

文章编号: 1001-0920(2006)01-0073-04

一种强跟踪扩展卡尔曼滤波器的改进算法

范文兵¹, 刘春风¹, 张素贞²

(1. 郑州大学 信息工程学院, 郑州 450052; 2. 华东理工大学 自动化研究所, 上海 200237)

摘要: 针对模型不匹配卡尔曼的状态估计发散和应用范围限于连续系统问题, 提出一种基于有限差分强跟踪滤波器(STFDEKF)。在滤波计算中, 引入强跟踪滤波因子修正滤波器的状态预协方差矩阵, 滤波精度得以提高; 滤波器应用有限差分方法计算滤波过程中非线性函数的偏导数, 扩大了适用范围。几种卡尔曼滤波器经过仿真比较, STFDEKF 应用于复杂非线性系统状态估计时, 具有较高数值稳定性、强跟踪性和较宽应用范围。

关键词: 有限差分; 强跟踪滤波; 非线性系统; 模型失配; 状态估计

中图分类号: O211.64 **文献标识码:** A

Improved Method of Strong Tracking Extended Kalman Filter

FAN Wen-bing¹, LIU Chun-feng¹, ZHANG Su-zhen²

(1. College of Information Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052, China; 2. Research Institute of Automation, East China University Science and Technology, Shanghai 200237, China. Correspondent: FAN Wen-bing, E-mail: iewbfan@zzu.edu.cn)

Abstract A strong tracking finite-difference Kalman filter (STFDEKF) is presented to handle the divergence problem of state estimation of a nonlinear mismatched model and limited application scope. In filtering calculation, strong tracking factor is introduced to modify priori covariance matrix to improve the accuracy of the filter. The filter uses finite-difference method to calculate partial derivatives of nonlinear functions to enlarge its application scope. The comparison of several Kalman filters shows that the STFDEKF filter has high numerical stability, strong tracking and larger application scope and it can be applied to state estimation of complex nonlinear systems.

Key words: Finite-difference; Strong tracking filtering; Nonlinear system; Model mismatch; State estimation

1 引言

扩展卡尔曼滤波器(EKF)是一种应用最广泛的非线性滤波方法之一, 人们在如何改善卡尔曼滤波的计算复杂性及数值稳定性方面作了大量的研究, 提出各种基于平方根滤波、奇异值滤波与U-D分解滤波等方法。但是, 滤波估计技术在实际应用时, 卡尔曼滤波器的收敛性、估计精度、实用性仍需不断改进。之所以如此, 主要由于实际非线性动态模型较复杂, 存在不确定性或噪声统计特性近似已知或未知, 造成了滤波器性能下降。

文献[1]提出带多重渐消因子的有色噪声干扰的强跟踪滤波器, 较好地解决了扩展卡尔曼滤波器

(EKF)关于不确定模型的鲁棒性较差、状态估计精度不高, 甚至发散等问题。文献[2, 3]提出采用内插公式计算均值、方差和协方差矩阵的滤波算法, 使其应用扩展到非线性不连续情况, 扩大了滤波器应用范围, 增强了滤波过程的收敛性。

本文首先引入强跟踪扩展卡尔曼滤波概念, 然后采用非线性函数的差分运算代替强跟踪滤波器中的偏导数计算, 继承文献[1~3]中算法的优点, 进而推导出基于有限差分的强跟踪滤波算法, 并从滤波器数值稳定性、强跟踪性等方面比较几种滤波器算法的状态估计过程。

2 强跟踪非线性滤波器

收稿日期: 2004-12-07; 修回日期: 2005-04-11

基金项目: 国家863高科技计划项目(2002AA412120); 江苏省科技攻关项目(BE2005035)。

作者简介: 范文兵(1969—), 男, 郑州人, 博士, 副教授, 从事系统滤波、预测控制、智能控制等研究; 刘春风(1983—), 男, 河南安阳人, 硕士生, 从事先进控制算法的研究。

带次优渐消因子的扩展卡尔曼滤波器(SFEKF)与常规扩展卡尔曼滤波器相比,具有以下优点^[1]:较强的鲁棒性;极强的跟踪能力;适中的计算复杂性。由于渐消因子的作用,SFEKF保持了不同时刻的残差序列处处正交。它的物理意义说明,当存在模型不确定性时,在线调整增益矩阵可使残差始终保持高斯白噪声的性质。该滤波器充分利用了残差序列中的有效信息,对过程参数变动具有较强的鲁棒性,其估值精度也较常规的EKF大为提高。考虑如下形式的一般非线性模型,状态方程和观测方程如下:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, v_k), \quad (1)$$

$$y_k = g(x_k, w_k). \quad (2)$$

式中: x_k 为状态变量; y_k 为输出变量; u_k 为控制变量; v_k 和 w_k 为过程噪声和观测噪声。假设过程噪声和观测噪声是相互独立的,且具有时变特性均值和协方差的正态白噪声序列,其均值和方差为

$$E[v_k] = q_k, \text{cov}[v_k, v_j] = Q_k \delta(k-j),$$

$$E[w_k] = r_k, \text{cov}[w_k, w_j] = R_k \delta(k-j). \quad (3)$$

扩展卡尔曼滤波器是在线性卡尔曼滤波器基础上发展而来的,采用非线性函数泰勒级数展开线性化方法,近似表示原系统的状态方程和观测方程,表达式如下:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k, q_k) + F_x(k)(x_k - \hat{x}_k) + \\ & F_v(k)(v_k - q_k), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} y_k &= g(\hat{x}_k, r_k) + G_x(k)(x_k - \hat{x}_k) + \\ & G_w(k)(w_k - r_k). \end{aligned} \quad (5)$$

式中: $F_x(k)$ 和 $F_v(k)$ 是 $f(\bullet)$ 对 x, v 的偏导数; $G_x(k)$ 和 $G_w(k)$ 是 $g(\bullet)$ 对 x, w 的偏导数

SFEKF 滤波器的表达形式如下:

验前状态估计

$$\hat{x}_{k+1} = f(\hat{x}_k, u_k, q_k), \quad (6)$$

$$\hat{y}_k = g(\hat{x}_k, r_k); \quad (7)$$

验前方差估计

$$\begin{aligned} \hat{P}_{k+1} &= \lambda(k+1)F_x(k)\hat{P}_kF_x(k)^T + \\ & F_v(k)Q_kF_v(k)^T. \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $\lambda(k+1) = 1$ 为渐消因子,它对过去的数据进行渐消,实时调整状态的预报协方差阵。验后增益矩阵、状态估计和方差估计分别为

$$K_{k+1} = P_{k+1}G_x(k)^T[G_x(k)\hat{P}_{k+1}G_x(k)^T + G_w(k)R_kG_w(k)^T]^{-1}, \quad (9)$$

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1} + K_{k+1}[y_k - \hat{y}_k], \quad (10)$$

$$\hat{P}_{k+1} = [I - K_{k+1}G_x(k)]\hat{P}_{k+1}. \quad (11)$$

残差序列为

$$y_{k+1} = y_k - \hat{y}_k \quad (12)$$

当系统满足条件: $F_v(k)Q_kF_v(k)^T$ 是半正定对称阵, $G_w(k)R_kG_w(k)^T$ 和 P_0 是正定对称阵,渐消因子 $\lambda(k+1)$ 的计算采用文献[1]的一步算法,即

$$\lambda(k+1) = \begin{cases} \lambda_0, & \lambda_0 < 1; \\ 1, & \lambda_0 > 1. \end{cases} \quad (13)$$

式中

$$\lambda_0 = \text{tr}[N(k+1)]/\text{tr}[M(k+1)], \quad (14)$$

$$N(k+1) =$$

$$V_0(k+1) - G_x(k)F_v(k)Q_k \bullet$$

$$F_v(k)^T G_x(k)^T - G_w(k)R_kG_w(k)^T, \quad (15)$$

$$M(k+1) = G_x(k)F_x(k)\hat{P}_kF_x(k)^T G_x(k)^T. \quad (16)$$

其中: $\text{tr}(\bullet)$ 为求迹算子, $V_0(k+1)$ 为输出序列的均方误差阵,计算如下:

$$\begin{aligned} V_0(k+1) &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j y_j^T = \\ & \begin{cases} G_x(0)\bar{P}_0G_x(0) + G_w(0)R_0G_w(0)^T, & k=0; \\ \frac{\rho V_0(k) + y_k y_k^T}{1+\rho}, & k=1. \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $0 < \rho < 1$ 为残差序列的遗忘因子,一般取 $\rho = 0.95$ 。

3 基于有限差分的强跟踪滤波器

扩展卡尔曼滤波器(EKF)是基于 Taylor 展开级数的线性卡尔曼滤波,其应用场合是要求非线性状态传递方程和观测方程或函数具有可微性或连续性^[4~8]。然而,非线性函数的一阶级数线性化在许多方面不足以提供较精确的近似,往往产生较大的偏差,甚至引起滤波器的发散。本节吸取了文献[2,3]中滤波器实现的一些思想,提出应用有限差分代替强跟踪滤波算法中的非线性函数的偏导数计算,进而对函数的自协方差和互协方差的计算进行改进,得到基于有限差分的强跟踪滤波器(STFDEKF)算法。

对 $Q_k, R_k, \bar{P}_k, \hat{P}_k$ 进行 Cholesky 分解,有

$$\begin{aligned} Q_k &= S_v S_v^T, R_k = S_w S_w^T, \\ \bar{P}_k &= \bar{S}_x \bar{S}_x^T, \hat{P}_k = \hat{S}_x \hat{S}_x^T. \end{aligned} \quad (18)$$

非线性函数偏导数 $F_x(k)$ 的中心差分形式如下:

$$\begin{aligned} F_x(k) &= \{f_{ij}\} = \\ & \{(f_i(x_{k,j} + \Delta x_{k,j}, u_k, q_k) - f_i(x_{k,j} - \\ & \Delta x_{k,j}, u_k, q_k))/2\Delta x_{k,j}\}. \end{aligned} \quad (19)$$

令 $\Delta x_{k,j} = h s_{x,j}$, h 为步长的调节系数; $\hat{s}_{x,j}$ 表示 \hat{S}_x 的第 j 列,则

$$\begin{aligned} F_x(k)\hat{S}_x &= \hat{S}_{xx} = \\ & \{(f_i(x_k + h s_{x,j}, u_k, q_k) - \\ & f_i(x_k - h s_{x,j}, u_k, q_k))/2h\}. \end{aligned} \quad (20)$$

同样地

$$F_v(k)\hat{S}_v = S_{xv} = \{ (f_i(\hat{x}_k, u_k, q_k + h s_{v,j}) - f_i(\hat{x}_k, u_k, q_k - h s_{v,j})) / 2h \}, \quad (21)$$

$$G_x(k)\bar{S}_x = S_{yx} = \{ (g_i(\bar{x}_k + h \bar{s}_{x,j}, r_k) - g_i(\bar{x}_k - h \bar{s}_{x,j}, r_k)) / 2h \}, \quad (22)$$

$$G_w(k)S_w = S_{yw} = \{ (g_i(\bar{x}_k, r_k + h s_{w,j} - g_i(\bar{x}_k, r_k - h s_{w,j})) / 2h \}. \quad (23)$$

带次优渐消因子的扩展卡尔曼滤波器(SFEKF) 验前方差估计、验后增益矩阵和方差估计修改为

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k+1} &= \lambda(k+1)F_x(k)P_kF_x(k)^T + F_v(k)Q_kF_v(k)^T = \\ &= \lambda(k+1)F_x(k)\hat{S}_x\hat{S}_x^TF_x(k)^T + F_v(k)S_vS_v^TF_v(k)^T = \\ &= \lambda(k+1)S_{xx}\hat{S}_{xx}^T + S_{xv}S_{xv}^T; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= \bar{P}_kG_x(k)^T[G_x(k)\bar{P}_kG_x(k)^T + G_w(k)R_kG_w(k)^T]^{-1} = \\ &= \bar{S}_x\bar{S}_x^T(S_{yx}\bar{S}_x^{-1})^T[S_{yx}S_{yx}^T + S_{yw}S_{yw}^T]^{-1} = \\ &= \bar{S}_xS_{yx}^T[S_{yx}S_{yx}^T + S_{yw}S_{yw}^T]^{-1}; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_{k+1} &= [I - K_{k+1}G_x(k)]\bar{P}_{k+1} = \\ &= \bar{S}_x\bar{S}_x^T - K_{k+1}G_x(k)\bar{S}_x\bar{S}_x^T = \\ &= \bar{S}_x\bar{S}_x^T - \bar{S}_xS_{yx}^TK_{k+1}^T - K_{k+1}S_{yx}\bar{S}_x^T + \bar{S}_xS_{yx}^TK_{k+1}^T = \\ &= \bar{S}_x\bar{S}_x^T - \bar{S}_xS_{yx}^TK_{k+1}^T - K_{k+1}S_{yx}\bar{S}_x^T + \\ &= K_{k+1}S_{yx}S_{yx}^TK_{k+1}^T + K_{k+1}S_{yw}S_{yw}^TK_{k+1}^T = \\ &= [S_x - K_{k+1}S_{yx} \quad K_{k+1}S_{yw}] \times \\ &= [S_x - K_{k+1}S_{yx} \quad K_{k+1}S_{yw}]^T. \end{aligned} \quad (26)$$

从上述推导过程可以看出, 验前验后方差和验后增益矩阵的计算包含过程噪声的影响和模型线性化误差的影响, 而且非线性函数线性化的步长也随上一轮的验前验后方差、过程噪声和观测噪声变化而变化。因此, 滤波器实现简单, 不需要导数运算, 仅需要函数的估值, 且具有较高的精度和更好的方差估计, 增加了算法的数值稳定性

4 仿 真

为了阐明强跟踪有限差分卡尔曼滤波器(STFDEKF) 算法的有效性, 下面以一个非线性随机系统为例, 来仿真比较扩展卡尔曼滤波器(EKF)、有限差分扩展卡尔曼滤波器(FDEKF) 及强跟踪有限差分滤波器(STFDEKF) 的滤波性能。假设非线性状态方程和输出方程表示如下:

状态方程

$$\begin{cases} x_{1k+1} = x_{1k} + s \cdot \cos(x_{3k} + t), \\ x_{2k+1} = x_{2k} + s \cdot \sin(x_{3k} + t), \\ x_{3k+1} = x_{3k} + t; \end{cases}$$

输出方程

$$\begin{cases} y_{1k+1} = x_{1k+1} + w_{1k}, \\ y_{2k+1} = x_{2k+1} + w_{2k}, \\ y_{3k+1} = x_{3k+1} + w_{3k} \end{cases}$$

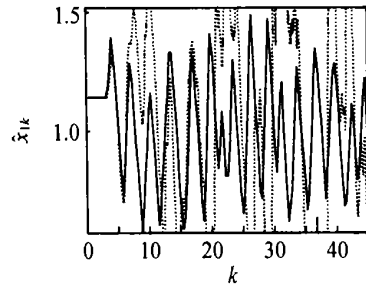
式中

$$\begin{aligned} s &= 1.09 \times 10^{-4} [a(u_{1k} + v_{1k}) + b(u_{2k} + v_{2k})], \\ t &= 1.09 \times 10^{-4} [a(u_{1k} + v_{1k}) + b(u_{2k} + v_{2k})] / c, \end{aligned}$$

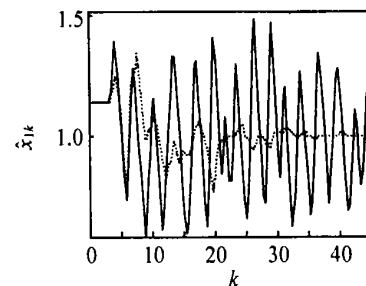
a, b, c 为模型的待估参数

滤波器的初始条件如下:

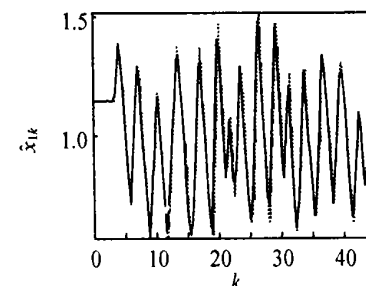
$$\begin{aligned} q_k &= [0 \ 0]^T, r_k = [0, 0, 0]^T, \\ Q_k &= \text{diag}([1/12, 1/12]), \\ R_k &= \text{diag}([10^{-7}, 10^{-7}, 10^{-7}]), \\ x_0 &= [1.2, -0.20, 2.64, 0, 1, 0, 1, 0, 5]^T, \\ \bar{P}_0 &= \hat{P}_0 = \\ &= \text{diag}([10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}]). \end{aligned}$$



(a) EKF 滤波器状态估计



(b) FDEKF 滤波器状态



(c) STFDEKF 滤波器状态估计

图 1 采用 3 种滤波器对系统 \hat{x}_{1k} 状态估计过程比较

假设滤波器的数学模型含有模型失配参数,用扩展状态方程表示如下(滤波器观测方程为非线性系统的输出方程):

$$\begin{cases} x_{1k+1} = x_{1k} + s \cdot \cos(4x_{3k} + t), \\ x_{2k+1} = x_{2k} + s \cdot \sin(5x_{3k} + t), \\ x_{3k+1} = x_{3k} + t, \\ a_{k+1} = a_k, \\ b_{k+1} = b_k, \\ c_{k+1} = c_k \end{cases}$$

图1所示为采用EKF, FDEKF 和STFDEKF 对系统状态 x_{1k} 进行估计的结果,其中:实线为真实值,虚线为滤波器的估计值。可以看出,EKF 滤波估计是发散的;有限差分滤波器(FDEKF)虽然数值是收敛的,但不能跟踪实际状态;STFDEKF 滤波算法比EKF和FDEKF具有更好的跟踪性能,特别是滤波

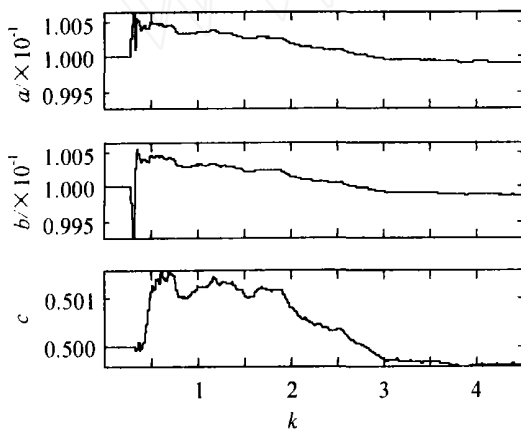


图2 应用STFDEKF 滤波器模型参数 a, b, c 估计

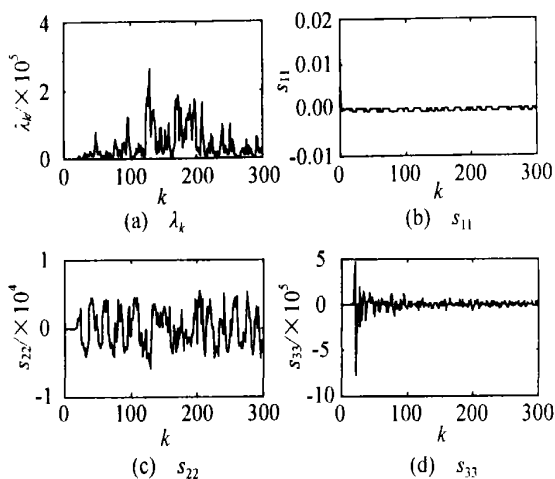


图3 渐消因子 λ_k 和状态估计方差 s_{11}, s_{22}, s_{33} 随新数据加入时的变化

模型存在误差(即模型不匹配情况)时STFDEKF 也能稳定快速跟踪实际系统状态的变化。图2所示为模型待估参数 a, b, c 随新数据加入的变化过程。图3(a)表示渐消因子随观测数据加入的调整过程。图3(b)~3(d)表示状态估计均方差值的变化。

5 结 论

基于有限差分强跟踪滤波器实际上是一种非线性自适应滤波器,它根据新的观测数据自动调整渐消因子,使滤波过程适应新数据变化;滤波过程利用有限差分运算得到验前、验后状态方差及状态增益矩阵,使滤波器的实现更容易,应用范围更广泛。该滤波器具有较强的数值稳定性和强跟踪性,可用于一大类非线性系统的状态和参数估计。

参考文献(References)

- [1] Zhou D H, Wang Q L. Strong Tracking Filtering of Nonlinear System with Colored Noise[J]. *J of Beijing Institute of Technology*, 1997, 17(3): 321-326
- [2] Schei T S. A Finite-difference Method for Linearization in Nonlinear Estimation Algorithms[J]. *Automatica*, 1997, 33(11): 2051-2058
- [3] Norgaard M, Poulsen N K, Ravn O. Easy and Accurate State Estimation for Nonlinear Systems[A]. *14th IFA C World Conference*[C]. Beijing, 1999: 343-348
- [4] Park S, Lee J G. Design of a Practical Tracking Algorithm with Radar Measurements[J]. *IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems*, 1998, 34(4): 1337-1344
- [5] Tadayyon A, Rohani S. Extended Kalman Filter-based Nonlinear Model Predictive Control of a Continuous KClNaCl Crystallizer[J]. *Canadian J of Chemical Engineering*, 2001, 79(2): 255-262
- [6] Li R, Corripio A B, Henson M A, et al. On-line State and Parameter Estimation of EPDM Polymerization Reactors Using a Hierarchical Extended Kalman Filter[J]. *J of Process Control*, 2004, 14(8): 837-852
- [7] Haykin S, Li L. Modified Kalman Filtering[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1994, 42(5): 1239-1242
- [8] Elton S D, Slocumb B J. Robust Kalman Filter for Estimation and Tracking of a Class of Periodic Discrete Event Processes[A]. *Proc of the Int Symposium on Signal Processing and Its Applications*[C]. 1996, 1: 184-187.