第21卷 第1期 控 制 与 决 策 2006年1月
Vol 21 No. 1 Control and Decision Jan. 2006

文章编号: 1001-0920(2006)01-0081-03

线性广义系统的无源控制

张秀华, 张庆灵
(东北大学 理学院, 沈阳 110004)

摘　要: 考察了线性广义系统的无源性控制问题. 一方面, 利用微分几何方法, 给出了广义系统无源的充分必要条件; 另一方面, 将存储函数具体化, 利用线性矩阵不等式, 推出了广义系统无源的充分条件. 最后, 基于这两个方面得到存在状态反馈且使闭环系统无源和严格无源的条件.

关键词: 线性; 广义系统; 无源; 存储函数
中图分类号: TP13; O231　　**文献标识码**: A

Passive Control for Lineral Singular Systems

ZHANG Xiu-hua, ZHANG Qing-ling
(School of Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: ZHANG Xiu-hua, E-mail: bmlee@mail.edu.cn)

Abstract: The passivation control problem for a class of linear singular systems is investigated. A necessary and sufficient condition of passivation is given by making use of differential geometry. In addition, a sufficient condition of passivation is provided in terms of linear matrix inequalities with a concrete storage function construeted. Strict passivity of the closed-loop system is also addressed.

Key words: Linear; Singular system; Passive; Storage function

1 引　　言

无源性与存储函数是物理系统和网络理论的重要概念, 已成为控制理论的重要组成部分. 无源系统是一类考虑系统与外界有能量交换的动态系统, 无源性是系统耗散性概念的一个特例. 对于给定的能量供给率, 如果存在一个依赖于系统状态的非负能量存储函数, 使得耗散不等式成立, 则称该系统是耗散的. 无源性是供给率为输入输出信号之乘积形式的特例, 系统无源可以保持系统的内部稳定. 一般说, 无源性、稳定性与最优性密切相关[1]. 近年来, 耗散性和无源性在正常系统中得到进一步发展, 非线性系统的无源性[2]、不确定线性系统的鲁棒无源控制[3]、线性时滞系统的无源控制[4]和离散时滞系统的鲁棒无源控制等问题[5], 都取得了许多重要成果, 而将无源性引入广义系统的文献却很少[6].

本文研究线性广义系统的无源控制问题, 利用微分几何方法, 给出了广义系统无源的充分必要条件; 并将存储函数具体化, 利用矩阵不等式, 推出了广义系统无源的充分条件. 基于这两个方面得到存在状态反馈且使闭环系统无源和严格无源的条件.

2 基本概念与引理

考虑广义系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), \tag{1a}$$

$$y(t) = Cx(t). \tag{1b}$$

其中: $x(t) \in R^n$ 是状态向量; $w(t) \in R^r$ 是外部输入; $y(t) \in R^r$ 是被调输出; E, A, B, C 是适当维数的常数矩阵, rank $E < n$.

定义1　若存在非负定函数 $V(Ex(t)), V(0) = 0$, 使得广义系统(1)满足

$$V(Ex(t)) - V(Ex(0)) \leq \int y^{\mathrm{T}}(s)w(s)\mathrm{d}s, \tag{2}$$

或

收稿日期: 2004-10-20; **修回日期**: 2005-01-19.
基金项目: 辽宁省普通高校学科带头人基金项目(124210); 辽宁省科技基金项目(2001401041).
作者简介: 张秀华(1963—), 女, 辽宁铁岭人, 副教授, 博士, 从事广义系统控制、电力系统控制的研究; 张庆灵(1956—), 男, 辽宁营口人, 教授, 博士生导师, 从事复杂大系统、H_∞控制等研究.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\mathrm{d}V(Ex(t))/\mathrm{d}t \le y^{\mathrm{T}}(t)w(t), \tag{3}$$

对于任意的输入函数成立, 则称广义系统(1) 是无源的, 不等式(2) 或(3) 称为无源不等式

如果将"$\le$"改为"$<$", 则称广义系统(1) 严格无源 这里的 $\mathrm{d}V(E(x))/\mathrm{d}t$ 表示沿系统(1) 的轨迹对时间的导数, 其中 $V(Ex(t))$ 为连续可导的函数

定义 2 对于广义系统(1), 若存在一个非负定函数 $V(Ex(t)), V(0) = 0$, 使得

$$L_{Ax}V(Ex) \le 0, L_BV(Ex) = x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

则称广义系统(1) 具有 KYP 性质 这里 KYP 是沿袭正常系统 Kalman-Yacubovitch-Popov 引理给出的相应定义, $L_{Ax}V(Ex)$ 和 $L_BV(Ex)$ 分别表示 $V(Ex(t))$ 沿 Ax 和 B 的李导数, $V(Ex(t))$ 称为存储函数

为了研究广义系统(1) 的无源性, 要在广义系统(1) 有解的情况下来讨论才有意义 为此, 引入如下引理:

引理 1[7] 广义系统(1) 对于给定的允许初始状态存在唯一解的充分必要条件是该系统正则

引理 1 保证了广义系统(1) 在正则的假设下有唯一解 对于存在脉冲的广义系统(1), 这些脉冲可能阻止系统正常运行. 在实际系统设计中, 应尽量避免脉冲的出现, 或者设计一种脉冲控制器达到无脉冲控制 不妨假设广义系统(1) 是在正则、无脉冲的情形下来讨论广义系统(1) 的无源性 广义系统(1) 的自治系统为

$$E\dot{x}(t) = Ax(t). \tag{5}$$

定义 3 如果广义系统(5) 是正则、稳定且无脉冲的, 则称广义系统(5) 是容许的

引理 2[8, 9] 广义系统(5) 是容许的充分必要条件是存在解矩阵 P, 满足

$$A^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A < 0, \tag{6}$$

$$E^{\mathrm{T}}P = P^{\mathrm{T}}E \ge 0. \tag{7}$$

3 主要定理

定理 1 如果 $V(Ex(t))$ 是一个非负定的存储函数, $V(0) = 0$, 则广义系统(1) 无源的充分必要条件是 $L_{Ax}V(Ex) \le 0, L_BV(Ex) = x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}$.

该定理说明, 广义系统(1) 具有无源性与具有 KYP 性质是等价的 定理的证明类似于正常系统的情形[10].

考虑系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), \tag{8a}$$

$$y(t) = Cx(t) + Dw(t). \tag{8b}$$

定理 2 具有存储函数的系统(8) 是无源的, 充分必要条件是存在一个非负定的存储函数 $V(Ex(t)), V(0) = 0$, 使得

$$L_{Ax}V(Ex) + \frac{1}{4}[L_BV(Ex) - x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}]D^{-1}[L_BV(Ex) - x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \le 0, \tag{9}$$

对所有的 $x \in R^n$ 都成立

证明 1) 必要性: 由无源定义不等式(3) 可得

$$L_{Ax}V(Ex) + L_BV(Ex)w \le x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}w + w^{\mathrm{T}}Dw, \tag{10}$$

它等价于

$$L_{Ax}V(Ex) + \frac{1}{4}[L_BV(Ex) - x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}]D^{-1}[L_BV(Ex) - x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} - \left\{w^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}[L_BV(Ex) - x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}]D^{-1}\right\}D\left\{w - \frac{1}{2}D^{-1}[L_BV(Ex) - x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\right\} \le 0. \tag{11}$$

在不等式(11) 中取 $w = \frac{1}{2}D^{-1}[L_BV(Ex) - x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 即得不等式(9).

2) 充分性: 假设不等式(9) 成立, 则对任意 $w \in R^n$, 不等式(11) 也成立 上述步骤逆推得不等式(3) 成立, 即系统(8) 是无源的 □

考虑系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t), \tag{12a}$$

$$y(t) = Cx(t) + Dw(t). \tag{12b}$$

通过定理 2, 可得如下推论:

推论 1 系统(12) 是无源的充分必要条件是存在 $u = u^*(x)$, 使得

$$L_{Ax}V(Ex) + L_{B_2}V(Ex)u^* + \frac{1}{4}[L_{B_1}V(Ex) - x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}]D^{-1}[L_{B_1}V(Ex) - x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \le 0 \tag{13}$$

成立

为使存储函数具体化, 可以构造 Lyapunov 函数 $V_*[Ex(t)] = x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}Px(t)$.

定理 3 对于广义系统(8), 若存在可逆矩阵 P 满足

$$E^{\mathrm{T}}P = P^{\mathrm{T}}E \ge 0, \tag{14}$$

$$D^{\mathrm{T}} + D > 0, \tag{15}$$

$$A^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A + (P^{\mathrm{T}}B - C^{\mathrm{T}})(D^{\mathrm{T}} + D)^{-1}(B^{\mathrm{T}}P - C) < 0. \tag{16}$$

则系统(8) 是严格无源的且容许的

证明

$$\frac{\mathrm{d}V_*[Ex(t)]}{\mathrm{d}t} - y^{\mathrm{T}}(t)w(t) =$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}Px(t)+x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}P\dot{x}(t)-y^{\mathrm{T}}(t)w(t),\tag{17}$$

由式(8)和(14)可得

$$\frac{\mathrm{d}V_*[Ex(t)]}{\mathrm{d}t}-y^{\mathrm{T}}(t)w(t)=(x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}+w^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}})Px+x^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}(Ax+Bw)-x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}w-w^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}w=[x^{\mathrm{T}}\quad w^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}P+P^{\mathrm{T}}A & P^{\mathrm{T}}B-C^{\mathrm{T}}\\ B^{\mathrm{T}}P-C & -D^{\mathrm{T}}-D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ w\end{bmatrix}+w^{\mathrm{T}}y.\tag{18}$$

再由式(15)和(16)及Schur补性质, 可得

$$\mathrm{d}V_*[Ex(t)]/\mathrm{d}t<2y^{\mathrm{T}}(t)w(t).$$

因此, 当$V[Ex(t)]=\frac{1}{2}V_*[Ex(t)]$时, 满足不等式(3), 故系统是严格无源的.

不等式(16)蕴涵着不等式(6), 结合式(14)并由引理2知广义系统(8)是容许的. □

考虑系统

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+B_1w(t)+B_2u(t),\tag{19a}$$

$$y(t)=Cx(t)+D_1w(t)+D_2u(t).\tag{19b}$$

在状态反馈$u(t)=Kx(t)$作用下, 闭环系统

$$E\dot{x}(t)=(A+B_2K)x(t)+B_1w(t),\tag{20a}$$

$$y(t)=(C+D_2K)x(t)+D_1w(t),\tag{20b}$$

是严格无源的且是容许的条件, 由定理3可得如下推论.

推论 2　对广义系统(20), 若存在可逆矩阵P满足

$$E^{\mathrm{T}}P=P^{\mathrm{T}}E\geq 0,\tag{21}$$

$$D_1^{\mathrm{T}}+D_1>0,\tag{22}$$

$$(A+B_2K)^{\mathrm{T}}P+P^{\mathrm{T}}(A+B_2K)+[P^{\mathrm{T}}B_1-(C+D_2K)^{\mathrm{T}}](D_1^{\mathrm{T}}+D_1)^{-1}[B_1^{\mathrm{T}}P-(C+D_2K)]<0,\tag{23}$$

则系统(20)是严格无源的且容许的.

4　结　　语

本文以无源性的概念和系统理论为出发点, 以经典的微分几何方法和矩阵不等式为工具, 研究了线性广义系统的无源控制问题. 借助于广义Lyapunov函数将存储函数具体化, 分别推导了广义系统无源的充分必要条件. 最后, 给出了存在状态反馈使闭环系统无源和严格无源的条件. 得到的线性广义系统的无源性理论, 可以看作是正常系统无源性理论的推广与延伸.

参考文献(References)

[1] Qin H S, Hong Y G. Passivity, Optimality and Stability [J]. *Control Theory and Application*, 1994, 11(4): 421-427.

[2] 冯纯伯. 应用无源性研究时变非线性系统的稳定性[J]. *自动化学报*, 1997, 23(6): 775-781.
(Feng C B. Stability Analysis for Time-varying Nonlinear Systems Via Passive Analysis [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1997, 23(6): 775-781.)

[3] 俞立, 潘海天. 具有时变不确定线性系统的鲁棒无源控制[J]. *自动化学报*, 1998, 24(3): 368-372.
(Yu L, Pan H T. Robust Passive Control of Linear Systems with Time-varying Uncertainty Parameters [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24(3): 368-372.)

[4] 俞立, 陈国定. 线性时滞系统的无源控制[J]. *控制理论与应用*, 1999, 16(1): 130-133.
(Yu L, Chen G D. Passive Control of Linear Time-varying Systems[J]. *Control Theory and Application*, 1999, 16(1): 130-133.)

[5] 关新平, 龙承念, 段广仁. 离散时滞系统的鲁棒无源控制[J]. *自动化学报*, 2002, 28(1): 146-149.
(Guan X P, Long C N, Duan G R. Robust Passive Control for Discrete Time-delay Systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(1): 146-149.)

[6] 董心壮, 张庆灵, 郭凯. 一类广义非线性的无源控制[J]. *计算技术与自动化*, 2003, 22(3): 4-6.
(Dong X Z, Zhang Q L, Guo K. Passive Control for a Class of Nonlinear Singular Systems [J]. *Computing Technology and Automation*, 2003, 22(3): 4-6.)

[7] Dai L Y. *Singular Control Systems*[M]. Berlin: Spring-Verlag, 1989.

[8] Masubuchi, Kamitane Y, Ohara A, et al. H_∞ Control for Descriptor Systems: A Matrix Inequalities Approach [J]. *Automatica*, 1997, 33(4): 669-673.

[9] Takaba K, Morihara N, Katayama T. A Generalized Lyapunov Theorem for Descriptor System [J]. *System and Control Letters*, 1995, 24: 49-94.

[10] Byrnes C J, Isidori A, Willems J C. Passivity, Feedback Equivalence and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(11): 1228-1240.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net