On Finding Narrow Passages with Probabilistic Roadmap Planners [A]. *Robotics: The Algorithmic Perspective* [C]. Wellesley, 1998: 141-154
- [23] Peter Leven, Seth Hutchinson. Toward Real-time Path Planning in Changing Environments[A]. *Proc of the Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics*[C]. Hanover, 2000: 393-406
- [24] Bohlin R, Kavraki L. Path Planning Using Lazy PRM [A]. *IEEE Int Conf on Robotics & Automation* [C]. San Francisco, 2000, 1: 521-528
- [25] Hsu D, Latombe J D, Motwani R. Path Planning in Expansive Configuration Spaces [J]. *Int J Comput Geometry & Application*, 1999, 9(4-5): 495-512
- [26] Bekris K E, Chen B Y, Ladd A M, et al. Multiple Query Probabilistic Roadmap Planning Using Single Query Planning Primitives [A]. *Proc of the IEEE/RSJ Int Conf on Intelligent Robots & Systems*[C]. Las Vegas, 2003: 656-661
- [27] Vallejo D, Jones C, Amato N. An Adaptive Framework for 'Single shot' Motion Planning [A]. *Proc of the IEEE/RSJ Int Conf on Intelligent Robots and Systems*[C]. Takamatsu, 2000: 1722-1727.
- [28] Fox D, Burgard W, Kruppa H, et al. A Probabilistic Approach to Collaborative Multi-robot Localization [J]. *Autonomous Robots*, 2000, 8(3): 325-244
- [29] Guang Song, Nancy M Amato. Randomized Motion Planning for Car-like Robots with C-PRM [A]. *Proc of the IEEE/RSJ Int Conf on Intelligent Robots and Systems*[C]. Hawaii, 2001: 37-42
- [30] Kuffner J J, LaValle S M. RRT-connect: An Efficient Approach to Single-query Path Planning [A]. *Proc IEEE Int'l Conf on Robotics and Automation*[C]. San Francisco, 2000: 995-1001.
- [31] LaValle S M, Kuffner J J. Rapidly-exploring Random Trees: Progress and Prospects [A]. *Algorithmic and Computational Robotics: New Directions* [C]. Wellesley, 2001: 293-308
- [32] Giuseppe Oriolo, Marilena Vendittelli, Luigi Fredda, et al. The SRT Method: Randomized Strategies for Exploration [A]. *Proc IEEE Int'l Conf on Robotics and Automation*[C]. New Orleans, 2004: 4688-4694
- [33] Carpin S, Pagello E. On Parallel RRTs for Multi-robot Systems [A]. *Proc of the 8th Conference of the Italian Association for Artificial Intelligence* [C]. Siena, 2002: 834-841.
- [34] James Bruce, Manuela Veloso. Real-time Randomized Path Planning for Robot Navigation [A]. *Proc of the IEEE/RSJ Int Conf on Intelligent Robots and Systems* [C]. Switzerland, 2002: 2383-2388
- [35] James Kuffner, Koichi Nishiwaki, Satoshi Kagami, et al. Motion Planning for Humanoid Robots [A]. *11th International Symposium of Robotics Research* [C]. Siena, 2003
- [36] Brian C Williams, Kim B C P, Hofbauer M, et al. Model-based Reactive Programming of Cooperative Vehicles for Mars Exploration [A]. *Int Symp on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space*[C]. Canada, 2001.
- [37] Yamane K, Kuffner J J, Hodgins J K. Synthesizing Animations of Human Manipulation Tasks [A]. *ACM Trans on Graphics (Proc SIGGRAPH 2004)* [C]. Los Angeles, 2004, 23(3): 532-539
- [38] Simeon T, Laumond J-P, Nissoux C. Visibility Based Probabilistic Roadmaps for Motion Planning [J]. *Advanced Robotics*, 2000, 14(6): 477-493