

文章编号: 1001-0920(2005)09-1077-04

## 基于小波基函数的预测函数控制

郑军, 颜文俊, 诸静

(浙江大学电气工程学院, 杭州 310027)

**摘要:** 针对传统PFC只能对预测时域内有限的几个拟合点进行拟合, 未考虑整个预测时域整体逼近误差性能的优化, 系统的控制品质受到损害的问题, 提出一种基于小波基函数的预测函数控制方法。利用小波的紧支局部性和多尺度分析特性, 对基函数的个数和位置分布可根据系统控制精度和不同预测时段的不同逼近要求进行灵活设置, 既保证了整体误差性能的优化, 又突出了重要拟合点的逼近要求, 并实现了优化变量的集结。理论分析和仿真应用表明, 该方法比传统的PFC有更好的快速性和抗干扰性, 对于快速系统应用场合具有良好的应用前景。

**关键词:** 小波函数; 预测函数控制; 加权最小二乘法; 集结优化

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

## Predictive Functional Control Based on Wavelet Function

ZHENG Jun, YAN Wen-jun, ZHU Jing

(College of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China Correspondent: ZHANG Jun, Email: dbzj@netease.com)

**Abstract:** A predictive functional control strategy using wavelet as basis function is developed. Traditional PFC only can fit limited several points in horizon of prediction with reference locus, and is unable to optimize the target function to the whole horizon of prediction. Because the wavelet has the properties of compact support and multi-scale analysis, the number of wavelet functions and their location are set flexibly according to the system's controlling precision and the different requirements of approximation precision at different intervals of the horizon. So the target function of the whole horizon is optimized and some important points are emphasized. Meanwhile, the optimal parameters are aggregated. The theoretical analysis and the simulation show that this approach has better rapidity and anti-interference ability compared with traditional PFC. This approach also has good application prospect in the field of fast systems.

**Key words:** Wavelet function; Predictive functional control; Weighted least square estimate; Aggregation optimization

### 1 引言

预测函数控制(PFC)在保持模型预测控制特征的同时, 还使控制量更具有规律性, 并且可以有效地减少计算量, 从而适应快速、高精度受控对象对控制算法的要求<sup>[1]</sup>。PFC已成功应用于工业机器人快速高精度跟踪控制, 并在军事和航空航天领域也有广泛应用<sup>[2-4]</sup>。PFC的最大特点在于控制量是由一组事先选定的基函数线性组合而成, 认为控制输入良

好的结构性是确保控制品质的关键

基函数的选择主要取决于参考轨迹和受控对象的特性, 一般可取为阶跃、斜坡和指数函数等。这类基函数数学意义明确, 计算简单, 但目标函数往往简化为对预测时域终点的优化要求(如阶跃函数)或其中一两个拟合点(如斜坡函数), 牺牲了整个预测时域的整体优化目标, 对参考轨迹的整体逼近性能并不十分理想, 降低了系统抗负载干扰和消除模型失

收稿日期: 2004-10-08; 修回日期: 2005-01-24

基金项目: 国家自然科学基金项目(60374028)。

作者简介: 郑军(1976—), 男, 浙江常山人, 博士生, 从事小波分析、系统建模与预测控制等研究; 诸静(1938—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 从事复杂控制系统、机器人控制等研究。

配引起的偏差的能力 文献[4]基于傅里叶逼近思想提出用正弦多项式函数作为基函数,得到了更好的控制性能和适用范围 同时,由于预测控制采用滚动优化方式,在每一时刻求出的最优控制序列中,只有当前控制量作用于对象,其余未来的控制量并不真正实施,对其精确求解无必要<sup>[5]</sup> 一般而言,对参考轨迹的逼近要求随预测时刻的增加而逐渐减弱,因此可利用这一特点采用某种集结方式将原来的优化变量用一组低维的集结变量代替,则可大大减少在线优化计算量,提高算法的快速性,从而满足实时优化的要求 但正弦函数是全局函数,无法根据对参考轨迹的逼近要求随预测时刻的增加而逐渐减弱的特点进行灵活设置,而文献[6]提出的饱和函数近似方法又难以得到解析表达式,因此需要选择具有紧支撑性的局部函数作基函数

小波理论是20世纪80年代后期发展起来的应用数学分支<sup>[7,8]</sup> 在PFC的基函数选择上,小波函数的紧支性和多尺度分析特性恰好弥补了正弦函数的不足 具体而言,在一定的预测时域内,对逼近精度要求高的时段,可选择细尺度小波为基函数;而对逼近精度要求不太高的时段,以粗尺度小波为基函数 这样既保证了整体优化目标和当前时刻控制量对下一时刻参考轨迹的逼近精度要求,又尽可能减少了基函数个数,从而减少了待优化的权系数个数,实现了优化变量的集结 基于此,本文提出以小波函数为基函数应用于PFC,并以加权最小二乘法为优化算法计算出权系数

## 2 基于小波基的预测函数控制方法

预测模型用于预测过程的未来输出,PFC对模型无特殊要求,它可以是任意结构 本文采用的是CARMA模型

$$y(k) = A(z^{-1})y(k-1) + B(z^{-1})u(k-1) + C(z^{-1})\xi(k) \quad (1)$$

式中

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_mz^{-m}, \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_nz^{-n}, \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_lz^{-l}, \end{aligned}$$

$\xi(k)$  是均值为零、标准差为  $\sigma$  的白噪声

待求的控制量是一组基函数  $f_j$  的线性组合

$$u(k+i) = \sum_{j=1}^N \mu_j f_j(i), i = 0, 1, \dots, P-1 \quad (2)$$

其中:  $P$  为预测时域长度,  $\mu_j$  为待求的权系数

PFC的优化目标是使得在一定预测时域  $P$  内预测输出与参考轨迹值之差的平方和最小

$$J = \sum_{i=1}^P (\hat{y}(k+i) - y_r(k+i))^2 \quad (3)$$

令  $\partial/\partial\mu_j = 0$  可得<sup>[2]</sup>

$$\Phi^T \theta = \eta \quad (4)$$

其中

$$\Phi = \begin{bmatrix} b_{0f_1}(0) & b_{1f_2}(0) & \dots & b_{0f_N}(0) \\ b_{0f_1}(1) + b_{1f_1}(0) & & \dots & b_{0f_N}(1) + b_{1f_N}(0) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{0f_1}(P-1) + \dots + b_{n_{f_1}}(P-n-1) & & \dots & b_{0f_N}(P-1) + \dots + b_{n_{f_N}}(P-n-1) \end{bmatrix}$$

$R^{P \times N}$

$\eta =$

$$\begin{bmatrix} y_r(k+1) - a_0y_p(k) - a_1y_p(k-1) - \dots - a_my_p(k-m) - b_1u(k-1) - \dots - b_nu(k-n) - e(k) \\ y_r(k+2) - a_0y_r(k+1) - a_1y_p(k) - \dots - a_my_p(k-m+1) - b_2u(k-1) - \dots - b_nu(k-n+1) - e(k) \\ \vdots \\ y_r(k+n) - a_0y_r(k+n-1) - a_1y_r(k+n+2) - \dots - a_my_p(k+n-m-1) - b_nu(k-1) - e(k) \\ y_r(k+n+1) - a_0y_r(k+n) - a_1y_r(k+n-1) - \dots - a_my_p(k+n-m) - e(k) \\ \vdots \\ y_r(k+P) - a_0y_r(k+P-1) - a_1y_r(k+P-2) - \dots - a_my_r(k+P-m-1) - e(k) \end{bmatrix} \quad R^P,$$

$\theta = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_N]^T \quad R^{N \times 1}$  为待优化的权系数向量 由最小二乘法可得  $\theta = (\Phi\Phi^T)^{-1}\Phi^T\eta$

如上所述,在实际控制过程中,由于对不同预测时段的拟合要求不一致(预测时刻值  $i$  越大,则拟合精度要求越低),因此可引入一加权矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_p \end{bmatrix},$$

$q_1 \ q_2 \ \dots \ q_p > 0,$

使得式(3)更改如下

$$J = \sum_{i=1}^P q_i (\hat{y}(k+i) - y_r(k+i))^2 \quad (5)$$

根据加权最小二乘法可得

$$\theta = (\Phi^T Q \Phi)^{-1} \Phi^T Q \eta = \omega \eta \quad (6)$$

在实际算法中,矩阵  $\omega = (\Phi^T Q \Phi)^{-1} \Phi^T Q$  可事先离线计算得到,减少在线计算量

本文选用紧支撑的小波函数(如墨西哥草帽小



波) 作为基函数, 实际上是以小波为基底逼近一定的预测控制曲线。事实上 Daubechies 在文献[7] 中已证明对于函数  $f(x) \in L^2(R)$ , 存在有限个小波基函数, 对  $f$  可实现任意精度的逼近, 因此将小波作为预测函数的基函数是有理论依据的。传统的预测函数控制所选用的基函数均为全局函数, 只能对预测时域内有限的几个拟合点进行拟合逼近, 未考虑整个预测时域整体误差性能的优化, 系统的动态过程并不理想(如调节时间长短和超调量的大小), 在消除负载干扰和模型失配引起的偏差方面有欠缺。而小波函数是局部函数, 利用其紧支撑和多尺度分析特性, 其基函数的个数和位置分布可根据系统控制精度和不同预测时段的不同逼近要求进行灵活设置。具体而言, 在一定的预测时域内, 对预测时刻值较小处, 以多个细尺度小波函数逼近, 确保一定的逼近精度; 对预测时刻值较大处, 由于逼近要求相对降低, 可用少数粗尺度小波函数逼近, 再结合上述的加权最小二乘法, 对于式(3) 的整体拟合误差要求, 既保证了整体, 又突出了重点, 同时尽可能将基函数个数减少, 实现了优化变量的集结, 提高了算法的快速性。另外, 在实际运算中, 由于小波是紧支局部函数, 对当前控制量  $u(k)$  的求解, 只需计算出第 1 个基函数  $f_1(0)$  的权系数  $\mu_1$ , 无需计算出全部的权系数, 比起传统 PFC, 在算法快速性上又更进了一步。

基于以上所述, 基于小波基函数的 PFC 算法步骤如下:

Step 1: 首先确定采样周期、预测时域长度、参考轨迹衰减系数等参数;

Step 2: 选定小波函数, 根据实际的拟合精度要求确定若干个小波基及其位置分布;

Step 3: 确定加权矩阵  $Q$ , 并离线计算出矩阵  $\omega = (\Phi^T Q \Phi)^{-1} \Phi^T Q$ ;

Step 4: 进入在线控制, 在每一时刻  $k$  计算出矩阵  $\eta$  根据式(6) 得到第 1 个权系数  $\mu_1$ ;

Step 5: 由  $u(k) = \mu_1 f_1(0)$  得到当前时刻控制量并作用于控制对象

### 3 仿真实例

以火炮炮塔的方向旋回控制为仿真对象, 其传递函数可近似为二阶模型

$$G(s) = \frac{1}{s(1 + 0.03s)}$$

设定采样周期  $T = 0.03$  s, 加上零阶保持环节后对象离散化为

$$G(z) = \frac{0.041z^{-1} - 0.022z^{-2}}{1 - 1.368z^{-1} + 0.411z^{-2}}$$

预测时域长度  $P = 6$ , 参考轨迹衰减系数  $\rho = 0.8$ , 用

于仿真的量测噪声是一标准差为 0.01 的零均值白噪声, 仿真时间长度为 30 s, 跟踪的输出曲线是一方波信号。选择墨西哥草帽小波为基函数, 个数为 3, 其分布如图 1 所示。最小二乘法加权阵

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

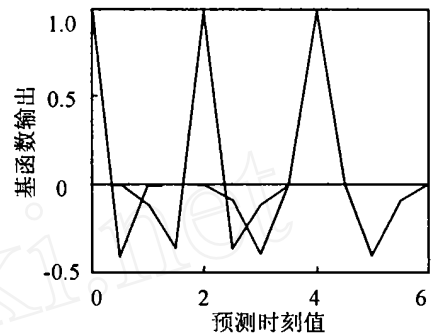


图 1 用于仿真的基函数及其分布

1) 首先测试模型失配情况下系统的控制品质, 假定辨识出的预测模型是一降阶模型

$$G_m(z) = \frac{0.04z^{-1} - 0.02z^{-2}}{1 - 0.92z^{-1}}$$

与常规的双值 PFC 方法控制结果比较如下图 2 所示。图中实线和虚线分别是本文方法和双值 PFC 输出结果

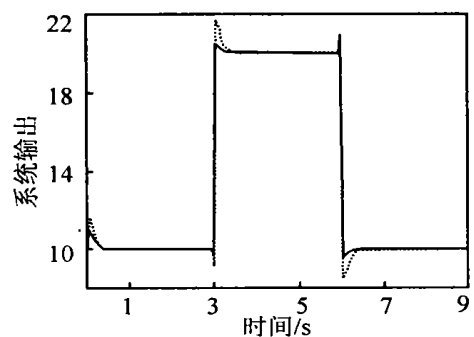


图 2 模型失配时与双值 PFC 的控制结果比较

从图 2 可知, 在输出曲线突变处, 双值 PFC 方法只有两个拟合点, 故超调较大, 而小波 PFC 方法由于是对整个预测时域整体误差性能的优化, 所拟合的参考轨迹点数较多, 抑制超调的效果明显。双值 PFC 的累积跟踪误差  $e_1 = 32.675$ , 而小波 PFC 的跟踪误差  $e_2 = 17.983$ , 后者只是前者的 55.04%, 跟踪精度明显提高。

2) 再比较两者的抗负载扰动性能。在第 68 个

采样周期附加  $d = 30$  的负载干扰, 输出结果如图3所示 实线和虚线分别是小波PFC和双值PFC输出结果

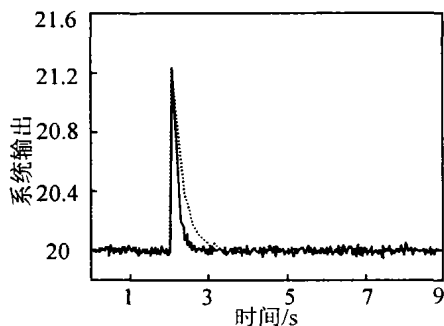


图3 有负载干扰时与双值PFC的控制结果比较

从图3可知, 两者相比, 小波PFC的抗负载扰动性能要优于双值PFC, 同样计算累积跟踪误差, 双值PFC的  $e_1 = 19.326$ , 小波PFC的  $e_2 = 12.275$ , 后者是前者的63.52%, 抗负载干扰优势明显

#### 4 结 语

针对常规预测函数控制存在的一些不足, 本文提出一种基于小波基函数的预测函数控制方法 传统的PFC只能对预测时域内有限的几个拟合点进行拟合逼近, 未考虑整个预测时域整体误差性能的优化, 损害了系统的控制品质, 特别是抗扰动和抗模型失配性能不够; 而利用小波的紧支局部性和多尺度分析特性, 对基函数的个数和位置分布可根据系统控制精度和不同预测时段的不同逼近要求进行灵活设置, 既保证了整体误差性能的优化, 又突出了重要的拟合点, 并实现了优化变量的集结 文中的理论分析和仿真应用都表明该方法比传统的PFC有更好的快速性、抗扰动和抗模型失配性能, 在一些快速系统应用场合具有良好的应用前景 进一步将研究的是其他小波(如db小波Morlet小波等)作为基函数的控制效果及基函数更合理的位置分布

#### 参考文献(References)

- [1] Richalet J, et al Predictive Functional Control—Application to Fast and Accurate Robots[A]. *IFAC the World Congress Munich*[C]. Munich, 1987: 251-258
- [2] 诸静, 等. *智能预测控制及其应用*[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2002: 174-184  
(Zhu J, et al *Intelligent Predictive Control and its Application* [M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2002, 174-185)
- [3] 张泉灵, 王树青. 基于神经网络的非线性预测函数控制[J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2001, 35(5): 497-501  
(Zhang Q L, Wan S Q. Nonlinear Predictive Functional Control based on a Neural Network [J]. *J of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2001, 35(5): 497-501)
- [4] 潘红华, 胡家升, 朱森, 等. 一种改进的预测函数控制法[J]. *系统工程与电子技术*, 2003, 25(11): 1389-1391  
(Pan H H, Hu J S, Zhu S, et al Study on a Modified Predictive Functional Control Algorithm [J]. *System Engineering and Electronics*, 2003, 25(11): 1389-1391)
- [5] 杜晓宁, 席裕庚. 预测控制优化变量的集结策略[J]. *控制与决策*, 2002, 17(5): 563-566  
(Du X N, Xi Y G. Aggregation Optimization Strategy in Model Predictive Control [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(5): 563-566)
- [6] Alex Zheng. Reducing On-line Computational Demands in Model Predictive Control by Approximating QP Constraints [J]. *J of Process Control*, 1999, 9(4): 279-290
- [7] Daubechies I. The Wavelet Transform, Time-frequency Localization and Signal Analysis [J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 1990, 36(5): 961-1005
- [8] Albert B, Francis J N. *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis* [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2003: 183-227.