第20卷 第8期　　控 制 与 决 策　　2005年8月
Vol. 20 No. 8　　Control and Decision　　Aug. 2005

文章编号: 1001-0920(2005)08-0943-04

一类不确定线性时滞系统的保性能研究

纪志成, 朱嵘嘉, 沈艳霞
(江南大学 控制科学与工程研究中心, 江苏 无锡 214122)

摘　要: 利用Lyapunov稳定性理论, 研究具有状态时滞的线性不确定系统的保性能控制问题. 考虑传感器传输时滞和采样周期的影响, 在不确定性难以满足一般保性能控制的范数有界的条件下, 通过系统性能指标局部优化的方法, 由局部保性能指标上界确定系统整体保性能指标的上界. 在时滞有界和采样周期内状态参数阵不变的条件下, 通过求解Riccati微分方程得到局部优化控制律. 数值仿真表明了该方法的有效性和可行性.

关键词: 不确定时滞系统; 保性能控制; 局部优化指标; Riccati微分方程
中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Study on the Guaranteed Cost Control for a Class of Uncertain Time-delay Systems

JI Zhi-cheng, ZHU Rong-jia, SHEN Yan-xia
(Control Science and Engineering Research Center, Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China. Corrospondent: JI Zhi-cheng, E-mail: zcji@sytu.edu.cn)

Abstract: The problem of guaranteed cost control for uncertain state time-delay systems is studied based on Lyapunov stability theory. Since the delay of sensor and the periods of sampling often make the uncertain state matrix not satisfy the matrix-decomposing condition, the partly guaranteed cost target is presented by applying the state space and decomposing methods, so the whole performance target is obtained. With the bounded delay condition and the invariance of parameter matrix in sampling periods, a design approach of a state feedback controller for optimizing the part performance is proposed by solving Riccati differential equation. Finally, the simulation example shows the validity and the applicability of the proposed approach.

Key words: Uncertain time-delay systems; Guaranteed cost control; Part optimizing performance target; Riccati differential equation

1 引　　言

在实际系统中, 由于模型误差、测量误差和线性近似误差等, 时常产生一些不确定性问题. 时滞的存在会引起一系列不确定的因素, 往往导致系统性能下降甚至使系统不稳定. 近年来, 不确定时滞系统的研究已成为控制领域的热点之一, 并取得了许多研究成果[1~3]. 大量的文献对其主要的控制策略——保性能控制问题进行研究, 但多数文献都是在不确定性具有范数有界[4]的条件下进行讨论, 而对于不满足此条件的系统的研究文献则较少.

本文在不确定性难以满足范数有界的条件下, 考虑传感器传输的时滞和采样周期, 提出在远程控制器端由已知时滞推导性能指标. 即在时滞有界时确定系统状态向量空间, 从而得到无记忆状态反馈控制律下的系统局部保性能指标上界, 并由Riccati微分方程求解系统在采样周期内状态参数阵不变条件下的局部优化控制律.

2　系统描述

考虑不确定线性时滞系统

收稿日期: 2004-11-08; **修回日期**: 2005-03-07.

作者简介: 纪志成(1959—), 男, 浙江杭州人, 教授, 博士, 从事电力电子、电气传动等研究; 沈艳霞(1973—), 女, 山东淄博人, 博士生, 从事电力电子、电气传动的研究.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_1 + \Delta A_1)x(t) + (A_2 + \\ \qquad \Delta A_2)x(t - d(t)) + Bu(t), \\ x(t_k) = \varphi(t_k),\ t_k < t \leq t_{k+1}, \\ y(t) = C(t)x(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t)$ 为系统 n 维状态变量; $y(t) \in R^m$ 为系统被控输出; $\varphi(t_k)$ 为传感器在 $t = t_k$ 时刻采样得到的 $x(t)$ 值, 即第 k 周期的状态初始函数向量; $d(t) > 0$ 为已知时变的滞后时间, 且有 $\dot{d}(t) = \beta < 1$; A_i, B, C 为适维矩阵, 且 (A_i, B) 可控; ΔA_i 为不确定矩阵, 表示模型中参数的不确定性.

定义 $\overline{A}_1 = A_1 + \Delta A_1, \overline{A}_2 = A_2 + \Delta A_2$. 只考虑系统中传感器到控制器的时滞, 忽略执行器到对象的时滞. 取 n 维控制输入量

$$u(t) = -Kx(t), \tag{2}$$

由此系统状态量可表示为

$$\dot{x}(t) = (\overline{A}_1 - BK)x(t) + \overline{A}_2 x(t - d(t)). \tag{3}$$

定义系统性能指标函数

$$J(t) = \int [x^{\mathrm{T}}(t)Q_1 x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Q_2 u(t)]\mathrm{d}t, \tag{4}$$

其中 Q_1 和 Q_2 为给定的正定矩阵.

考虑传输时滞和采样周期, 在第 $k+1$ 采样周期内远程控制器的状态函数为

$$x(t) = \Gamma(t)\varphi(t_k) + \int \Gamma(t)\overline{A}_2 x(s)\mathrm{d}s,$$

$$t_k < t < t_{k+1},\ k = 1, 2, \cdots. \tag{5}$$

其中: $\Gamma(t)$ 为对应于 $\overline{A}_1 - BK$ 的非负状态转移矩阵, $\varphi(t_k)$ 为传感器在 t_k 时刻采样得到的 $x(t)$ 值, $\int \Gamma(t)\overline{A}_2 x(s)\mathrm{d}s$ 为由已知时滞推得的状态分量.

定义 1 当系统的最大时滞 $d(t)$ 大于网络传输周期 T 时, 系统采样值取上一步的传输值

$$\varphi(t_{k+1}) = \varphi(t_k). \tag{6}$$

定理 1 不确定时滞系统(1) 在控制量 $u(t)$ 作用下, 如果存在适当维数的正定对称矩阵 P 和 Q, 使得对于所有不确定性 ΔA_i, 满足

$$\begin{bmatrix} Q + P(\overline{A}_1 - BK) + \\ (\overline{A}_1 - BK)^{\mathrm{T}}P & P\overline{A}_2 \\ \overline{A}_2^{\mathrm{T}}P & -(1-\beta)Q \end{bmatrix} < 0,$$

则系统渐近稳定.

证明 在无外界干扰的情况下, 构造系统的 Lyapunov 函数

$$V(x) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{d(t)} x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s)\mathrm{d}s, \tag{7}$$

其中 P 和 Q 为正定对称阵. 由 $\dot{d}(t) = \beta$, 对 $V(x)$ 求导得

$$\begin{aligned} &\dot{V}(x) = \\ &x^{\mathrm{T}}(t)P\overline{A}_1 x(t) + x^{\mathrm{T}}(t)\overline{A}_1^{\mathrm{T}}Px(t) - \\ &2x^{\mathrm{T}}(t)PBKx(t) + 2x^{\mathrm{T}}P\overline{A}_2 x(t - \\ &d(t)) + x(t)^{\mathrm{T}}Qx(t) - (1 - \\ &\beta)x^{\mathrm{T}}(t - d(t))Qx(t - d(t)). \end{aligned}$$

令 $z(t) = [x(t) \quad x(t - d(t))]^{\mathrm{T}}$, 取 $x(t_0) = x_0$, 则得

$$\dot{V}(x) \leq z^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix} Q + P(\overline{A}_1 - BK) + \\ (\overline{A}_1 - BK)^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} & P\overline{A}_2 \\ \overline{A}_2^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} & -(1-\beta)Q \end{bmatrix} z(t) < 0. \tag{8}$$

由 Lyapunov 稳定性理论, 可知系统(1) 是渐近稳定的. □

定义 2[5] 对于不确定系统(1), 若存在控制律(2) 和一个正数 J^*, 使得对系统中所有的不确定性, 闭环系统都稳定且指标函数(4) 满足 $J \leq J^*$, 则称 J^* 为系统(1) 的一个可保性能, 控制律(2) 为系统(1) 的一个保性能控制律.

引理 1 取 $\lambda(t)$ 和 $k(t)$ 为非负, 如果 $y(t)$ 满足 $y(t) \leq \lambda(t) + \int k(s)y(s)\mathrm{d}s$, 则有

$$y(t) \leq \lambda(t_0)\mathrm{e}^{A(t)} + \int \lambda(s)\mathrm{e}^{B(s)}\mathrm{d}s.$$

其中

$$A(t) = \int k(s)\mathrm{d}s,\ B(s) = \int k(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$\forall t \geq t_0 \geq 0,\ k = 1, 2, \cdots.$$

3 主要结果

定理 2 考虑不确定时滞线性系统(1), 如果时滞 $d(t)$ 范数有界, 且状态转移阵 $\Gamma(t)$ 和周期传输初始采样值 $\varphi(t_0)$ 已知, 则在此周期内状态量 $x(t)$ 有界.

证明 由式(5) 得

$$\|x(t)\| \leq \|\Gamma(t)\varphi(t_k)\| + \int \|\Gamma(t)\overline{A}_2\| \|x(s)\|\mathrm{d}s. \tag{9}$$

由引理 1 得

$$\begin{aligned} &\|x(t)\| \leq \\ &\|\Gamma(t_k)\varphi(t_k)\| \exp[\|\dot{\Gamma}(t_k)\overline{A}_2\|(t - t_k)] + \\ &\|\dot{\Gamma}(t)\| \|\varphi(t_k)\| \|\Gamma(t_k)\overline{A}_2\|^{-1} \times \\ &\exp[\|\Gamma(t_k)\overline{A}_2\|(t - t_k)]. \end{aligned}$$

取 $\|\overline{k}\| = \|\Gamma(t_k)\overline{A}_2\|$, 有

$$\begin{aligned} &\|x(t)\| \leq \\ &\|\varphi(t_k)\|(\|\Gamma(t_k)\| + \\ &\|\dot{\Gamma}(t)\| \|\overline{k}\|^{-1})\exp(\|\overline{k}\|(t - t_k)). \end{aligned}$$

因为 $x(t_k) = \varphi(t_k)$, 所以

$$\begin{aligned} &\|x(t)\| = \|x^{\mathrm{T}}(t)\| \leq \\ &(\|\Gamma(t_k)\| + \|\Gamma(t)\| \|\overline{k}\|^{-1}) \times \\ &[\exp(\|\overline{k}\|(t - t_k))]\|x(t_k)\|. \end{aligned} \tag{10}$$

定理得证. □

取 $F = (\|(t_k)\| + \|\dot{\Gamma}(t)\| \|\overline{k}\|^{-1}) \times \exp(\|\overline{k}\|(t - t_k))$, 则由式(10) 确定 $x(t)$ 的分布空间为

$$M = \{x(t) \mid \|x(t)\| \leq F\|x(t_k)\|\}. \tag{11}$$

由于时滞的影响, 系统状态量 $x(t)$ 的范数在控制量的作用下, 受前一时刻系统测量值 $\varphi(t_k)$ 范数的约束.

定义 3　对于不确定时滞系统(1), 若存在适当维数的正定对称矩阵 P, 使得对所有不确定性, 有

$$\begin{bmatrix} 2Q_1 + P(\bar{A}_1 - BK) + (\bar{A}_1 - BK)^{\mathrm{T}}P + KQ_2K & P\bar{A}_2 \\ \bar{A}_2^{\mathrm{T}}P & -(1-\beta)Q_1 \end{bmatrix} < 0,$$

则式(2) 为保性能鲁棒控制器.

若系统满足定义 2, 则有

$$\mathring{V}(x) + x^{\mathrm{T}}(t)(Q_1 + K^{\mathrm{T}}Q_2K)x(t) \leq$$
$$z^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix} 2Q_1 + P(\bar{A}_1 - BK) + (\bar{A}_1 - BK)^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} + K^{\mathrm{T}}Q_2K & P\bar{A}_2 \\ \bar{A}_2^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} & -(1-\beta)Q_1 \end{bmatrix} \times$$
$$z(t) < 0.$$

即 $\mathring{V}(x) < 0$.

考虑采样周期 T, 应用贝尔曼动态规划原理, 系统每个采样周期初始状态量 x_k 与上个周期的状态 x_{k-1} 有关, 全局保性能指标可转化为

$$J(t) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} J_k(t) =$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int [x^{\mathrm{T}}(s)[Q_1 + K^{\mathrm{T}}Q_2K]x(s)]\mathrm{d}s,$$
$$t_k < t < t_{k+1}. \tag{12}$$

根据定理 2, 当 $t \in [t_k\ \ t_{k+1}]$ 时, 局部性能指标

$$J_k(t) \leq \int \mathring{V}(x)\mathrm{d}t = V(x(t_k)) - V(x(t)) \leq$$
$$P\|x(t_k)\|(1 - (\|\Gamma(t_k)\| +$$
$$\|\mathring{\Gamma}(t)\|\ \|\bar{k}\|^{-1})^2\mathrm{e}^{2\|\bar{k}\|T} \equiv J_K. \tag{13}$$

在变时滞不确定系统的采样周期内, 系统在无记忆控制律 $u(t)$ 作用下, 仍然稳定且满足保能性要求, 其中 J_K 为系统局部性能指标的上界.

在有限采样周期内(设末时刻采样为 n), 由式(12) 和(13) 可推得系统全局保性能指标上界

$$\hat{J} = \sum_{K=1}^{n} J_k. \tag{14}$$

系统状态量 $x(t)$ 的确定应用了引理 1, 因而性能指标 $\hat{J}$ 具有较大的保守性.

本文对于一类不确定系统进行控制器设计. 首先给出如下假设:

1) 在一个传输周期内, 系统不确定参数阵 ΔA_1 和 ΔA_2 已知, 且为时不变;

2) 忽略控制器到对象的传输时滞.

定理 3　对于不确定时滞系统(1), 给定矩阵 Q_1 和 Q_2, 在满足上述假设前提下, 如果存在 $n \times n$ 正半定对称矩阵 $S(t)$, 满足 Riccati 方程

$$\mathring{S}(t) + S(t)\bar{A}_1(t) + \bar{A}_1^{\mathrm{T}}(t)S(t) +$$
$$(1-\beta)(S(t)\bar{A}_2(t) + \bar{A}_2^{\mathrm{T}}(t)S(t)) +$$
$$Q_1 - S(t)B(t)Q_2^{-1}B^{\mathrm{T}}(t)S(t) = 0, \tag{15}$$

则 $u(t) = -Q_2^{-1}B^{\mathrm{T}}(t)S(t)x(t)$ 为保性能优化控制律.

证明　必要性: 易知系统状态量满足定理 2, 所以其控制律为保性能控制. 再证其满足局部优化指标.

$$J(u(t)) =$$
$$\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_{k+1})Px(t_{k+1}) +$$
$$\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}[x^{\mathrm{T}}(t)Q_1x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Q_2u(t)]\mathrm{d}t. \tag{16}$$

考虑优化保性能控制器 $u(t)$ 的确定, 引入拉格朗日乘子, 定义局部周期内性能指标函数

$$J(u(t)) =$$
$$\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_{k+1})Px(t_{k+1}) +$$
$$\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\{[x^{\mathrm{T}}(t)Q_1x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Q_2u(t)] +$$
$$\lambda^{\mathrm{T}}[\bar{A}_1(t)x(t) + \bar{A}_2(t)x(t-d(t)) +$$
$$Bu(t) - \mathring{x}]\}\mathrm{d}t. \tag{17}$$

求解优化控制律即解式(17) 的无条件极值问题, 引入 Hamilton 函数

$$H(x(t), x(t-d(t)), u, \lambda, t) =$$
$$\frac{1}{2}(x^{\mathrm{T}}Q_1x + u^{\mathrm{T}}Q_2u) + \lambda^{\mathrm{T}}(\bar{A}_1(t)x +$$
$$\bar{A}_2(t)x(t-d(t)) + Bu. \tag{18}$$

将式(18) 带入(17), 得

$$J(u(t)) =$$
$$\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_{k+1})Px(t_{k+1}) +$$
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}}[H(x(t), x(t-d(t)), u, \lambda, t) - \lambda^{\mathrm{T}}\mathring{x}]\mathrm{d}t. \tag{19}$$

求变分 $\delta J(u)$, 由于 $\delta u(t)$ 的变化会连锁引起 $\delta x(t)$, $\delta x(t-d(t))$ 和 $\delta x(t_{k+1})$ 的变化, 考虑 $\delta u(t)$, $\delta x(t)$, $\delta x(t-d(t))$ 和 $\delta x(t_{k+1})$ 的影响, 对式(19) 分别求其变分, 然后消去变量 $\lambda(t)$ 得到系统的 Riccati 方程(15). 即由性能指标 $J(u)$ 确定无记忆控制律(考虑到参数的不确定性会影响控制律的确定, 实际中控制律由当时的系统参数确定)

$$u(t) = -Q_2^{-1}B^{\mathrm{T}}(t)S(t)x(t),\ t > t_k. \tag{20}$$

其中 $S(t) > 0$ 满足 Riccati 方程(15). 系统局部优化性能指标为

$$\tilde{J} = \varphi^{\mathrm{T}}(t_k)Q_1\varphi(t_k) + \int_{d(t)}^{0}\varphi^{\mathrm{T}}(s)Q_2\varphi(s)\mathrm{d}s. \tag{21}$$

充分性: 只要将式(20) 代入(16) 即可证得. □

4 仿真实例

考虑时滞系统

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \Delta A_2 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix},$$

$$P = Q_2 = I, x(t_k) = [e^{t_k} \quad e^{t_k}],$$

$$t \le t_k, d(t) = |0.1\sin t|.$$

在上述假设前提下, 求解 Riccati 微分方程(15), 解得局部优化控制律

$$K = [-1.914\,2 \quad -1.301\,5].$$

在此控制律作用下, 系统局部保性能指标上界 $J^* = 15.818\,2$. 状态 x 的响应曲线如图 1 和图 2 所示.

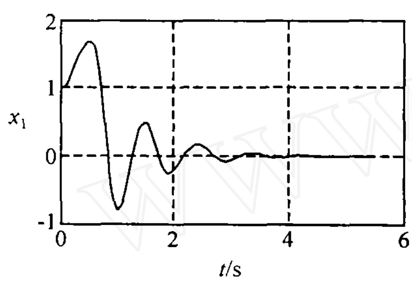

图 1 系统的状态响应 x_1

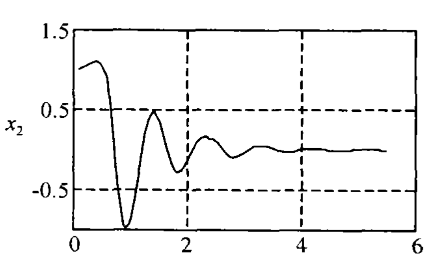

图 2 系统的状态响应 x_2

5 结 语

本文针对一种具有状态时滞的不确定系统, 基于状态控制器研究其稳定和保性能控制问题. 从控制系统的实际出发, 考虑到传感器到控制器的时滞和系统参数的不确定性, 在不确定参数阵难以满足一般保性能控制的模有界的条件下, 由已知时滞确定状态量空间, 得到系统局部周期内保性能指标的上界, 从而推得全局保性能指标的上界. 所设计的控制器满足上述条件, 不仅具有鲁棒性, 而且可以达到局部周期优化的性能指标.

参考文献(References)

[1] 俞立, 冯浩. 不确定离散时滞系统的保能性控制[J]. *自动化学报*, 2001, 27(3): 392-396.

(Yu L, Feng H. Guaranteed Cost Control of Discrete-time Uncertain Time-delay Systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(3); 392-296.)

[2] Hu S S, Zhu Q X. Stochastic Optimal Control and Analysis of Stability of Networked Control Systems with Long Delay[J]. *Automatica*, 2003, 39(11): 1877-1884.

[3] 蔡云泽, 何星, 许晓鸣, 等. 一类非线性时滞不确定性系统的鲁棒 H_∞ 滤波[J]. *系统仿真学报*, 2004, 16(1): 133-139.

(Cai Y Z, He X, Xu X M, et al. Robust H_∞ Filter Design of a Class of Nonlinear Systems with Delay and Parameter Uncertainty[J]. *J of System Simulation*, 2004, 16(1): 133-139.)

[4] 关新平, 罗小元, 刘奕昌, 等. 不确定时滞系统具 α-γ 保性能性质的 H_∞ 控制器设计[J]. *控制与决策*, 2001, 16(增刊): 677-680.

(Guan X P, Luo X Y, Liu Y C, et al. Design of H_∞ Controller with Property of α-γ Guaranteed Cost for Uncertain Time-delay Systems[J]. *Control and Decision*, 2001, 16(S): 677-680.)

[5] Yu L, Chu J. An LMI Approach to Guaranteed Cost Control of Linear Uncertain Time-delay Systems[J]. *Automatica*, 1999, 35(6): 1155-1159.