

文章编号: 1001-0920(2005)09-1022-04

随机噪声框架下非伪频率响应的计算方法

朱凌

(清华大学自动化系, 北京 100084)

摘要: 推导了当系统输入输出实验数据精确已知时, 由未建模动态产生的频率响应集合解析表达式. 采用序贯蒙特卡罗方法产生随机噪声序列, 由这些噪声序列计算出相应的非伪频率响应集. 提出一个找到包含所有频率响应且有最小半径的圆的数值优化算法, 通过该算法, 得到一个以指定概率包含控制对象非伪频率响应的最小集合. 最后给出了仿真实例, 验证了整个算法的有效性.

关键词: 鲁棒辨识; 非伪频率响应; 随机实验

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Computation of Plant Unfalsified Frequency Response with a Prescribed Probability

ZHU Ling

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China. E-mail: zzzling01@mails.tsinghua.edu.cn)

Abstract: With exact input and output experimental data, an analytical expression is derived for the unfalsified frequency response consistent with prior knowledge and the experimental data. By using a sequential Monte Carlo method, noise series are sampled and the corresponding unfalsified frequency response sets are computed. A numerical algorithm is proposed to find the circle with minimal radius and containing all the given circles. With this algorithm, a set is obtained which includes the plant actual frequency response with a prescribed probability. Finally, a numerical simulation shows the validity of this method.

Key words: Robust identification; Unfalsified frequency response; Stochastic experiment

1 引言

系统辨识在以模型为基础的控制系统设计中具有重要作用, 目前, 鲁棒辨识已引起广泛的关注和研究^[1,2]. 在实验数据不充分且存在噪声情况下, 虽然所有控制对象的非伪模型可进行参数化表示, 但模型的阶数太大, 降阶困难, 已被证明是NP难问题, 很难得到可用模型集. 文献[3]研究了确定性框架下, 即噪声在频域上有确定边界情况下, 非伪模型集应满足的条件; [4]研究了噪声时域有界的情况. 确定性框架考虑的是在最坏情况下, 外部干扰、测量噪声等不确定因素对模型误差的影响, 它得到的结果通常比较保守. 在随机框架下, 控制对象的真实传递

函数仅能以一定的概率属于辨识出的模型集. 虽然, 这种框架不能保证控制对象的真实传递函数一定属于辨识出的模型集, 但它却为鲁棒辨识提供了一定的柔软性, 从而可根据实际工程应用的要求确定误差限. 此外, 由已知的一般性假设^[5], 当实验数据长度较大时, 噪声在频域上服从复正态分布, 因此本文采用了随机框架.

本文讨论了在实验数据不充分的情况下, 噪声在频域上服从复正态分布时, 确定与先验知识相符的非伪模型集的问题. 在实验数据精确已知但不充分的情况下, 非伪模型集可由一个线性分式变换表达, 经计算系统的频率响应在复平面上的一个圆内. 本文综合考虑了不完全实验数据和噪声这两种不确

收稿日期: 2004-10-18; 修回日期: 2005-01-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60174022).

作者简介: 朱凌(1979—), 男, 江苏常州人, 硕士生, 从事鲁棒辨识的研究.

定性, 提出了一种计算控制对象非伪频率响应的新方法 具体是采用序贯蒙特卡洛方法^[6,7]对可能的噪声序列进行随机采样实验, 当采样数大于某一值时, 由这些噪声和已知的不完全实验数据生成的频率响应构成了一个频率响应集, 该频率响应集包含系统真实频率响应的概率大于一个给定值

2 不完全实验数据引起的不确定性

本文将用到以下符号: $\bar{\sigma}(X)$ 为矩阵 X 的最大奇异值; $BH_{\rho}(\mathcal{Y})$ 为集合 $\{F(z) \mid \sup_{|z| \leq \rho} \bar{\sigma}(F(z)) < \mathcal{Y}\}$; $HM(P, K) = (P_{11}K + P_{12})(P_{21}K + P_{22})^{-1}$; $Tz\{a_i \mid_{i=0}^n\}$ 为由 $a_i \mid_{i=0}^n$ 定义的下三角 Toeplitz 矩阵; $\bar{W}(z)$ 为序列 $w_i \mid_{i=0}^n$ 的离散傅立叶变换; $\mathbf{R}(x)$ 和 $\mathbf{J}(x)$ 分别为复变量 x 的实部和虚部

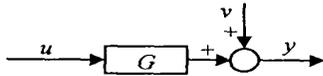


图 1 辨识实验

对如图 1 所示的辨识实验, 已知干扰为 $v_i \mid_{i=0}^n$, 存在与时域辨识实验数据 $(u_i, y_i) \mid_{i=0}^n, u_0 = 0$ 相容且属于 $BH_{\rho}(\mathcal{Y}) (\rho > 1)$ 的传递函数的充分必要条件是 $\bar{\sigma}([Y - V]U^{-1}) < \mathcal{Y}$ 当满足该条件时, 由控制对象所有非伪模型构成的集合可表示为

$$G = \{g(z) \mid g(z) = HM(\Phi(z), \epsilon(z)), \epsilon(z) \in BH_{\rho}(1)\} \quad (1)$$

这里

$$\begin{aligned} U &= Tz\{\rho^j u_i \mid_{i=0}^n\}, Y = Tz\{\rho^j y_i \mid_{i=0}^n\}, \\ V &= Tz\{\rho^j v_i \mid_{i=0}^n\}, \\ \Phi(z) &= \begin{bmatrix} \Phi_{11}(z) & \Phi_{12}(z) \\ \Phi_{21}(z) & \Phi_{22}(z) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(z) &= \sum_{j=1}^n p_j (\rho^{-1}z)^{n+1-j}, \\ \Phi_{12}(z) &= \sum_{j=1}^n q_j (\rho^{-1}z)^{j-1}, \\ \Phi_{21}(z) &= \sum_{j=1}^n q_j (\rho^{-1}z)^{n+1-j}, \\ \Phi_{22}(z) &= \sum_{j=1}^n p_j (\rho^{-1}z)^{j-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T, \\ [p_1 \ \dots \ p_n]^T &= \mathcal{U}[\mathcal{Y}U^T U - (Y - V)^T(Y - V)]^{-1}e, \\ [q_1 \ \dots \ q_n]^T &= \mathcal{Y}(Y - V)[\mathcal{Y}U^T U - (Y - V)^T(Y - V)]^{-1}e \end{aligned}$$

定理 1 对于任意的实数 ω 以下的关系成立:

$$\arg \inf_{\alpha \in C} \sup_G |G(e^{j\omega}) - \alpha| = \frac{\Phi_{22}(e^{j\omega})\Phi_{22}^*(e^{j\omega}) - \Phi_{21}(e^{j\omega})\Phi_{21}^*(e^{j\omega})}{\Phi_{22}(e^{j\omega})\Phi_{22}^*(e^{j\omega}) - \Phi_{21}(e^{j\omega})\Phi_{21}^*(e^{j\omega})}, \quad (3)$$

$$\inf_{\alpha \in C} \sup_G |G(e^{j\omega}) - \alpha| = \frac{a\rho^{-n}}{\Phi_{22}(e^{j\omega})\Phi_{22}^*(e^{j\omega}) - \Phi_{21}(e^{j\omega})\Phi_{21}^*(e^{j\omega})}, \quad (4)$$

这里

$$\begin{aligned} a &= u_0^2 e^T Q [\mathcal{Y}U^T U - (Y - V)^T(Y - V)]^{-1} Q e, \\ Q &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

证明 由式(1)的定义, 将自变量 z 省略, $g = (\Phi_{11}\epsilon + \Phi_{12})/(\Phi_{21}\epsilon + \Phi_{22})$, 它又等价于 $(g\Phi_{21} - \Phi_{11})\epsilon = \Phi_{12} - g\Phi_{22}$ 由于 $\epsilon(z)$ 是任意 $BH_{\rho}(1)$ 中的函数, $\epsilon(e^{j\omega})$ 可取任意幅度不超过 1 的复数 当 $\epsilon(e^{j\omega})$ 的幅度为 1 时, 有

$$\begin{aligned} (\Phi_{22}\Phi_{22}^* - \Phi_{21}\Phi_{21}^*)gg^* + (\Phi_{11}\Phi_{21}^* - \Phi_{12}\Phi_{22}^*)g + (\Phi_{11}\Phi_{21}^* - \Phi_{12}\Phi_{22}^*)g^* + (\Phi_{22}\Phi_{22}^* - \Phi_{21}\Phi_{21}^*) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

又因 $g(z) \in BH_{\rho}(\mathcal{Y})$, 故 $g(e^{j\omega})$ 在 $\epsilon(e^{j\omega})$ 是任意幅度不超过 1 的复数时皆有界, 即 $\Phi_{21}\epsilon + \Phi_{22} = 0$ 如果 $|\Phi_{22}| > |\Phi_{21}|$, $\epsilon(e^{j\omega})$ 总可以取到幅度不超过 1 的复数使 $\Phi_{21}\epsilon + \Phi_{22} = 0$, 因此 $|\Phi_{22}| > |\Phi_{21}|$, 即 $\Phi_{22}\Phi_{22}^* - \Phi_{21}\Phi_{21}^* > 0$ 因此, 式(5)定义了复平面上的一个圆, 其圆心为: $(\Phi_{11}\Phi_{22}^* - \Phi_{12}\Phi_{21}^*)/(\Phi_{22}\Phi_{22}^* - \Phi_{21}\Phi_{21}^*)$, 半径为: $(\Phi_{11}\Phi_{21}^* - \Phi_{12}\Phi_{22}^*)/(\Phi_{22}\Phi_{22}^* - \Phi_{21}\Phi_{21}^*)$. 将式(2)定义的 $\Phi(z)$ 代入圆心和半径的结果即得式(4).

定理 1 定义了由不完全数据引起的模型不确定性, 真实模型在每个频率点的响应应在复平面上的一个圆内 数据长度越长, 模型的不确定性越小, 圆的半径越小 当实验数据趋于无穷时, 圆的半径也趋向于 0, 也就是由包含不确定性的模型集趋向于真实模型

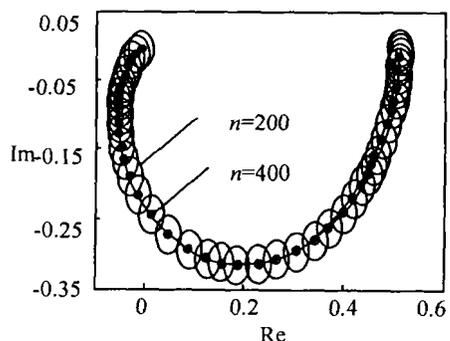


图 2 两组不同长度的实验数据计算结果

下面利用一个仿真实例验证定理 1. 设系统真实模型为 $G(s) = 1/(s^2 + 3s + 2)$, 输入信号为单位阶跃, 采样周期为 0.025 s, 从 0.001 ~ 10 取 50 个频率点, 采样数据长度为 200 点和 400 点两种情况下的非伪频率响应集. 由图 2 可以看出, 当采样数据增加后, 非伪频率响应集的半径变小, 即系统的不确定性变小.

上述模型集是在实验数据不含噪声或噪声已知的前提下得到的, 而这在实际中是不可能的. 因此, 需要一种有效解决该问题的算法.

3 产生非伪频率响应集的算法

3.1 产生与系统先验知识相符的噪声序列

研究表明, 当实验数据的长度较大时, 噪声在频域上服从独立的复正态分布. 因此, 可对噪声随机采样. 使用一般的随机采样方法, 需要一次产生全部噪声, 然后判断此次产生的随机噪声是否与系统的先验知识和实验数据相符. 如果不相符, 则要丢弃此次采样的噪声, 重新采样. 这种方法很费时, 因为需要一次产生全部噪声, 再判断采样产生噪声是否与系统先验信息矛盾, 从而决定是否丢弃此次采样的噪声序列. 为减少不必要的计算量, 提高采样效率, 本文采用序贯蒙特卡洛方法. 每次采样一个噪声点, 然后判断下一个噪声点应满足的范围, 再在此范围内进行采样, 这样有效地减少了计算量, 提高了采样效率.

文献[3]有如下结果:

$$\begin{bmatrix} 0 & V^T \\ V & 0 \end{bmatrix} = X^T D X. \quad (6)$$

其中: X 为与干扰无关的常数矩阵; $D = \text{diag}\{d_0, \text{diag}\{d_i I_2\}_{i=1}^{2n-1}, d_{2n}\}$,

$$d_i = \begin{cases} (-1)^k \mathbf{R} \{ \bar{V} (e^{j\pi/2n}) \}, & i = 2k; \\ (-1)^{k+1} \mathbf{J} \{ \bar{V} (e^{j\pi/2n}) \}, & i = 2k + 1; \\ k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

由上述定义可知, d_i 是噪声序列的离散傅立叶变换系数(或系数的负数). 根据假定, d_i 是服从正态分布的, 因此只要随机采样出 d_i 序列, 即可得到时域的噪声序列.

由式(1)的参数化条件可知, 与系统先验知识相符的噪声要满足

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Y}^T U & -Q(Y - V)^T \\ -(Y - V)Q & \mathcal{Y} \end{bmatrix} > 0,$$

即

$$\begin{bmatrix} rU^T U & -QY^T \\ -YQ & \mathcal{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Q \\ I & 0 \end{bmatrix} X^T D X \begin{bmatrix} 0 & I \\ Q & 0 \end{bmatrix} > 0 \quad (7)$$

令

$$\begin{bmatrix} rU^T U & -QY^T \\ -YQ & \mathcal{Y} \end{bmatrix} = M_0, \quad \begin{bmatrix} 0 & Q \\ I & 0 \end{bmatrix} X^T = [w_1 \dots w_{2n}],$$

则式(7)可写为

$$M_0 + [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{2n}] \times \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_{2n}^T \end{bmatrix} > 0, \quad (8)$$

$$M_0 + \sum_{i=1}^{2n} d_i w_i w_i^T > 0 \quad (9)$$

对 d_i 进行序贯蒙特卡洛采样. 设已经完成了第 k 步采样, 在进行第 $k+1$ 步时, 得

$$M_k + d_{k+1} w_{k+1} w_{k+1}^T > 0,$$

其中 $M_k = M_0 + \sum_{i=1}^k d_i w_i w_i^T$, 则

$$M_k^{1/2} (I + d_{k+1} \tilde{w}_{k+1} \tilde{w}_{k+1}^T) M_k^{1/2} > 0 \quad (10)$$

其中: $\tilde{w}_{k+1} = M_k^{-1/2} w_{k+1}$, $\tilde{w}_{k+1}^T = R^{2n \times 2}$; $k = 0, 2n$; $\tilde{w}_{k+1} = R^{2n \times 1}$, $k = 1, 2, \dots, 2n-1$. 注意到 $2n \times 2n$ 维矩阵 $w_{k+1} w_{k+1}^T$ 的非零特征值等于 2×2 维矩阵 $w_{k+1}^T w_{k+1}$ 的特征值 $\lambda_{k+1}^1 > \lambda_{k+1}^2 > 0$. 这意味着式(10)得到满足的充分必要条件是 $d_{k+1} > -1/\lambda_{k+1}^1$. d_{k+1} 在此范围内按照正态分布采样确定后, 可进行下一个干扰 d_{k+2} 的采样迭代. 采样出全部 d_i 序列, 经快速傅立叶逆变换, 即可得到一个噪声序列, 从而可计算出一个非伪频率响应集.

重复以上采样过程, 可得到一系列的非伪频率响应集. 文献[8]给出了一个随机采样的重复次数 N 与 δ 定义的采样置信区间内概率 ϵ 的关系, 即若满足 $\Pr\{|\Pr\{\bar{\sigma}(G) < \mathcal{Y}\} - P_N| < \epsilon\} = 1 - \delta$ 时, 采样数 N 应满足 $N \geq \ln(2/\delta)/2\epsilon^2$. 由于采用了序贯蒙特卡洛算法, 令 $\Pr\{\bar{\sigma}(G) < \mathcal{Y}\}$ 为 P , $P_N = 1$, 上述条件可写为: 当满足 $\Pr\{P \in (1 - \epsilon, 1)\} = 1 - \delta$ 时, 采样数 $N \geq \ln(2/\delta)/2\epsilon^2$. 由该不等式, 即可算出以指定概率包含控制对象非伪频率响应需要重复的采样次数.

3.2 包含给定圆的最小圆的数值算法

由上述的随机采样算法可知, 通过重复 N 次随机采样噪声, 在一个给定频率点, 可得到 N 个频率响应的非伪集合, 即 N 个圆. 为找到一个可包含所有非伪集的最小集合, 需要如下算法: 已知 N 个圆 O_i , $i = 1, 2, \dots, N$, 其圆心为 $(x_i, y_i) \Big|_{i=1}^N$, 半径为 $r_i \Big|_{i=1}^N$, 寻找一个包含所有这些圆且具有最小半径的圆 O . 记圆 O 和圆 O_i 的圆心分别为 o 和 o_i , 则由几何

关系可知, 圆 O 包含圆 O_i 等价于 $|oo_i| \leq r - r_i$ 这里 r 代表圆 O 的半径 若要包含所有的圆, 就是所有的圆 O_i 都要满足这个不等式, 因此上述问题的数学描述为

$$\begin{aligned} \min & r, \\ \text{s.t.} & \begin{cases} (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - (r - r_i)^2 \leq 0, i = 1, 2, \dots, N; \\ \max_{1 \leq i \leq N} (r_i) \leq r \\ \max_{1 \leq j, k \leq N} (o_j o_k) + 2^* \max_{1 \leq i \leq N} (r_i). \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

其中第 1 个条件可简化为 $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - (r - r_i)^2 \leq 0$, 即 $\max_{1 \leq i \leq N} \{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - (r - r_i)^2\} \leq 0$ 直接对上述约束进行 3 个参数的寻优是困难的 因此, 在 r 区间上一维寻优, 即首先固定 r , 然后对 x, y 寻优, 这是一个容易解决的凸优化问题, 得到算法如下:

定义 $H(r) = \min_{x,y} \max_{1 \leq i \leq N} \{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - (r - r_i)^2\}$. 对于给定的 r , 可利用凸优化方法解出 $H(r)$ 以及相应的参数 x 和 y . 在 r 的区间上采用二分法, 寻找满足 $|H(r)| < \xi$ 的 r 的最小值, 其中 ξ 是事先给定的充分小的数, 代表了算法的精度

4 仿真结果

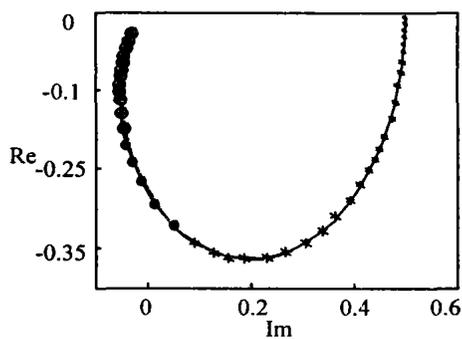


图 3 第 3.2 节算法的仿真实验结果

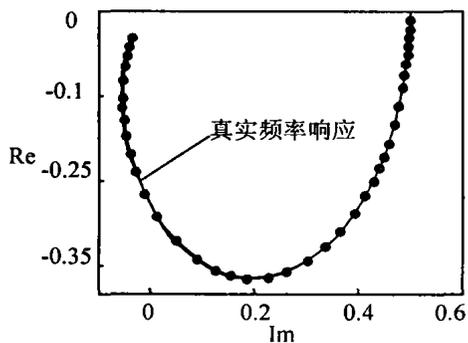


图 4 非伪频率响应集和真实频率响应

考虑一个二阶系统 $G(s) = 1/(s^2 + 2s + 2)$, 输入信号为单位阶跃, 采样周期为 0.025 s, 时域采样数据长度为 512 仿真实验在频域上从 $10^{-3} \sim 10^1$ 取 50 个频率点 系统先验知识为 $\rho = 1.014, \gamma = 65$ 令 $\delta = 0.1, \epsilon = 0.1$, 经计算取 $N = 200$, 对第 3.1 节的仿真实验结果如图 3 所示, 图 4 为对第 3.1 节算法计算后, 得到的非伪频率响应集以及真实系统的频率响应

5 结 语

本文提出了在实验数据不充分、噪声在频域上服从复正态分布时进行频率响应计算的一种方法 首先推导了与系统先验知识和实验数据相符的非伪频率响应集的解析表达式; 然后采用序贯蒙特卡洛方法随机产生噪声序列, 并得到了相应的非伪频率响应集; 最后提出了找到包含所有频率响应且有最小半径的圆的数值优化算法, 通过这种算法, 得到一个以指定概率包含控制对象非伪频率响应的最小集合 仿真实验结果表明, 本文方法可有效得到与系统先验知识相符的频率响应集, 该频率响应集在鲁棒控制中得到广泛应用

参考文献 (References)

- [1] Ninness B., Goodwin G. Estimation of Model Quality [J]. *Automatica*, 1995, 31(12): 1771-1797.
- [2] Paul M. J., Van Den Hof, Ruud J. P. Identification and Control-closed-loop Issues [J]. *Automatica*, 1995, 31(12): 1751-1770.
- [3] Zhou T. Unfalsified Model Parameterization Based on Frequency Domain Noise Information [J]. *Automatica*, 2000, 36(5): 685-696.
- [4] Zhou T., Kimura H. Structure of Model Uncertainty for a Weakly Corrupted Plant [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(4): 639-655.
- [5] Schoukens J., Renneboog J. Modeling the Noise Influence on the Fourier Coefficients After a Discrete Fourier Transform [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 1986, 35(5): 278-286.
- [6] Liu J. S. *Monte Carlo Strategies in Scientific Computing* [M]. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [7] Arnaud D., Simon G. On Sequential Monte Carlo Sampling Methods for Bayesian Filtering [J]. *Statistics and Computing*, 2000, 10(3): 197-208.
- [8] Tempo R., Bai E. W., Dabbene F. Probabilistic Robustness Analysis: Explicit Bounds for the Minimum Number of Samples [J]. *Systems and Control Letters*, 1997, 30(12): 237-242.