第 20 卷 第 8 期 控 制 与 决 策 2005 年 8 月
Vol 20 No. 8 Control and Decision Aug 2005

文章编号: 1001-0920(2005)08-0905-04

模糊控制的模糊推理分析

张 钊, 吴爱国, 裴燕玲
(天津大学 电气与自动化学院, 天津 300072)

摘 要: 分析了使用 R_Z 算子时推理合成规则(CRI)不具有还原性和不能正确进行模糊推理的原因, 给出了正确应用 CRI 的条件; 分析了全蕴涵 3I 算法的不足及其具有还原性的原因; 对各种蕴涵算子的模糊推理进行分析比较, 得到了正确的推理算法; 对模糊推理在理论和实际应用中的矛盾作了具体说明

关键词: 模糊推理; 推理合成规则; 还原性; 蕴涵算子
中图分类号: TP273.4 **文献标识码**: A

The Fuzzy Reasoning Analysis of Fuzzy Control

ZHANG Zhao, WU Ai-guo, PEI Yan-ling
(School of Electrical and Automation Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China. Correspondent: ZHANG Zhao, E-mail: zh9219@163.com)

Abstract: The reason why the compositional rule of inference (CRI) does not possess the reducibility and cannot conduct the fuzzy reasoning correctly when using R_Z operator is analyzed, and the conditions of using CRI rightly are pointed out. The deficiency of triple-I algorithm and the reason why it has the reducibility are analyzed. All kinds of fuzzy reasoning of implication operators are compared. The correct inference algorithm is presented. And the contradiction between the theory and the implementation of fuzzy reasoning is explained.

Key words: Fuzzy reasoning; Compositional rule of inference; Reducibility; Implication operator

1 引 言

模糊推理是模糊控制的理论基础, 通常的模糊控制是按推理合成规则(CRI)进行模糊推理[1]. 模糊控制方法用于工业过程控制及在新型家电产品开发上取得了较大成功, 模糊推理也得到一定的发展[2~8]. 然而, 作为模糊控制的理论基础却存在一些争议[9~12], 重要的一点是 CRI 方法不具有还原性. 文献[12]指出 CRI 算法是一种逻辑上的单蕴涵算法, 提出了全蕴涵 3I 算法, 并对 CRI 算法中的算子进行改进. 随后, 很多文献对全蕴涵 3I 算法作了进一步完善和推广[13,14], 但都没有用到实际控制中.

在模糊推理的理论研究中, 最基本的模糊推理规则为模糊取式(FMP), 其基本形式为:

已知 $A \to B$;
给定 A^*;
求解 B^*.

这里 A 和 A^* 是某论域 X 的模糊集, 而 B 和 B^* 则是论域 Y 上的模糊集.

2 蕴涵算子为 R_Z 的推理合成规则

Zadeh 于 1973 年提出了著名的 CRI 方法, 即: 将 $A \to B$ 通过蕴涵算子 R_Z 转化为一个 $X \times Y$ 的模糊关系 $R_Z(A(x), B(y))$, 然后将 A^* 与 $R_Z(A(x), B(y))$ 进行复合, 得

$$B^*: B^*(y) = A^*(x) \circ R_Z(A(x), B(y)),\quad y \in Y. \tag{1}$$

这里蕴涵算子 R_Z: $[0,1]^2 \to [0,1]$ 是二元函数, 定义为

$$R_Z(a, b) = (1 - a) \vee (a \wedge b).$$

根据复合算法得

$$B^*(y) = \sup_{x \in X}[A^*(x) \wedge R_Z(A(x), B(y))] =$$
$$\sup_{x \in X}\{A^*(x) \wedge [(1 - A(x)) \vee$$

收稿日期: 2004-09-13; **修回日期**: 2004-11-03.
作者简介: 张钊(1965—), 男, 济南人, 副教授, 博士生, 从事模糊理论、智能控制等研究; 吴爱国(1954—), 男, 山东德州人, 教授, 博士生导师, 从事智能控制等研究.

$$(A(x) \wedge B(y))]\}. \qquad (2)$$

对于CRI，一些人提出异议，最主要的依据是它不具有还原性，即当 $A = A^*$ 时，$B \neq B^*$.

下面对CRI进行分析. 当 $R_Z(a, b) = (1 - a) \vee (a \wedge b)$ 时，令 $\overline{A(x)} = 1 - A(x)$，则

$$B^*(y) = \{\sup_{x \in X}[A^*(x) \wedge \overline{A(x)}]\} \vee \{\sup_{x \in X}[A^*(x) \wedge A(x)] \wedge B(y)\}. \qquad (3)$$

令

$$\sup_{x \in X}[A^*(x) \wedge \overline{A(x)}] = A(\beta),$$

$$\sup_{x \in X}[A^*(x) \wedge A(x)] = A(\gamma),$$

则

$$B^*(y) = A(\beta) \wedge [A(\gamma) \wedge B(y)]. \qquad (4)$$

当 $A^* = A$ 时，若 $A(x)$ 正规(即存在 $a \in X$，使 $A(a) = 1$)，则

$$A(\beta) = \sup_{x \in X}[A(x) \wedge \overline{A(x)}],$$

$$A(\gamma) = \sup_{x \in X}[A(x) \wedge A(x)] = \sup_{x \in X} A(x) = 1,$$

$$B^*(y) = A(\beta) \vee [A(\gamma) \wedge B(y)] =$$

$$A(\beta) \vee B(y) = \begin{cases} B(y), A(\beta) \le B(y); \\ A(\beta), A(\beta) > B(y). \end{cases} \qquad (5)$$

对于一般的 $A(x)$，有 $A(\beta) \le 1/2$，并接近 $1/2$；如果 $A(x)$ 是正规的 $[0, 1]$ 间的连续函数，则 $A(\beta) = 1/2$. 所以对于 $B(y) \in [1/2, 1]$，CRI具有还原性；对于 $B(y) \in [0, 1/2)$，CRI不具有还原性.

当 A^* 接近于 A 时，如果 $A(x)$ 是正规的 $[0, 1]$ 间的连续函数，则 $A(\beta) > 1/2$ 且接近于 $1/2$，$A(\gamma) < 1$ 且接近于 1. 所以对于接近于 1 处的 $B^*(y)$，有 $B^*(y) = A(\gamma) \wedge B(y)$，与实际相符. $A(x)$ 为一般函数时，结论相同.

当 A^* 远离 A 时，如果 $A(x)$ 是正规的 $[0, 1]$ 间的连续函数，则 $A(\beta)$ 等于或接近于 1，$A(\gamma)$ 等于或接近于 0，则 $B^*(y) = A(\beta)$，与实际不相符. $A(x)$ 为一般函数时，结论相同.

从另一方面说，如果从 $X_1(\sup_{x \in X_1}[A^*(x) \wedge \overline{A(x)}] \le \sup_{x \in X_1}[A^8(x) \wedge A(x)] \wedge B(y))$ 中寻找 $B^*(y)$，由于 $\sup_{x \in X_1}[A^*(x) \wedge A(x)] = \sup_{x \in X}[A^*(x) \wedge A(x)]$，则 $B^*(y) = A(\gamma) \wedge B(y)$，且当 $A^* = A$，A 正规时，$B^* = B$.

蕴涵算子为 R_Z 的模糊推理是最早提出的，在理论分析中也是最常用的.

3 全蕴涵3I算法分析

文献[12]针对CRI的缺陷，提出了全蕴涵3I算法. 对于模糊取式FMP，该算法的基本思想是：所求的 B^* 是 $\mathbf{F}(Y)$ 中使 $(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y))$ 对一切 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 都取得最大值的最小模糊集. 取蕴涵算子 R_0: $[0, 1]^2 \to [0, 1]$，有

$$R_0 = \begin{cases} 1, a \le b; \\ \bar{a} \vee b, a > b. \end{cases} \qquad (6)$$

该文给出算法如下:

$$B^*(y) = \sup_{x \in E_y}[A^*(x) \wedge R_0(A(x), B(y))],$$

$$E_y = \{x \in X \mid \overline{A^*(x)} < R_0(A(x), B(y))\}.$$

并对该算法及其还原性作了证明.

下面对该算法进行分析. 当 $a > b$ 时，有

$$B^*(y) = \sup_{x \in E_y}[A^*(x) \wedge R_0(A(x), B(y))] =$$

$$\cdots = \sup_{x \in E_y}[A^*(x) \wedge \overline{A(x)}] \vee$$

$$[\sup_{x \in E_y}](A^*(x)) \wedge B(y)]. \qquad (7)$$

当 E_y 存在，$A^*(x)$ 正规时，有

$$\sup_{x \in E_y}[A^*(x)] = \sup_{x \in X}[A^*(x)] = 1, \qquad (8)$$

所以

$$B^*(y) = \sup_{x \in E_y}[A^*(x) \wedge \overline{A(x)}] \vee B(y) = \begin{cases} B(y), \sup_{x \in E_y}[A^*(x) \wedge \overline{A(x)}] \le B(y); \\ \sup_{x \in E_y}[A^*(x) \wedge \overline{A(x)}], \\ \qquad \sup_{x \in E_y}[A^*(x) \wedge \overline{A(x)}] > B(y). \end{cases} \qquad (9)$$

当 $A^* = A$ 时，对于

$$E_y = \{x \in X \mid \overline{A^*(x)} - R_0(A(x), B(y))\},$$

因为

$$\overline{A^*(x)} < R_0(A(x), B(y)) \Rightarrow$$

$$\overline{A(X)} < [\overline{A(x)} \vee B(y)] \Rightarrow \overline{A(X)} < B(y) \Rightarrow$$

$$[A^*(x) \wedge \overline{A(x)}] < B(y),$$

所以

$$\sup_{x \in E_y}[A^*(x) \wedge \overline{A(x)}] < B(y). \qquad (10)$$

则 $B^*(y) = B(y)$，具有还原性. 但具有还原性并不能说明其推理是合理的，因为依据此推理，无论 A^* 如何取值，B^* 或者是 B，或者是 $\sup_{x \in E_y}[A^*(x) \wedge \overline{A(x)}]$，而后者与 B 没有联系，这显然与实际情况不相符.

虽然人们从理论上用各种蕴涵算子对全蕴涵3I算法进行推广，但都不能得到合理的结论. 这些蕴涵算子包括：Lukasiewicz 算子(R_L)，Dienes-Rescher 算子(R_{DR})，Godel 算子(R_G)，标准算子①(R_S)，标准算子②(R_Δ).

4 蕴涵算子为 t- 范数的推理合成规则

在实际模糊控制中普遍采用的是Mamdani的最小运算的Larsen 乘积运算.

4.1 Mamdani 最小运算

对于蕴涵算子 R_C: $[0,1]^2 \to [0,1]$ 是二元函数, 定义为 $R_C(a,b) = a \wedge b$. 根据复合算法可得

$$B^*(y) = \sup_{x\in X}[A^*(x) \wedge A(x)] \wedge B(y). \tag{11}$$

令

$$\sup_{x\in X}[A^*(x) \wedge A(x)] = A(x_0),$$

则

$$B^*(y) = A(x_0) \wedge B(y). \tag{12}$$

当 $A^* = A$ 时, 若 $A(x)$ 正规, 则

$$A(x_0) = \sup_{x\in X}[A(x) \wedge A(x)] = \sup_{x\in X} A(x) = 1,$$

$$B^*(y) = A(x_0) \wedge B(y) = B(y)$$

具有还原性. 随着 A^* 与 A 的偏离由小到大, $A(x_0)$: $1 \to 0$, $B^*(y)$: $B(y) \to 0$, 与实际相符.

4.2 Larsen 乘积运算

对于蕴涵算子 R_{La}: $[0,1]^2 \to [0,1]$ 是二元函数, 定义为 $R_{La}(a,b) = a \cdot b$. 根据复合算法可得

$$B^*(y) = \sup_{x\in X}[A^*(x) \cdot A(x)] B(y). \tag{13}$$

令

$$\sup_{x\in X}[A^*(x) \cdot A(x)] = A(x_0),$$

则

$$B^*(y) = A(x_0) \cdot B(y). \tag{14}$$

当 $A^* = A$ 时, 若 $A(x)$ 正规, 则

$$A(x_0) = \sup_{x\in X}[A(x) \cdot A(x)] = \sup_{x\in X}[A(x)]^2 = 1,$$

$$B^*(y) = A(x_0) \cdot B(y) = B(y)$$

具有还原性. 随着 A^* 与 A 的偏离由小到大, $A(x_0)$: $1 \to 0$, $B^*(y)$: $B(y) \to 0$, 与实际相符.

可见对于蕴涵算子 R_C 和 R_{La}, 推理合成规则都有良好的还原性, 且推理结论符合实际情况. 这两个算子都是两个模糊集的 t-范数, 对于所有的 t-范数, 是否满足这个推理规则? 众所周知, Dombi 的 t-范数

$$t_\lambda(a,b) = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{1}{a} - 1\right)^\lambda + \left(\frac{1}{b} - 1\right)^\lambda\right]^{1/\lambda}}, \tag{15}$$

当 $\lambda \in (0,\infty)$ 时, 覆盖了 t-范数的整个空间.

4.3 Dombi t-范数运算

对于蕴涵算子 R_D: $[0,1]^2 \to [0,1]$ 是二元函数, 定义为

$$R_D(a,b) = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{1}{a} - 1\right)^\lambda + \left(\frac{1}{b} - 1\right)^\lambda\right]^{1/\lambda}},$$

其中 $\lambda \in (0,\infty)$. 则

$$B^*(y) = \sup_{x\in X}\{R_D[A^*(x), R_D(A(x), B(y))]\} = \cdots = \left(1 + \left\{\inf_{x\in X}\left[\left(\frac{1}{A^*(x)} - 1\right)^\lambda + \left(\frac{1}{A(x)} - 1\right)^\lambda\right] + \left(\frac{1}{B(y)} - 1\right)^\lambda\right\}^{1/\lambda}\right)^{-1}. \tag{16}$$

当 $A^* = A$ 时, 若 $A(x)$ 正规, 并有

$$\inf_{x\in X}\left[\left(\frac{1}{A^*(x)} - 1\right)^\lambda + \left(\frac{1}{A(x)} - 1\right)^\lambda\right] = \inf_{x\in X}\left[2\left(\frac{1}{A(x)} - 1\right)^\lambda\right] = 0. \tag{17}$$

则

$$B^*(y) = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{1}{B(y)} - 1\right)^\lambda\right]^{1/\lambda}} = B(y)$$

具有还原性. 随着 A^* 与 A 的偏离由小到大, 有 $\inf_{x\in X}\left[\left(\frac{1}{A^*(x)} - 1\right)^\lambda + \left(\frac{1}{A(x)} - 1\right)^\lambda\right]$: $0 \to \infty$, 则 $B^*(y)$: $B(y) \to 0$, 与实际相符.

当蕴涵算子为 R_C 和 R_{La} 时, 其复合算法可看作

$$B^*(y) = \sup_{x\in X}\{R[A^*(x), R(A(x), B(y))]\}. \tag{18}$$

由此可见, 对于任何的 t-范数, 都可作为推理合成规则 CRI 的蕴涵算子, 其复合算法为

$$B^*(y) = \sup_{x\in X}\{t[A^*(x), t(A(x), B(y))]\}. \tag{19}$$

随着 A^* 与 A 的偏离由小到大, $B^*(y)$: $B(y) \to 0$, 并且随着 λ: $0 \to \infty$, $B^*(y)$: 由 $B(y)$ 到 0 的速度越快, 从某一方面说, 必存在最优 λ.

5　蕴涵算子的逻辑关系

为什么反映"$A \to B$"传递关系的蕴涵算子 ($R_Z, R_0, R_L, R_{DR}, R_G, R_S, R_\Delta$), 在实际推理中不能得到合理的结论? 这些算子都是由经典的假言推理中推广而来的, 它依据的是"如果 A, 那么 B"的经典逻辑推理关系, 就是真值表 (表 1) 中所有可能的状态与"$A \to B$"相同.

表 1　A, B, A → B 及蕴涵关系真值表

A	B	$A \vee B$	$A \cdot B$	$A \to B$	R_Z	R_0	R_L	R_{DR}	R_G	R_S	R_Δ	R_C	R_{La}	R_D
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

在表 1 中, 当 $A = 0$ 且 $B = 1$, 或 $A = 0$ 且 $B = 0$ 时, $A \to B = 1$, 表示如果 A 为假, 无论 B 是真或是假, 则推理"如果 A, 那么 B"都是真. 在实际中, 这种推理显然不能在所有情况下都成立, 它是经典逻辑推理中以"善意的推断"为前提, 在理论上所作的规定, 并以此为理论依据进行实际推理, 当然不可能推出正确的结论.

蕴涵算子 (R_C, R_{La}, R_D) 与 ($A \vee B$) 和 ($A \cdot B$) 的真值表一致, "如果 A, 那么 B"仅仅反映了 A 与 B

的一种相互关系, 从实际意义上说, $(A \rightarrow B)$ 与 $(A \vee B)$ 和 $(A \cdot B)$ 的真值表一致更接近于实际情况

6 结 语

在模糊控制的模糊推理中, 蕴涵算子采用经典的逻辑关系“$A \rightarrow B$”的推广式是不恰当的; 采用模糊 t-范数能够得到合理的结论. 一方面, 模糊控制在应用领域得到了成功的运用; 另一方面, 模糊理论仍然受到攻击. 模糊理论中的模糊推理是蕴涵“$A \rightarrow B$”的关系算子, 而实际应用中模糊推理是蕴涵 $(A \vee B)$ 或 $(A \cdot B)$ 的关系算子. 前者依据的经典逻辑推理具有不完整性, 其模糊推理存在缺陷, 经不住推敲; 后者从各方面都较合理, 并在实际应用中获得了巨大成功.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1973, 3(1): 28-44.

[2] Dubois D, Prade H, Lang J. Fuzzy Sets in Approximate Reasoning[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1991, 40(1): 143-244.

[3] Buckley J, Hayashi Y. Can Approximate Reasoning Be Consistent[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, 65(1): 13-18.

[4] Wang G J. On the Logic Foundation of Fuzzy Reasoning[A]. *Lecture Notes in Fuzzy Mathematics and Computer Science*[C]. Omaha, 1997, 1: 1-48.

[5] Guan J W, Bell D A. Approximate Reasoning and Evidence Theory[J]. *Information Sciences*, 1997, 96(1): 207-235.

[6] Hajek P. *Metamathematics of Fuzzy Logic*[M]. Dordrecht: Kluwer, 1998.

[7] Wang G J. On the Logic Foundations of FMP and FMT[J]. *Fuzzy Mathematics*, 1997, 5(1): 229-250.

[8] Wang L X. *A Course in Fuzzy and Control*[M]. Hong Kong: Prentice-Hall, Inc, 2003.

[9] Elkan C. The Paradoxical Success of Fuzzy Logic[J]. *IEEE Expert*, 1994, 9(4): 3-8.

[10] 吴望名. 关于模糊逻辑的一场争论[J]. *模糊系统与数学*, 1995, 19(2): 1-10.
(Wu W M. A Controversy on Fuzzy Logic[J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 1995, 19(2): 1-10.)

[11] 李洪兴. 从模糊控制的数学本质看模糊逻辑的成功[J]. *模糊系统与数学*, 1995, 19(4): 1-14.
(Li H X. To See the Success of Fuzzy Logic from Mathematical Essence of Fuzzy Control[J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 1995, 19(4): 1-14.)

[12] 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法[J]. *中国科学*(E 辑), 1999, 29(1): 43-53.
(Wang G J. Triple I Method with Total Inference Rules of Fuzzy Reasoning[J]. *Science in China (Technological Sciences)*, 1999, 29(1): 43-53.)

[13] 宋士吉, 冯纯伯. 关于模糊推理的全蕴涵三 I 算法的约束度理论[J]. *自然科学进展*, 2000, 10(10): 884-889.
(Song S J, Feng C B. Theory of Restriction Degree of Triple I Method with Total Inference Rules of Fuzzy Reasoning[J]. *Progress in Natural Science*, 2000, 10(10): 884-889.)

[14] 宋士吉, 吴澄. 模糊推理的反向三 I 约束算法[J]. *自然科学进展*, 2002, 12(1): 95-100.
(Song S J, Wu C. Reverse Triple I Method with Restriction Degree in Fuzzy Reasoning[J]. *Progress in Natural Science*, 2002, 12(1): 95-100.)

(上接第 904 页)

[5] Zhang Y, Zhang S. Fuzzy Adaptive Sliding Mode Decentralized Control for Interconnected[A]. *15th Triennial World Congress of the Int Federation of Automatic Control*[C]. Barcelona, 2002: 322-326.

[6] Yang G, Zhang S, Lam J, et al. Reliable Control Using Redundant Controllers[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(11): 1588-1593.

[7] Yang G, Zhang S. Decentralized Control of a Class of a Large-scale Systems with Symmetrically Interconnected Subsystems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(5): 710-713.

[8] Zhang Y, Zhang S. Decentralized Output Feedback Robust Stabilization for a Class of Nonlinear Interconnected Systems with Similarity[J]. *Control Theory and Applications*, 2001, 18(4): 573-576.

[9] Hovd M, Skogestad S. Control of Symmetrically Interconnected Plants[J]. *Automatica*, 1986, 30(6): 1617-1640.