

文章编号: 1001-0920(2006)01-0084-04

## 粒计算的 $\alpha$ 决策逻辑语言

陈万里, 程家兴

(安徽大学 计算智能与信号处理教育部重点实验室, 合肥 230039)

**摘要:** 提出一种用于粒计算的 $\alpha$  决策逻辑语言, 该语言是由Tarski意义下的模型和可满足性所描述的一种特殊的经典谓词逻辑. 由属性值域的模糊子集代替经典的单值信息函数所得到的广义信息系统对应于模型; 借助于模糊集理论的水平截集的概念, 归纳地定义对象在一定阈值水平下满足某公式. 最后讨论如何利用 $\alpha$  决策逻辑语言描述不同的粒世界及分析形式概念和决策规则.

**关键词:** 粒计算; 信息系统; 粗糙集; 决策逻辑语言

**中图分类号:** TP18 **文献标识码:** A

## $\alpha$ - Decision Logic Language for Granular Computing

CHEN Wan-li, CHEN G Jia-xing

(Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing, Ministry of Education Anhui University, Hefei 230039, China. Correspondent: CHEN Wan-li, E-mail: wlchen1999@sohu.com)

**Abstract:** The  $\alpha$  decision logic language, described by model and satisfiability in the Tarski's style, is proposed for granular computing. The model is the generalized information system derived by replacing single-valued information function with a fuzzy set of the attribute value domain.  $\alpha$  satisfiability, namely objects satisfying a formula at a given degree, is defined by level set of fuzzy set theory. Descriptions of granular pyramid, formal concepts and decision rule are also discussed to illustrate the usefulness of  $\alpha$  decision logic language.

**Key words:** Granular computing; Information system; Rough set; Decision logic language

### 1 引言

Zadeh 于 1997 年提出粒化、组织及因果关系是构成人类认识的基础, 建立并讨论了基于模糊集理论的粒计算(GrC)的一般框架. 粒(granule)是论域上的一簇点(物体), 而这些点由于难以区别、接近或某种功能而结合在一起; 粒计算是盖住许多具体问题领域的问题求解方法的一把大伞, 如区间分析、分治法、粗糙集理论等都可以看作粒计算的一种具体实现<sup>[1,2]</sup>. Pawlak 提出的粗糙集理论<sup>[3]</sup>在数据挖掘、知识发现等领域的成功应用, 进一步激发智能计算领域关于粒计算的研究兴趣<sup>[5-10]</sup>. 一般来说, 组成粒计算模型的基本部分是粒, 按照某个粒化准则所产生的粒构成的粒层以及由所有粒层所构成的塔状结构<sup>[9,10]</sup>. 语义和算法是研究粒计算的两个基本方向, 语义包括粒的描述、表示、解释, 在同一粒层上建立

不同粒之间的关系和定义粒的运算, 在不同粒层间建立联系, 而算法方面则考虑粒化准则和如何高效地完成问题求解.

本文讨论的是在信息系统框架下一种粒计算模型. 通过用属性值域的模糊子集代替经典信息系统的单值信息函数, 信息系统被推广到更一般的情形. 在这种泛化的信息系统框架下借助于模糊集理论中的水平截集, 给出一种程度化的决策逻辑语言, 称之为 $\alpha$  决策逻辑语言. 泛化的信息系统和程度化的决策逻辑语言是对粗糙集理论中相应内容的推广. 最后从粒计算的角度讨论这种决策逻辑语言在不同粒世界的描述及其在形式概念、决策规则中的应用.

### 2 信息系统及其推广

经典的信息系统  $IS$  被定义为 4 元组, 即  $IS = (U, Q, \{V_q | q \in Q\}, \{I_q | q \in Q\})$ .

收稿日期: 2004-12-07; 修回日期: 2005-04-11.

**作者简介:** 陈万里(1971—), 男, 安徽淮北人, 博士生, 从事智能计算的研究; 程家兴(1946—), 男, 安徽黄山人, 教授, 博士生导师, 从事优化控制、控制计算的研究.

其中:  $U$  是由有限个对象组成的论域;  $Q$  是由有限个属性名构成的属性名集;  $\forall q \in Q, V_q$  是对象关于属性  $q$  取值的有限集;  $\forall q \in Q, I_q: U \rightarrow V_q$  是单值信息函数, 即  $\forall x \in U, I_q(x) \in V_q$ . Pawlak 的粗糙集理论<sup>[3]</sup>和Wille的形式概念分析<sup>[11]</sup>都是基于这种单值信息系统讨论的, 对信息函数推广可以得到下面的几种广义信息系统

程度化的单值信息系统  $IS_D: I_q$  是从  $U$  到  $V_q \times [0, 1]$  的映射, 即

$$\forall x \in U, I_q(x) = (\rho(x), \delta(x)).$$

其中:  $\rho: U \rightarrow V_q$  表示对象  $x$  关于属性  $q$  取  $V_q$  中的元素  $\rho(x)$ , 而  $\delta: V_q \rightarrow [0, 1]$  表示对象  $x$  关于属性  $q$  取值为  $\rho(x)$  的程度. Quafafou<sup>[12]</sup> 所提出的  $\alpha$  粗糙集理论 ( $\alpha$ -RST) 就是基于这种程度化的单值信息系统给出的

多值信息函数  $IS_M: \forall x \in U, I_q(x)$  是  $V_q$  的子集, 即  $I_q(x) \subseteq V_q$ . 在这种信息系统中, 对象  $x$  关于属性  $q$  的取值可以是  $V_q$  中的多个元素. Lipski<sup>[13, 14]</sup> 提出一种带有隐含语义限制的多值信息系统, 而Orłowska与Pawlak<sup>[14, 15]</sup> 讨论的多值信息系统则不对信息函数施加任何限制

关系属性信息系统<sup>[14]</sup>  $IS_R$ : 在这种信息系统中信息函数被二元关系  $R \subseteq U \times V_q$  所代替, 此外还增加了约束条件集  $\Delta$ , 进而可以给出每个对象的必然属性和可能属性

下面将信息函数推广到  $V_q$  的模糊子集, 从而得到更一般的信息系统, 即

$$IS_G = (U, Q, \{V_q \mid q \in Q\}, \{I_q(x) \mid q \in Q, x \in U\}).$$

其中:  $\forall x \in U, \forall q \in Q, I_q(x) \in [0, 1]^{V_q}$ , 即  $I_q(x)$  是从  $V_q$  到单位区间  $[0, 1]$  的映射

容易验证, 本文定义的  $IS_G$  是上述信息系统的更一般形式. 事实上,  $V_q$  的单个元素看成是单点集, 则单值和多值信息系统中的信息函数  $I_q(x)$  可以看成是从  $V_q$  到集合  $\{0, 1\}$  的映射, 即  $I_q(x) \in \{0, 1\}^{V_q}$ ; 对于程度化的单值信息函数, 不过是支集  $Supp(I_q(x))$  为单点集的特殊情形而已, 即

$$Supp(I_q(x)) = \{v \in V_q \mid (I_q(x))(v) > 0\}$$

仅含有一个元素; 关系属性系统中, 定义对象  $x$  的可能属性和必然属性分别为  $I_q(x)$  的支集和核集  $Ker(I_q(x))$ , 其中

$$Ker(I_q(x)) = \{v \in V_q \mid (I_q(x))(v) = 1\}.$$

综上所述,  $IS, IS_D, IS_M$  及  $IS_R$  都可看作是广义信息系统  $IS_G$  的特殊形式

**例 1** 假设属性名  $q$  表示“熟悉的语言”,  $q$  的值域  $V_q$  为 {汉语, 英语, 法语, 日语, 德语},  $x$  为对象. 在单值信息系统下,  $I_q(x) \in V_q$ , 如  $I_q(x) = \text{“汉语”}$ ; 在

程度化的单值信息系统下,  $I_q(x) = (\text{“英语”}, 1.0)$ ; 在多值信息系统下,  $I_q(x) \subseteq V_q$ , 如  $I_q(x) = \{\text{汉语, 法语}\}$ ; 而在本文提出的信息系统中,  $I_q(x) = 1.0/\text{汉语} + 1.0/\text{英语} + 0.0/\text{法语} + 0.0/\text{日语} + 0.6/\text{德语}$ , 为  $V_q$  的模糊子集, {汉语, 法语} 为必然属性, 而 {德语} 为可能属性. 前面的系统分别可以写成:

$$1.0/\text{汉语} + 0.0/\text{英语} + 0.0/\text{法语} + 0.0/\text{日语} + 0.0/\text{德语};$$

$$0.0/\text{汉语} + 1.0/\text{英语} + 0.0/\text{法语} + 0.0/\text{日语} + 0.0/\text{德语};$$

$$1.0/\text{汉语} + 1.0/\text{英语} + 0.0/\text{法语} + 0.0/\text{日语} + 0.0/\text{德语};$$

显然它们都是特殊的模糊集

### 3 $\alpha$ -决策逻辑语言

Pawlak 的粗糙集理论对单值信息系统的决策逻辑 (DL)<sup>[3, 4]</sup> 语言进行了详细的讨论. 简单地说, 决策逻辑语言是一种特殊的经典谓词逻辑, 其语义采用Tarski意义下的模型和可满足性: 信息系统  $IS$  是模型, 对符号以及公式进行解释; 若对象  $x$  在模型  $IS$  的解释下满足公式  $\phi$  则记作  $x \models \phi$ . Yao 借助Zadeh 提出的广义约束给出带有语义限制的逻辑语言<sup>[7]</sup>, 并将其作为一种粒计算的模型

下面给出对应  $IS_G$  的决策逻辑语言, 称之为  $\alpha$ -DL.

**定义 1** 根据如下规则确定  $\alpha$ -DL 的公式:

- 1)  $(q, v)$  是原子公式,  $q \in Q, v \in V_q$ ;
- 2) 若  $\phi$  和  $\psi$  是公式, 则  $\neg \phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \rightarrow \psi$  和  $\phi \leftrightarrow \psi$  都是公式;
- 3) 除有限步利用规则 1) 和 2) 得到的是公式外不再有其他公式

**定义 2** 给定  $IS_G$  和  $\alpha$ -DL,  $\alpha \in [0, 1]$ , 对象  $x$  在  $\alpha$  程度上满足公式  $\phi$  记作  $x \models_{\alpha} \phi$  被归纳地定义为:

- 1)  $x \models_{\alpha} (q, v)$ , 当且仅当  $(I_q(x))(v) \geq \alpha$
- 2)  $x \models_{\alpha} \neg \phi$  当且仅当非  $x \models_{\alpha} \phi$
- 3)  $x \models_{\alpha} \phi \wedge \psi$ , 当且仅当  $x \models_{\alpha} \phi$  而且  $x \models_{\alpha} \psi$
- 4)  $x \models_{\alpha} \phi \vee \psi$ , 当且仅当  $x \models_{\alpha} \phi$  而且  $x \models_{\alpha} \psi$
- 5)  $x \models_{\alpha} \phi \rightarrow \psi$ , 当且仅当  $x \models_{\alpha} \neg \phi \vee \psi$
- 6)  $x \models_{\alpha} \phi \leftrightarrow \psi$ , 当且仅当  $x \models_{\alpha} \phi \rightarrow \psi$  而且  $x \models_{\alpha} \psi \rightarrow \phi$

**定义 3** 若  $\phi$  是  $\alpha$ -DL 的公式, 对任意  $\alpha \in [0, 1]$ , 定义  $\phi$  在  $\alpha$  程度上的意义集  $m_{\alpha}(\phi)$  为  $\{x \in U \mid x \models_{\alpha} \phi\}$ .

**命题 1** 若  $\phi$  和  $\psi$  是  $\alpha$ -DL 的公式, 则对  $\forall \alpha \in [0, 1]$ , 有如下结论:

- 1)  $m_\alpha((q, v)) = \{x \in U \mid (I_q(x))(v) \geq \alpha\}$ ;
- 2)  $m_\alpha(\square \phi = U \setminus m_\alpha(\phi)$ ;
- 3)  $m_\alpha(\phi \supset \psi) = m_\alpha(\phi) \cap m_\alpha(\psi)$ ;
- 4)  $m_\alpha(\phi \supset \psi) = m_\alpha(\phi) \cap m_\alpha(\psi)$ ;
- 5)  $m_\alpha(\phi \supset \psi) = (U \setminus m_\alpha(\phi)) \cup m_\alpha(\psi)$ ;
- 6)  $m_\alpha(\phi \dashv \psi) = (m_\alpha(\phi) \cap m_\alpha(\psi)) \cup ((U \setminus m_\alpha(\phi)) \cap (U \setminus m_\alpha(\psi)))$ .

**例 2** 在例 1 中, 假设  $U = \{x, y\}$ ,  $I_q(x)$  如前, 若令  $I_q(y) = 1.0/\text{汉语} + 0.8/\text{英语} + 0.0/\text{法语} + 0.0/\text{日语} + 0.85/\text{德语}$ , 取公式  $\phi = (q, \text{英语})$ , 则  $m_{1.0}(\phi) = \{x\}$ , 而  $m_{0.7}(\phi) = \{x, y\}$ . 若另取公式  $\psi = (q, \text{德语})$ , 则容易看出  $m_{0.7}(\phi \supset \psi) = \{y\}$  而  $m_{0.5}(\phi \supset \psi) = \{x, y\}$ .

**定义 4** 称公式  $\phi$  在  $\alpha$  程度上是逻辑有效的, 当且仅当  $m_\alpha(\phi) = U$ , 记为  $\vDash_\alpha \phi$

**命题 2** 下述命题成立:

- 1)  $\vDash_\alpha \square \phi$  当且仅当  $m_\alpha(\phi) = \emptyset$ ;
- 2)  $\vDash_\alpha \phi \supset \psi$ , 当且仅当  $m_\alpha(\phi) \subseteq m_\alpha(\psi)$ ;
- 3)  $\vDash_\alpha \phi \dashv \psi$ , 当且仅当  $m_\alpha(\phi) = m_\alpha(\psi)$ .

因此, 给定  $IS_G$  和  $\alpha \in [0, 1]$ , 用  $\alpha$  DL 的公式描述概念与用论域的子集描述概念是等价的. 若限制  $\alpha = 1$  且对  $\forall x \in U, q \in Q$ , 核集  $\text{Ker}((I_q(x)))$  都是  $V_q$  的单点集, 则  $\alpha$  DL 就退化为 Pawlak 意义下的 DL.

#### 4 基于 $\alpha$ DL 的粒计算

##### 4.1 粒和粒世界的描述

给定广义信息系统  $IS_G$  及  $\{\alpha_i \in [0, 1] \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ , 公式  $\phi$  的意义集  $m_{\alpha_i}(\phi)$  对应一个粒, 而集合  $L_i = \{m_{\alpha_i}(\phi) \mid \phi \text{ 是公式}\}$  对应于一个粒层; 若  $\alpha_i < \alpha_j$  有  $m_{\alpha_i}(\phi) \subseteq m_{\alpha_j}(\phi)$ , 即每个公式  $\phi$  的意义集所对应的粒随阈值的增大而变精细; 所有的粒层  $\{L_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  构成塔状结构, 是在已知的阈值水平下对不同粒世界的描述. 特别地, 取  $1 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$  时, 可得到分层结构的粒世界的描述. 阈值  $\alpha$  选取在一定程度上决定了粒化准则.

##### 4.2 形式概念

每个概念包括内涵和外延两部分, 前者描述的是概念适用的对象的共同性质或属性, 而后者则是由对象或实体组成的概念的一些实例. 在  $\alpha$  DL 中, 可以用  $(\phi, m_\alpha(\phi))$  来表示一个概念,  $\phi$  是概念的内涵而  $m_\alpha(\phi)$  是外延. 若  $m_\alpha(\phi) \subseteq m_\alpha(\psi)$ , 则称概念  $(\phi, m_\alpha(\phi))$  是  $(\psi, m_\alpha(\psi))$  的子概念, 相应地称后者为前者的超概念. 若  $m_\alpha(\phi) \cap m_\alpha(\psi) = \emptyset$ , 则称概念  $(\phi, m_\alpha(\phi))$  和  $(\psi, m_\alpha(\psi))$  是不相交的, 否则称两个概念有非空的重叠. Wille 在形式概念分析中用属性子集描述内涵, 这里  $\alpha$  DL 用的公式描述内涵. 对于给定的  $\alpha$ , 所有的概念也构成一个概念格, 概念格上的偏

序是子概念 - 超概念关系, 而两个概念的交(下确界)与并(上确界)分别定义为

$$\begin{aligned} &(\phi, m_\alpha(\phi)) \wedge (\psi, m_\alpha(\psi)) = \\ &(\phi \supset \psi, m_\alpha(\phi \supset \psi)), \\ &(\phi, m_\alpha(\phi)) \vee (\psi, m_\alpha(\psi)) = \\ &(\phi \supset \psi, m_\alpha(\phi \supset \psi)). \end{aligned}$$

在这种定义下, 由概念的内涵很容易确定概念的外延, 而 Wille 的概念格中则不再具有该性质.

#### 4.3 决策规则的解释<sup>[4]</sup>

粒之间的关系可以用形如  $\phi \supset \psi$  的规则来表示, 这里:  $\phi, \psi$  是公式, 表示两个概念的内涵;  $\supset$  只是一个把两个概念联系起来的形式符号, 可以利用公式的意义集来解释. 给定  $IS_G, \alpha \in [0, 1]$ , 若  $m_\alpha(\phi) \subseteq m_\alpha(\psi)$ , 则称规则  $\phi \supset \psi$  在  $\alpha$  程度上是真的. 相应地可以定义规则的支持度、强度、确定性因子及覆盖因子等概念. 对于任何规则  $\phi \supset \psi$ , 定义

$$\begin{aligned} \text{Sup}_\alpha(\phi \supset \psi) &= |m_\alpha(\phi \supset \psi)|; \\ \text{Str}_\alpha(\phi \supset \psi) &= \frac{|\text{Sup}_\alpha(\phi \supset \psi)|}{|U|}; \\ \text{Cer}_\alpha(\phi \supset \psi) &= \frac{|m_\alpha(\phi \supset \psi)|}{|m_\alpha(\phi)|}; \\ \text{Cov}_\alpha(\phi \supset \psi) &= \frac{|m_\alpha(\phi \supset \psi)|}{|m_\alpha(\psi)|}. \end{aligned}$$

这些概念分别从不同的角度刻画规则. 若考虑论域上是等概率分布, 则每个公式的概率为其意义集元素个数与论域元素个数的比值. 此时, 确定性因子与覆盖因子就是两个条件概率, 即

$$\begin{aligned} \text{Cer}_\alpha(\phi \supset \psi) &= P(\phi \supset \psi); \\ \text{Cov}_\alpha(\phi \supset \psi) &= P(\psi \mid \phi). \end{aligned}$$

直观地理解为: 在具有性质  $\psi$  (或  $\phi$ ) 的对象中具有性质  $\phi$  (对应地,  $\psi$ ) 的对象的频率.

#### 5 结 语

本文推广了经典的信息系统, 将单值信息函数推广到属性值域上的模糊子集. 这种推广较之与其他的推广更具有一般性. 在这种广义的信息系统的基础上, 本文给出了相应的决策逻辑语言, 即程度化的决策逻辑语言. 这两者都可看作粗糙集理论中相应内容的泛化. 本文将这种广义的决策逻辑语言用于粒计算模型中, 主要从语义上讨论了如何解释粒、粒世界及不同粒世界的组成结构, 并且具体分析了形式概念和决策规则. 该方法的最大特点是通过阈值的选取, 可以在不同粗细程度的粒层次上进行问题求解. 有关这种粒计算模型的算法方面及如何选取合适阈值等问题, 将另行讨论.

#### 参考文献 (References)

[1] Zadeh L. A. Towards a Theory of Fuzzy Information

- Granulation and Its Centrality in Human Reasoning and Fuzzy Logic[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, 90(2): 111-127.
- [2] Zadeh L. A. Some Reflections on Soft Computing, Granular Computing and Their Roles in the Conception, Design and Utilization of Information/Intelligent Systems [J]. *Soft Computing*, 1998, 2(1): 23-25.
- [3] Pawlak Z. *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data* [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [4] Pawlak Z. Rough Sets, Decision Algorithm and Bayes's Theorems [J]. *European J of Operational Research*, 2002, 136: 181-189.
- [5] Lin T. Y. Granular Computing on Binary Relations I: Data Mining and Neighborhood Systems; II: Rough Set Representations and Belief Functions [A]. *Rough Sets in Knowledge Discovery* [C]. Heidelberg: Physica-Verlag, 1998: 107-140.
- [6] Yao Y. Y. Modeling Data Mining with Granular Computing [A]. *Proc of the 25th Annual Int Computer Software and Applications Conference* [C]. Chicago, 2001: 638-643.
- [7] Yao Y. Y., Liu C. J. A Generalized Decision Logic Language for Granular Computing [A]. *Proc of FUZZ-IEEE'02 in the 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence* [C]. Honolulu, 2002: 1092-1097.
- [8] Yao Y. Y., Liu C. J. Granular Computing Based on Rough Sets, Quotient Space Theory, and Belief Functions [A]. *Proc of ISMIS'03* [C]. Meabashi, 2003: 152-159.
- [9] Yao Y. Y. Granular Computing: Basic Issues and Possible Solutions [A]. *Proc of the 5th Joint Conference on Information Sciences* [C]. Atlantic City, 2000: 186-189.
- [10] Pedrycz W. *Granular Computing: An Emerging Paradigm* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
- [11] Wille R. Restructuring Lattice Theory: An Approach Based on Hierarchies of Concepts [A]. *Ordered Sets* [C]. Reidel, Dordrecht-Boston, 1982: 445-470.
- [12] Quafafou M.  $\alpha$ RST: A Generalization of Rough Set Theory [J]. *Information Science*, 2000, 124: 301-316.
- [13] Lipski W. On Databases with Incomplete Information [J]. *J of the ACM*, 1981, 28(1): 41-70.
- [14] Orłowska E., Pawlak Z. Representation of Nondeterministic Information [J]. *Theoretical Computer Science*, 1984, 29(1-2): 27-39.
- [15] Duntsch I., Gediga G., Orłowska E. Relational Attribute Systems [J]. *Int J Human Computer Studies*, 2001, 55(4): 293-309.

(上接第 67 页)

- [6] 刘善存, 邱菀华. 极大熵方法求解双层多目标决策问题 [J]. *系统工程理论与实践*, 2000, 20(3): 99-103.  
(Liu S. C., Qiu W. H. A Maximum Entropy Method for Solving Bilevel Multiple-Objective Decision Making Problem [J]. *Systems Engineering-Theory and Practice*, 2000, 20(3): 99-103.)
- [7] 黄海军. *城市交通网络平衡分析理论与实践* [M]. 北京: 人民交通出版社, 1994: 12-15.  
(Huang H. J. *Urban Transportation Network Equilibrium Analysis: Theory and Practice* [M]. Beijing: China Communication Press, 1994: 12-15.)
- [8] 史延科, 史忠科. 搜索空间代换法及其在城市交通控制中的应用 [J]. *控制与决策*, 2003, 18(3): 382-384.  
(Shi Y. K., Shi Z. K. Search-space Substitution Algorithm and Its Application to Urban Traffic Control [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(3): 382-384.)
- [9] 周永华, 张旭. 采用不可微精确罚函数的约束优化演化算法 [J]. *小型微型计算机系统*, 2004, 25(8): 1464-1467.  
(Zhou Y. H., Zhang X. Evolutionary Algorithm for Constrained Optimization Using Nondifferentiable Exact Penalty Functions [J]. *Micro Systems*, 2004, 25(8): 1464-1467.)
- [10] Liu J. J., Fan B. Q. The Marginal Effect of Average Speed on the Traffic-induced Emission in Yangpu District of Shanghai [A]. *Proc of the Int Conf on Transportation Systems Planning and Operation* [C]. India, 2004: 249-254.
- [11] Laurence R. Rilet, Christine M. Benedek. *Traffic Assignment Under Environmental and Equity Objectives* [R]. Washington D. C.: Transportation Research Record 1443, 1996: 92-99.