

文章编号: 1001-0920(2005)08-0913-04

## 基于残缺互补判断矩阵的交互式群决策方法

徐泽水

(解放军理工大学 理学院, 南京 210007)

**摘要:** 研究基于残缺互补判断矩阵的群决策问题。首先利用残缺互补判断矩阵的积型一致性, 将每个残缺互补判断矩阵拓展为完整的互补判断矩阵(简称拓展互补判断矩阵), 并将所有个体拓展互补判断矩阵集成为群体互补判断矩阵; 然后基于群体互补判断矩阵与个体拓展互补判断矩阵之间的偏离阈值同决策者进行交互, 使得决策者的意见尽可能协调一致; 最后给出一种基于残缺互补判断矩阵的交互式群决策方法, 并进行了算例分析。

**关键词:** 群决策; 残缺互补判断矩阵; 拓展互补判断矩阵; 积型一致性

中图分类号: O 223 文献标识码: A

## Interactive Approach Based on Incomplete Complementary Judgment Matrices to Group Decision Making

XU Ze-shui

(Institute of Sciences, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, China E-mail: xuzeshui@263.net)

**Abstract:** Group decision-making problem based on incomplete complementary judgement matrices is investigated. Firstly, each individual incomplete complementary judgement matrix is extended to a complete complementary judgement matrix by utilizing multiplicative consistency. All these extended matrices are then aggregated into the collective complementary judgement matrix. Secondly, based on the dead line of deviations between the collective complementary judgement matrix and individual extended complementary judgement matrices, the decision makers interact in order to obtain the highest degree of consensus. Finally, an interactive approach based on incomplete complementary judgement matrices to group decision making is developed, and an illustrative example is also given.

**Key words:** Group decision making; Incomplete complementary judgement matrix; Extended complementary judgement matrix; Multiplicative consistency

### 1 引言

互补判断矩阵是决策者表达偏好信息的一种常用方式。构造一个完整的  $n$  阶互补判断矩阵, 需要对决策方案进行  $n(n-1)/2$  次两两比较<sup>[1-4]</sup>。在决策过程中, 决策者有时可能对某些比较判断缺少把握、不感兴趣, 或对某些比较敏感的问题不想发表意见, 并且当  $n$  较大时, 完成  $n(n-1)/2$  次判断的工作量很大, 因此决策者的偏好信息将以残缺互补判断矩阵的方式来表达。

目前, 有关残缺互补判断矩阵的排序理论和方法的研究刚刚起步。文献[5]定义了残缺互补判断

矩阵的概念及其一系列特殊形式, 研究了残缺互补判断矩阵的一些性质, 并利用简洁的行和归一化公式推导出一组求解残缺互补判断矩阵排序向量的线性方程组。文献[6]则从优化的角度给出了求解残缺互补判断矩阵排序向量的目标规划模型。

由于客观事物的复杂性和不确定性, 现代大型决策往往不仅需要多个决策者的积极参与, 而且需要多次反复、不断对决策意见进行协调和修正, 因而有必要对偏好信息以残缺互补判断矩阵形式表达的群决策问题进行研究。本文给出一种基于残缺互补判断矩阵的交互式群决策方法, 为解决此类问题

收稿日期: 2004-08-29; 修回日期: 2004-10-22

基金项目: 中国博士后科学基金项目(2003034366)。

作者简介: 徐泽水(1968—), 男, 安徽南陵人, 教授, 博士后, 从事决策分析等研究。

提供了一条有效的途径

### 2 拓展互补判断矩阵

设  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  为一组有限个决策方案的集合, 决策者在某一准则下利用 0-1 标度对  $X$  中方案进行两两比较, 并构造互补判断矩阵  $B = (b_{ij})_{n \times n}$  其中  $p_{ij} \in [0, 1], p_{ij} + p_{ji} = 1, p_{ii} = 0.5, i, j = 1, 2, \dots, n$  对于任意  $i, j, k$ , 若有  $b_{ik}b_{kj}b_{ji} = b_{ij}b_{jk}b_{ki}$ , 则称  $B$  为积型一致性互补判断矩阵<sup>[1]</sup>.

由于构造一个完整的  $n$  阶互补判断矩阵需要对决策方案进行  $n(n - 1)/2$  次两两比较, 在决策方案较多的情况下, 决策者往往不能给出全部判断, 其偏好信息将以残缺互补判断矩阵的方式来表达

定义 1<sup>[5]</sup> 设判断矩阵  $C = (c_{ij})_{n \times n}$ , 若其中既含残缺元素又含非残缺元素, 且非残缺元素满足  $c_{ij} \in [0, 1], c_{ij} + c_{ji} = 1, c_{ii} = 0.5$ , 则称  $C$  为残缺互补判断矩阵  $C$  中的残缺元素  $c_{ij}$  用未知数“ $x$ ”表示, 相应的残缺元素  $c_{ji}$  用“ $1 - x$ ”表示

设  $S$  为残缺互补判断矩阵  $C$  中所有非残缺元素组成的集合, 残缺互补判断矩阵  $C = (c_{ij})_{n \times n}$  的有向图  $G(C) = (V, E)$  定义为:  $V = \{1, 2, \dots, n\}, E = \{(i, j) | c_{ij} \in S\}$ . 其中  $V$  为结点集,  $E$  为有向弧集, 并以  $c_{ij}$  作为有向弧  $(i, j)$  的权. 如果  $(i, j) = (k, l) \in \emptyset$ , 则称元素  $c_{ij}$  和  $c_{kl}$  是相邻接的; 对于残缺元素  $c_{ij}$ , 如果存在相互邻接的非残缺元素  $c_{i_1j_1}, c_{i_2j_2}, \dots, c_{i_lj_l}$ , 则称  $c_{ij}$  是可间接获得的; 如果残缺互补判断矩阵  $C$  的任一残缺元素都可通过给定的非残缺元素间接获得, 则  $C$  是可接受的, 否则是不可接受的. 对于任意  $c_{ik}, c_{kj}, c_{ij} \in S$ , 若有

$$c_{ik}c_{kj}c_{ji} = c_{ki}c_{ij}c_{jk}, \tag{1}$$

则称  $C$  为积型一致性残缺互补判断矩阵<sup>[5]</sup>.

对于残缺互补判断矩阵  $C = (c_{ij})_{n \times n}$ , 若  $C$  是不可接受的, 则说明  $C$  中至少存在一个残缺元素  $c_{i_0j_0}$ , 不能通过给定的非残缺元素间接获得, 即方案  $x_{i_0}$  与方案  $x_{j_0}$  之间没有任何直接或间接的比较信息. 此时, 有必要把残缺互补判断矩阵  $C$  反馈给决策者, 建议其对所有不可间接获得的残缺元素重新进行评估, 直至获得一个可接受的残缺互补判断矩阵

设  $C = (c_{ij})_{n \times n}$  是可接受的残缺互补判断矩阵, 虽然  $C$  的残缺元素不能直接得到, 但可通过已给定的非残缺元素间接获得, 即可通过式(1)进行求解

定理 1 对于任意一个 3 阶可接受残缺互补判断矩阵, 都可通过式(1)获得唯一的积型一致性互补判断矩阵

对于阶数大于 3 的可接受残缺互补判断矩阵  $C$

$= (c_{ij})_{n \times n}$ , 由式(1)确定其某一残缺元素  $c_{ij}$  时(利用  $c_{ij} + c_{ji} = 1$ ), 可能得到不同的值

$$c_{ij} = \frac{c_{ik}c_{kj}}{c_{ik}c_{kj} + c_{jk}c_{ki}}, k \in N_{ij} \tag{2}$$

其中  $N_{ij} = \{k | r_{ik}, r_{jk} \in S\}$ . 此时, 可用它们的平均值来替代, 即

$$\bar{c}_{ij} = \frac{1}{\Delta N_{ij}} \sum_{k \in N_{ij}} \frac{c_{ik}c_{kj}}{c_{ik}c_{kj} + c_{jk}c_{ki}}, \tag{3}$$

其中  $\Delta N_{ij}$  是  $N_{ij}$  中元素的个数

### 3 交互式群决策方法

由于客观事物的复杂性和不确定性, 现代大型决策往往需要多个决策者的积极参与. 下面给出一种基于残缺互补判断矩阵的交互式群决策方法. 具体步骤如下:

步骤 1 对于某一群决策问题, 设  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  为方案集,  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_t\}$  为决策者集. 假设决策者的权重向量为  $w = (w_1, w_2, \dots, w_t)^T$ , 其中  $w_k > 0, k = 1, 2, \dots, t, \sum_{k=1}^t w_k = 1$ . 决策者  $d_k \in D$  在某一准则下, 利用 0-1 标度对  $X$  中方案进行两两比较, 并构造残缺互补判断矩阵  $C^{(k)} = (c_{ij}^{(k)})_{n \times n}, k = 1, 2, \dots, t$ . 若  $C^{(k)}$  是可接受残缺互补判断矩阵, 则进行下一步; 否则, 把残缺互补判断矩阵  $C^{(k)}$  反馈给决策者  $d_k$ , 建议其对  $C^{(k)}$  中所有不可间接获得的残缺元素重新进行评估, 直至获得一个可接受残缺互补判断矩阵

步骤 2 根据下式确定可接受残缺互补判断矩阵  $C^{(k)}$  中每个残缺元素  $c_{ij}^{(k)}$ :

$$\bar{c}_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\Delta N_{ij}^{(k)}} \sum_{l \in N_{ij}^{(k)}} \frac{c_{il}^{(k)}c_{lj}^{(k)}}{c_{il}^{(k)}c_{lj}^{(k)} + c_{jl}^{(k)}c_{li}^{(k)}}, k = 1, 2, \dots, t \tag{4}$$

其中:  $N_{ij}^{(k)} = \{l | r_{il}^{(k)}, r_{jl}^{(k)} \in S^{(k)}\}$ ,  $\Delta N_{ij}^{(k)}$  是  $N_{ij}^{(k)}$  中元素的个数,  $S^{(k)}$  是可接受残缺互补判断矩阵  $C^{(k)}$  中所有非残缺元素组成的集合. 从而得到拓展互补判断矩阵  $\bar{C}^{(k)} = (\bar{c}_{ij}^{(k)})_{n \times n}$

步骤 3 利用简单加权平均算子对所有拓展互补判断矩阵  $\bar{C}^{(k)} = (\bar{c}_{ij}^{(k)})_{n \times n}$  进行集成, 即

$$\bar{c}_{ij} = w_1\bar{c}_{ij}^{(1)} + w_2\bar{c}_{ij}^{(2)} + \dots + w_t\bar{c}_{ij}^{(t)}, i, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, t \tag{5}$$

得到群体互补判断矩阵  $\bar{C} = (\bar{c}_{ij})_{n \times n}$

步骤 4 利用下列两个检验标准对群体决策意见的一致性进行衡量:

$$\delta^{(k)} = \max\{| \bar{c}_{ij}^{(k)} - \bar{c}_{ij} | \}, \tag{6}$$

$$\sigma^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\bar{c}_{ij}^{(k)} - \bar{c}_{ij})^2} \tag{7}$$

其中:  $\delta^{(k)}$  表示拓展互补判断矩阵  $\bar{C}^{(k)}$  与群体互补判断矩阵  $\bar{C}$  中单个元素之间最大的偏离值,  $\sigma^{(k)}$  表示拓展互补判断矩阵  $\bar{C}^{(k)}$  与群体互补判断矩阵  $\bar{C}$  的整体偏离程度;  $\delta^{(k)}$  和  $\sigma^{(k)}$  的阈值  $\delta_0$  和  $\sigma_0$  根据具体情况而定, 一般取  $\delta_0 = 0.2$  和  $\sigma_0 = 0.1$  较为合理

对于任意  $k$ , 若有  $\delta^{(k)} < \delta_0, \sigma^{(k)} < \sigma_0$ , 则认为决策者们的意见基本一致, 进行下一步; 否则, 说明第  $k$  决策者的意见与群意见有较大分歧, 需将拓展互补判断矩阵  $\bar{C}^{(k)}$  和群体互补判断矩阵  $\bar{C}$  反馈给决策者  $d_k$ , 建议其参照  $\bar{C}$  对  $\bar{C}^{(k)}$  重新判断和调整, 构造新的拓展互补判断矩阵  $\bar{C}^{(k)}$ , 并转步骤 3

步骤 5 利用互补判断矩阵排序公式<sup>[1]</sup>

$$\omega = \frac{1}{n(n-1)} \left( \sum_{j=1}^n \bar{c}_{ij} + \frac{n}{2} - 1 \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

求解群体互补判断矩阵  $\bar{C}$  的排序向量  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ .

步骤 6 按  $\omega$  分量大小对方案  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  进行排序并择优

#### 4 算例分析

对于某一群决策问题, 有 5 个方案  $x_i (i = 1, 2, \dots, 5)$  可供选择, 且有 4 位决策者  $d_k (k = 1, 2, 3, 4)$ , 其权重向量为  $w = (0.3, 0.4, 0.2, 0.1)^T$ . 决策者  $d_k$  在某一准则下利用 0-1 标度对方案  $x_i$  进行两两比较, 并构造可接受残缺互补判断矩阵  $C^{(k)} = (c_{ij}^{(k)})_{5 \times 5}$ :

$$C^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.6 & x & 0.7 \\ 0.6 & 0.5 & 0.3 & 0.7 & 0.5 \\ 0.4 & 0.7 & 0.5 & 0.9 & x \\ 1-x & 0.3 & 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 & 1-x & 0.6 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$C^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.5 & x & 0.6 & 0.7 & 0.6 \\ 1-x & 0.5 & 0.4 & 0.9 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 & 0.5 & x & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 1-x & 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 & 0.6 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$C^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.7 & 0.8 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & x & 0.5 & 0.7 \\ 0.3 & 1-x & 0.5 & 0.7 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.5 & x \\ 0.4 & 0.3 & 0.4 & 1-x & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$C^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.6 & 0.9 & 0.8 \\ 0.8 & 0.5 & 0.4 & 0.8 & x \\ 0.4 & 0.6 & 0.5 & 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ 0.2 & 1-x & 0.5 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

试确定最佳方案

首先根据式(4) 确定  $C^{(k)}$  中每个残缺元素, 得到相应的拓展互补判断矩阵  $\bar{C}^{(k)} = (\bar{c}_{ij}^{(k)})_{5 \times 5}$  其中

$$\begin{aligned} \bar{c}_{14}^{(1)} &= 0.77250, \bar{c}_{41}^{(1)} = 0.22750, \\ \bar{c}_{35}^{(1)} &= 0.72195, \bar{c}_{53}^{(1)} = 0.27805, \\ \bar{c}_{12}^{(2)} &= 0.42983, \bar{c}_{21}^{(2)} = 0.57017, \\ \bar{c}_{34}^{(2)} &= 0.61581, \bar{c}_{43}^{(2)} = 0.38419, \\ \bar{c}_{23}^{(3)} &= 0.39381, \bar{c}_{32}^{(3)} = 0.60619, \\ \bar{c}_{45}^{(3)} &= 0.42468, \bar{c}_{54}^{(3)} = 0.54532, \\ \bar{c}_{25}^{(4)} &= 0.74813, \bar{c}_{52}^{(4)} = 0.25187. \end{aligned}$$

其余元素与原有判断矩阵中相应的元素一致 给定偏离阈值  $\delta_0 = 0.2, \sigma_0 = 0.1$ , 利用式(4) 对拓展互补判断矩阵  $\bar{C}^{(k)}$  进行集成, 得到群体互补判断矩阵

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.371932 & 0.62 & 0.628068 & 0.5 \\ 0.38 & 0.631238 & 0.5 & 0.238250 & 0.283676 \\ 0.35 & 0.355187 & 0.453415 & 0.761750 & 0.65 \\ 0.75 & 0.644813 & 0.716324 & 0.546585 & 0.5 \\ 0.479064 & 0.5 & 0.520936 & 0.479064 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

利用式(6) 和(7) 计算  $\delta^{(k)}$  和  $\sigma^{(k)}$ , 得

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} &= 0.183676, \sigma^{(1)} = 0.094907, \delta^{(2)} = 0.15, \\ \sigma^{(2)} &= 0.076950, \delta^{(3)} = 0.25, \sigma^{(3)} = 0.094803, \\ \delta^{(4)} &= 0.179064, \sigma^{(4)} = 0.103181. \end{aligned}$$

由于  $\delta^{(3)} = 0.25 > 0.2, \sigma^{(4)} = 0.103181 > 0.1$ , 把  $\bar{C}^{(3)}$  和  $\bar{C}$  反馈给决策者  $d_3$ , 把  $\bar{C}^{(4)}$  和  $\bar{C}$  反馈给决策者  $d_4$ , 建议他们参照  $\bar{C}$  对  $\bar{C}^{(3)}$  和  $\bar{C}^{(4)}$  重新判断和调整 假设他们重新构造如下拓展互补判断矩阵:

$$\bar{C}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 0.5 & 0.39381 \\ 0.3 & 0.60619 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.4 \\ 0.8 & 0.6 \\ 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 0.6 \\ 0.5 & 0.45468 \\ 0.54532 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.25187 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 0.748 & 13 \\ 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 0.7 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

利用式(5)对拓展互补判断矩阵  $\bar{C}^{(1)}, \bar{C}^{(2)}, \bar{C}^{(3)}, \bar{C}^{(4)}$  进行集成, 得到群体互补判断矩阵

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.371 & 932 & 0.62 \\ 0.618 & 0.68 & 0.5 & 0.368 & 762 \\ 0.38 & 0.631 & 238 & 0.5 \\ 0.248 & 0.250 & 0.21 & 0.283 & 676 \\ 0.36 & 0.355 & 187 & 0.453 & 415 \\ 0.751 & 0.750 & 0.64 \\ 0.79 & 0.644 & 813 \\ 0.716 & 0.324 & 0.546 & 585 \\ 0.5 & 0.520 & 936 \\ 0.479 & 0.64 & 0.5 \end{bmatrix}$$

利用式(6)和(7)计算  $\delta^{(k)}$  和  $\sigma^{(k)}$ , 得

$$\delta^{(1)} = 0.183\ 676, \sigma^{(1)} = 0.097\ 024,$$

$$\delta^{(2)} = 0.146\ 585, \sigma^{(2)} = 0.069\ 820,$$

$$\delta^{(3)} = 0.09, \sigma^{(3)} = 0.053\ 906,$$

$$\delta^{(4)} = 0.179\ 064, \sigma^{(4)} = 0.076\ 188$$

对于任意  $k$ , 均有  $\delta^{(k)} < 0.2, \sigma^{(k)} < 0.1$ , 因而决策者的意见基本一致. 利用式(8)求解群体互补判断矩阵  $\bar{C}$  的排序向量

$$\omega = (0.219\ 684, 0.221\ 082, 0.213\ 707, 0.163\ 143, 0.182\ 383)^T$$

按排序向量  $\omega$  的分量大小对方案  $x_i (i = 1, 2, \dots, 5)$  进行排序, 得  $x_2 > x_1 > x_3 > x_5 > x_4$ , 最佳方案为  $x_2$ .

## 5 结论

本文给出一种基于残缺互补判断矩阵的交互式群决策方法. 该方法首先利用残缺互补判断矩阵的

积型一致性, 把每个残缺互补判断矩阵拓展为完整的互补判断矩阵, 并把所有个体拓展互补判断矩阵集成为群体互补判断矩阵; 然后基于群体互补判断矩阵与个体拓展互补判断矩阵之间的偏离阈值同决策者进行交互, 与群意见分歧较大的决策者需依照群意见来确定分歧所在, 进而修正和调整自己的评估信息, 使决策者的意见尽可能达到一致, 从而使决策结果更具科学性和合理性.

## 参考文献(References)

- [1] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.  
(Xu Z S. *Uncertain Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.)
- [2] Chiclana F, Herrera F, Herrera V E. Integrating Three Representation Models in Fuzzy Multipurpose Decision Making Based on Fuzzy Preference Relations[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, 97(1): 33-48.
- [3] 樊治平, 姜艳平. 模糊判断矩阵排序方法研究的综述[J]. *系统工程*, 2001, 19(5): 12-18.  
(Fan Z P, Jiang Y P. An Overview of Priority Methods for Fuzzy Judgement Matrices [J]. *Systems Engineering*, 2001, 19(5): 12-18.)
- [4] Baets B, Fodor J. *Principles of Fuzzy Preference Modelling and Decision Making* [M]. Ghent: Academic Press, 2003.
- [5] 徐泽水. 残缺互补判断矩阵[J]. *系统工程理论与实践*, 2004, 24(6): 91-97.  
(Xu Z S. Incomplete Complementary Judgement Matrix [J]. *Systems Engineering — Theory and Practice*, 2004, 24(6): 91-97.)
- [6] Xu Z S. Goal Programming Models for Obtaining the Priority Vector of Incomplete Fuzzy Preference Relation [J]. *Int J of Approximate Reasoning*, 2004, 36(3): 261-270.

(上接第912页)

- [6] 严文福, 郑明东, 宁方青, 等. 焦炉加热优化串级控制的应用[J]. *燃料与化工*, 2004, 35(3): 15-16.  
(Yan W F, Zheng M D, Ning F Q, et al. Application of Optimized and Series Control of Coke Oven [J]. *Fuel and Chemical Processes*, 2004, 35(3): 15-16.)
- [7] Tan S H, Yu Y. Adaptive Fuzzy Modeling of Nonlinear Dynamical Systems [J]. *Automatica*, 1996, 32(4): 637-643.
- [8] Tanaka H, Yasuno M, Oshima H, et al. Application of

Fuzzy Inference to Combustion Control for Coke Oven [A]. *Ironmaking Conf Proc* [C]. Toronto, 1992: 509-513.

- [9] 陈友文, 王福利, 乔成和. 焦炉优化供热模型的研究与应用[J]. *钢铁*, 1998, 33(7): 5-7.  
(Chen Y W, Wang F L, Qiao C H. Study and Application of Optimal Heat Supplying Model for Coke Oven Batteries [J]. *Iron and Steel*, 1998, 33(7): 5-7.)