

文章编号: 1001-0920(2005)07-0827-03

满足因果约束的多速率单值广义预测控制

邹媛媛¹, 刘晓华¹, 李少远²

(1. 烟台师范学院 数学与信息学院, 山东 烟台 264025; 2 上海交通大学 自动化研究所, 上海 200030)

摘 要: 针对输入更新频率和输出采样频率均不相同的多速率采样系统, 提出一种多速率广义预测控制算法. 通过采用在系统周期内根据不同的采样时刻构造扩展模型序列的方法, 有效地解决了由于多速率采样而引起的因果约束问题. 在此基础上, 对算法的闭环稳定性进行了分析, 仿真结果证明了算法的有效性.

关键词: 广义预测控制; 多速率采样系统; 因果约束; 闭环稳定性

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Multi-rate Single Generalized Predictive Control Satisfying Causality Constraint

ZOU Yuan-yuan¹, LIU Xiao-hua¹, LI Shao-yuan²

(1. College of Mathematics and Information, Yantai Normal University, Yantai 264025, China; 2 Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China Correspondent: ZOU Yuan-yuan, E-mail: xhliu@ytc.edu.cn)

Abstract: A generalized predictive control algorithm is proposed for multirate sample systems with different control updating rate and output sampling rate. By constructing a chain of new lifted models based on different instant during every frame period, causality constraint problem caused by multirate sample is solved effectively. The stability of the closed-loop system is analyzed further, and simulation results show the effectiveness of the algorithm.

Key words: Generalized predictive control; Multi-rate sample system; Causality constraint; Closed-loop stability

1 引 言

近年来, 广义预测控制(GPC)在工业界得到了广泛的应用, 但大多数 GPC 算法是针对单速率采样控制系统, 即输入更新和输出采样周期相同的情况建立的. 随着工业过程的日趋复杂, 单速率采样的情况已不能满足实际需要, 经常要求系统的输出采样和输入更新分别采用不同的速率. 因此, 多速率广义预测控制的研究具有重要意义, 且已引起了学术界的广泛关注^[1~4].

文献[1]针对输出采样频率比输入更新频率快的多速率采样系统, 给出了一种广义预测控制算法. 然而, 在实际生产过程中, 由于可以在两次输出采样

间隔期内及时修正输入控制, 输出采样频率比输入更新频率慢的多速率采样系统应用更为广泛. 本文针对这类多速率采样系统, 提出了一种基于单值预报的 GPC 新算法, 解决了目前多速率采样控制中难以处理的因果约束问题, 并在此基础上, 基于线性矩阵不等式对闭环系统的稳定性进行了分析. 仿真结果验证了算法的有效性.

2 多速率采样系统的描述

考虑输出采样周期比输入更新周期慢, 且对同一个输入或输出来说采样频率的间隔周期不相同的多速率采样系统, 并作如下假设:

1) 在第 k 个周期 $[kT, (k+1)T]$ 内, 输出信号

收稿日期: 2004-09-13; 修回日期: 2004-11-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(60074004); 山东省自然科学基金项目(L2004G01).

作者简介: 邹媛媛(1980—), 女, 山东烟台人, 博士生, 从事预测控制研究; 刘晓华(1959—), 男, 山东烟台人, 教授, 从事智能控制、预测控制理论及应用研究.

y 采样 m 次, 分别为 $kT + t_i, i = 1, 2, \dots, m$.

2) 在周期 $[kT, (k + 1)T)$ 的每一个小间隔 $[kT + t_i, kT + t_{i+1}), i = 1, 2, \dots, m, t_{m+1} = T$, 有 n_i 个输入信号得到更新, 它们分别是在时刻 $kT + t_j^i, j = 1, 2, \dots, n_i$ 即在每个系统周期 T 内, 控制信号更新 $p = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ 次, 而输出信号采样 m 次

处理多速率采样系统的一个标准方法是采用扩展技术^[5], 将时变的多速率系统转化为在一个系统周期 T 内时不变的单速率系统 这样, 所有的多速率输入输出信号就可转化为以 T 为周期的单速率扩展信号 本文把输入输出采用扩展信号描述的模式称为扩展模型

3 满足因果约束的多速率单值广义预测控制

考虑输入输出系统^[1]

$$y_k = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \Delta u_k \quad (1)$$

其中: $A(q^{-1})$ 为 l 阶多项式, $B(q^{-1})$ 是一个 $m \times p$ 维矩阵多项式, $y_k = (y(kT + t_1), y(kT + t_2), \dots, y(kT + t_m))^T$ 是扩展输出, $\Delta u_k = (\Delta u(kT + t_1^1), \dots, \Delta u(kT + t_1^{n_1}), \dots, \Delta u(kT + t_m^1), \dots, \Delta u(kT + t_m^{n_m}))^T$ 是扩展输入 引入丢番图方程

$$I = E_{p_1}(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-p_1}F_{p_1}(q^{-1}), \\ E_{p_1}(q^{-1})B(q^{-1}) = G_{p_1}(q^{-1}) + q^{-p_1}H_{p_1}(q^{-1}),$$

可得到基于 k 时刻系统在未来第 p_1 步输出预报值为

$$y_{k+p_1} = T_1 Y_p + T_2 \Delta U + T_3 \Delta U_p \quad (2)$$

其中

$$T_1 = (F_0^{p_1} \ F_1^{p_1} \ \dots \ F_{p_1}^{p_1}), \\ T_2 = (G_{p_1} \ G_{p_1-1} \ \dots \ G_0), \\ T_3 = (H_0^{p_1} \ H_1^{p_1} \ \dots \ H_{p_1-1}^{p_1}), \\ Y_p = (y_k \ y_{k-1} \ \dots \ y_{k-l})^T, \\ \Delta U = (\Delta u_k \ \Delta u_{k+1} \ \dots \ \Delta u_{k+p_1})^T, \\ \Delta U_p = (\Delta u_{k-1} \ \Delta u_{k-2} \ \dots \ \Delta u_{k-l})^T.$$

极小化单值预报性能指标

$$J = [y_{k+p_1} \ - \ w]^T Q [y_{k+p_1} \ - \ w] + \Delta U^T R \Delta U,$$

$$\text{可得控制律} \\ \Delta U = (T_2^T Q T_2 + R)^{-1} T_2^T Q (w - T_3 \Delta U_p - T_1 Y_p), \quad (3)$$

$$\Delta u_k = (I_{p \times p} \ 0 \ \dots \ 0) \Delta U. \quad (4)$$

为得到满足因果关系的多速率单值广义预测控制律, 可在每个系统周期 T 内, 针对不同的采样时间, 构造与之相对应的扩展模型序列 例如, 为求 $t = kT + t^i$ 时刻的控制, 将离 t 时刻最近的 m 个输出 y_k^i 作为该时刻对应的扩展输出 根据 t^i 的取值不同,

分为如下两种情形:

- 1) 当 $t^i > 0$ 时, 对应的扩展输出 y_k^i 为 $(y[(k-1)T + t_1] \ \dots \ y[(k-1)T + t_m] \ y(kT))^T$;
- 2) 当 $t^i = 0$ 时, 对应的扩展输出 y_k^i 为 $(y[(k-1)T + t_2] \ \dots \ y[(k-1)T + t_m] \ y(kT))^T$.

以下以 $y_k^i \ \Delta u_k$ 为例, 给出满足因果约束条件的多速率单值预测控制律

将式(1) 改写为

$$y_{k-1} = \frac{1}{A} B \Delta u_{k-1} = \frac{1}{A} (q^{-1} B) \Delta u_k$$

以 $t^i > 0$ 的情形为例, 有

$$y_k^i = \frac{1}{A} B_1 \Delta u_k$$

在系统周期 T 内, 可获得 m 个扩展模型 对每一个模型, 根据式(3) 可求得

$$\Delta u_k^i = (\Delta u^i(kT) \ \Delta u^i(kT + t_1^i) \ \dots \ \Delta u^i(kT + t_1^{n_1}) \ \dots \ \Delta u^i(kT + t_m^1) \ \dots \ \Delta u^i(kT + t_m^{n_m}))^T.$$

不妨设

$$t_1^1 = t_1, t_1^2 = t_2, \dots, t_1^{n_1} = t_2, t_2^1 = t_{n_1+1}, \dots, \\ t_m^1 = t_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}, \dots, t_m^{n_m} = t_{n_1+n_2+\dots+n_m},$$

但 Δu_k^i 中只执行前 n_i 个元素 $\Delta u^i(kT + t_{j_i}), j = 1, \dots, n_i$ 随着采样时间推移, $i = 1, \dots, m$, 可得满足因果约束条件的控制律

$$\Delta u_k^* = (\Delta u^1(kT + t_1^1) \ \dots \ \Delta u^1(kT + t_1^{n_1}) \ \Delta u^{n_2}(kT + t_1^1) \ \dots \ \Delta u^{n_m}(kT + t_m^{n_m}))^T. \quad (5)$$

如果 $kT + t_1^1 < kT + t_2$, 即 $t_1^1 < t_2$, 则 $\Delta u^2(kT + t_1^1) = \dots = \Delta u^{n_1}(kT + t_1^1) = 0$ 如果 $kT + t_1^1 = kT + t_2$, 即 $t_1^1 = t_2$, 则 $\Delta u^{n_1}(kT + t_1^1)$ 又随着 y_k^2 而变化 由此, 可得到满足因果约束条件的多速率单值广义预测控制(MSGPC).

4 闭环控制系统的稳定性分析

在系统周期 $[kT, (k + 1)T)$ 内, 由式(3) 和式(4) 可得

$$\Delta u^i(kT + t_i) = D^i w + D^i_2 \Delta U_p + D^i_3 Y_p^i \quad (6)$$

其中: $Y_p^i = (y_k^i \ \dots \ y_{k-l}^i)^T; D^i_1, D^i_2, D^i_3$ 分别是 $1 \times mp, 1 \times p(l-1), 1 \times m$ 维矩阵 定义 $D^i_{11} =$

$$D^i_{11} \ \dots \ D^i_{l_1}, i = 1, 2, 3, H^i = \begin{matrix} p_1 & m \\ & j=1 \ k=1 \end{matrix} D^i_{1j}(1, k), \\ K^i = \begin{matrix} l-1 \\ j=1 \end{matrix} q^{-j} D^i_{2j}, L^i = \begin{matrix} l \\ j=1 \end{matrix} q^{-j+1} D^i_{3j}, \text{则式(5) 可写成} \\ \Delta u^i(kT + t_i) = H^i w + K^i \Delta u_k^* + L^i y_k^i, \\ i = 1, 2, \dots, p, t^i_1 \ t_{i+1},$$



$$y_k^i = O^i y_k = \begin{bmatrix} q^{-1} & & \\ 0 & \ddots & \\ & & q^{-1} \\ 1 & & 0 \end{bmatrix} y_k$$

$t_i^i = t_{i+1}$ 对应的情况可以用同样方法得到 不妨设 $t_i^i = 0$, 即输出信号在 $kT + t_i$ 处可得, 输入信号在 $kT + t_i$ 处更新 于是, 可求得式(5) 的闭环形式

$$\Delta u_k^* = \Phi^{-1} (Mw + Gy_k). \quad (7)$$

其中 $\Phi^{-1} = I_p - (K^1 \dots K^p)^T$,
 $M = (H^1 \dots H^p)^T$,
 $G = (L^1 O^1 \dots L^p O^p)^T$.

将式(7) 代入式(1), 有

$$y_k = [A(q^{-1}) - B(q^{-1})\Phi^{-1}G]^{-1} B\Phi^{-1}Mw. \quad (8)$$

闭环特征矩阵多项式为

$$\Psi = A(q^{-1}) - B(q^{-1})\Phi^{-1}G. \quad (9)$$

由此可得如下MSGPC 的稳定性定理

定理 1 假设系统的跟踪设定值 w 是常数, 满足因果约束条件的闭环最优控制律可由式(7) 求得, 则系统稳定的充要条件是通过适当选取参数 p_1 , 使得特征多项式(9) 为 Hurwitz 多项式

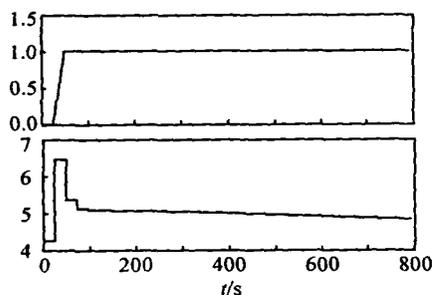
在实际控制器的设计中, 首先根据定理 1 选择预测长度 p_1 以保证闭环系统稳定

定理 2 闭环系统(8) 稳定的充分条件是存在

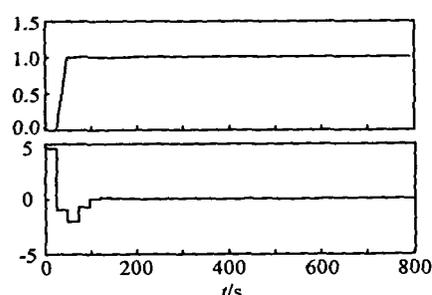
$$\begin{bmatrix} y(kT - 12) \\ y(kT) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 0.2328q^{-1} + 0.0112q^{-2} & 0.1866q^{-1} + 0.0607q^{-2} & 0.0973q^{-1} + 0.1492q^{-2} \\ 0.1490 + 0.1029q^{-1} + 0.0004q^{-2} & 0.0338 + 0.2128q^{-1} + 0.0026q^{-2} & 0.2151q^{-1} + 0.0357q^{-2} \end{bmatrix}}{1 - 1.0863q^{-1} + 0.1648q^{-2}} \begin{bmatrix} \Delta u(kT) \\ \Delta u(kT + 8) \\ \Delta u(kT + 16) \end{bmatrix},$$

从而求得 $kT + 8$ 时刻的控制输入; 在后 12 s, 通过 $kT + 12$ 时刻的输出采样值得到与之对应的新的输入输出系统模型

$$\begin{bmatrix} y(kT) \\ y(kT + 12) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 0.1490 + 0.1029q^{-1} + 0.0004q^{-2} & 0.0338 + 0.2128q^{-1} + 0.0026q^{-2} & 0.2151q^{-1} + 0.0357q^{-2} \\ 0.2328 + 0.0112q^{-1} & 0.1866 + 0.0607q^{-1} & 0.0973 + 0.1492q^{-1} \end{bmatrix}}{1 - 1.0863q^{-1} + 0.1648q^{-2}} \begin{bmatrix} \Delta u(kT) \\ \Delta u(kT + 8) \\ \Delta u(kT + 16) \end{bmatrix},$$



(a) $p_1 = 6$



(b) $p_1 = 10$

图 1 多速率广义预测控制仿真结果

(下转第 833 页)

正定对称矩阵 P , 使得

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & \Psi^T \\ \Psi & -r^2 P \end{bmatrix} < 0, 0 < r < 1 \quad (10)$$

根据矩阵的 Schur 补性质, 容易证明定理成立

5 仿真结果

考虑单输入单输出连续系统

$$G(s) = \frac{0.0039s + 0.0028}{(s + 0.0708)(s + 0.0042)},$$

系统采样周期为 24 s, 假设输入和输出是周期性变化的, 输出信号每隔 12 s 采样一次, 输入每隔 8 s 更新一次 将连续的多速率采样系统通过扩展技术转化为离散的单速率采样系统

$$A = \begin{bmatrix} 0.1371 & -0.003248 \\ 10.83 & 0.9492 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.626 & 3.205 & 5.997 \\ 8.089 & 6.217 & 2.641 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.0039 & 0.0028 \\ 0.2354 & 0.002745 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.149 & 0.03378 & 0 \end{bmatrix}.$$

系统输出采样时刻为 $kT, kT + 12$ 在每个系统周期的前 12 s, 可得到与输出采样 kT 时刻对应的输入输出系统模型

的升级来实现, 有较好的可行性

参考文献(References)

- [1] 吴江, 赵慧玲. 下一代的 IP 骨干网络技术——多协议标记交换[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2001.
(Wu J, Zhao H L. *Next Generation IP Backbone Networking Technique: multiprotocol Label Switching* [M]. Beijing: Posts & Telecom Press, 2001.)
- [2] RFC2309. Recommendations on Queue Management and Congestion Avoidance in the Internet[S]. 1998
- [3] Floyd S, Fall K. Promoting the Use of End-to-end Congestion Control in the Internet[J]. *IEEE/ACM Trans on Networking*, 1999, 7(4): 458-472

- [4] Jacobson V. Congestion Avoidance and Control[A]. *Proc of ACM SIGCOMM* [C]. 1988: 314-329.
- [5] Vern Paxson. End-to-end Internet Packet Dynamics [J]. *IEEE/ACM Trans on Networking*, 1999, 7(3): 277-292
- [6] Stoica I, Shenker S, Zhang H. Core-Stateless Fair Queueing: A Scalable Architecture to Approximate Fair Bandwidth Allocations in High Speed Networks [J]. *IEEE/ACM Trans on Networking*, 2003, 11(1): 1432-1446
- [7] RFC3031. *Multiprotocol Label Switching Architecture* [S]. 2001.

(上接第 814 页)

- [3] 谢元旦, 夏淑艳. PD 继电整定几种算法的比较[J]. *控制与决策*, 1993, 8(1): 77-79.
(Xie Y D, Xia S Y. The Relay Self-tuning of PD Regulators Parameters[J]. *Control and Decision*, 1993, 8(1): 77-79.)
- [4] 王肖峰, 徐科军, 沈峰. 小波滤波器的幅频特性研究[J]. *合肥工业大学学报*, 2003, 26(2): 171-175.
(Wang X F, Xu K J, Shen Y. Research on the Amplitude-frequency Characteristic of Wavelet Transform [J]. *J of Hefei University of Technology*, 2003, 26(2): 171-175.)
- [5] 孙立宁, 李志鹏, 曲东升. 小波变换在数字滤波中的实现[J]. *锅炉制造*, 2004, (1): 33-35.
(Sun L N, Li Z P, Qu D S. Application of Digital Filter Technology Based on Wavelet Transform [J]. *Boiler Manufacturing*, 2004, (1): 33-35.)
- [6] 张玉磷, 陈伟民, 杨建春, 等. 小波变换自适应滤波器及在主动噪声控制中的应用[J]. *控制与决策*, 2002, 17

(1): 107-110

(Zhang Y L, Chen W M, Yang J C, et al. Wavelet Transformation Adaptive Filter and Its Application in Active Noise Control[J]. *Control and Decision*, 2002, 17(1): 107-110.)

- [7] Donoho D L. De-noising by Soft-thresholding [J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 1995, 41(3): 613-627.
- [8] 杨福生. *小波变换的工程分析与应用*[M]. 北京: 科学出版社, 2000: 42-69.
(Yang F S. *The Engineering Analysis and Application of Wavelet Transformation* [M]. Beijing: Science Press, 2000: 42-69.)
- [9] 徐晨, 赵瑞珍, 甘小冰. *小波分析与应用算法*[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 91-118.
(Xu C, Zhao R Z, Gan X B. *The Wavelet Analysis and Application Algorithm* [M]. Beijing: Science Press, 2004: 91-118.)

(上接第 829 页)

进而求得 $kT + 16$ 时刻的控制输入. 取设定值 $r = 1$, 当控制器参数 p_1 分别取为 6 和 10 时, 系统的输出和输入如图 1 所示. 当 p_1 取 6 和 10 时, 经计算 Ψ 的特征值均在单位圆内, 其中特征值最大幅值分别为 0.985 3 和 0.933 2, 由定理 1 知闭环系统稳定. 可以看出, 控制器参数 p_1 的大小会影响控制的稳定性和快速性.

6 结 语

本文针对一类在实际生产过程中有着广泛应用的多速率采样系统, 提出了一种基于单值预报的多速率广义预测控制算法. 通过在系统周期 T 内根据不同的采样时刻构造扩展模型序列的方法, 解决了多速率采样预测控制系统中的因果约束问题. 在此基础上, 应用线性矩阵不等式的方法得到了有关多速率闭环系统稳定性的新结论. 本文的结果为多速

率采样预测控制系统的设计提供了一个新的思路

参考文献(References)

- [1] Jie Sheng, Tongwen Chen, Sirish L S. Generalized Predictive Control for Non-uniformly Sampled Systems [J]. *J of Process Control*, 2002, 12(3): 875-885.
- [2] Masahiro O. Multirate Multivariable Model Predictive Control and its Application to a Polymerization Reactor [J]. *Int J Control*, 1994, 59(3): 731-742.
- [3] Ling K V, Lim K W. A State Space GPC with Extensions to Multirate Control[J]. *Automatica*, 1996, 32(7): 1067-1071.
- [4] Colaneri P, Scattolini R, Schiavoni N. Stabilization of Multirate Sampled-data Linear Systems [J]. *Automatica*, 1990, 26(2): 377-380.
- [5] Kranc G M. Input-output Analysis of Multirate Feedback System [J]. *IRE Trans Automatic Control*, 1957, 3: 21-28.