第21卷 第1期 控 制 与 决 策 2006年1月
Vol 21 No. 1 Control and Decision Jan. 2006

文章编号: 1001-0920(2006)01-0100-04

含理想控制策略和期望轨道的最优控制

王志胜, 王道波
(南京航空航天大学 自动化学院, 南京 210016)

摘　要: 研究含理想控制策略和期望轨道的二次型最优控制问题. 通过把控制问题转化为估计问题, 从信息融合估计的角度, 使原问题转化为求控制量的"最优估计"问题. 通过实际算例表明, 该算法所得二次性能指标值优于现有算法.

关键词: 理想控制策略; 最优控制; 最优估计; 信息融合
中图分类号: TP273.1　　**文献标识码**: A

Optimal Control with Ideal Control Strategy and Expected Trajectory

WANG Zhi-sheng, WANG Dao-bo
(College of Automation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China. Correspondent: WANG Zhi-sheng, E-mail: wangzhisheng@nuaa.edu.cn)

Abstract: An optimal control problem with ideal control strategy and expected trajectory is addressed. In the problem ideal control strategy, expected object trajectory and system dynamical equation are all regarded as measuring information of the control strategy. Therefore, the optimal control problem is transferred into a problem of information fusion estimation, and the algorithms of optimal control with ideal control strategy and expected trajectory are given based on information fusion theory. Simulation results indicate that the presented algorithm is better than existing algorithms.

Key words: Ideal control strategy; Optimal control; Optimal estimation; Information fusion

1 引　言

对于一类宏观经济控制系统[1,2], 不仅要求跟踪期望轨道, 而且希望系统控制量尽可能接近理想控制量, 即理想控制策略. 文献[3～5]研究了跟踪期望轨道且输入量少的最优控制, 由于采用状态扩维的方法使最优跟踪问题转化为最优调节问题, 因此计算量较大, 且没有利用理想控制策略信息.

本文从信息融合估计的角度, 把期望轨道信息、系统动态信息和理想控制策略信息等均视为关于控制量的观测信息, 从而基于信息融合估计理论[7], 直接求出关于控制量的"最优估计".

2 信息融合估计基本理论

定理 1[6]　设关于被估计量 x 的各种信息均可表示为

$$y_i = H_i x + v_i,\quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

式中: y_i 为观测数据, v_i 为观测误差, 且 $E[v_i] = \mathbf{0}$, $E[v_i v_j^T] = \begin{cases} R_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$. 若 $\sum_{i=1}^{n} H_i^T R_i^{-1} H_i$ 为非奇异, 则 $\hat{x}$ 是基于 $y_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的最优线性融合估计. 且

$$\mathrm{var}[\hat{x}] = \left(\sum_{i=1}^{n} H_i^T R_i^{-1} H_i\right)^{-1}, \tag{2}$$

$$\hat{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} H_i^T R_i^{-1} H_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} H_i^T R_i^{-1} y_i. \tag{3}$$

称式(1)为信息融合估计的统一线性模型. 显然, 关于 x 的先验信息、估计信息和各种量测信息均

收稿日期: 2004-12-01; **修回日期**: 2005-04-15.
基金项目: 南京航空航天大学引进人才科研基金项目(S8453-035).
作者简介: 王志胜(1970—), 男, 湖北松滋人, 副教授, 博士后, 从事无人机控制技术、信息融合技术等研究; 王道波(1957—), 男, 河北易县人, 教授, 博士生导师, 从事先进无人机飞行控制、机电模拟技术等研究.

可用信息融合估计的统一模型表示 称 R_i^{-1} 为信息 y_i 关于自身的信息量; $H_i^T R_i^{-1} H_i$ 为 y_i 关于被估计量 x 的信息量 所有关于被估计量 x 的信息的信息量之和等于最优融合估计 $\hat{x}$ 关于自身的信息量 通常, 信息关于自身的信息量和该信息的协方差互为倒数

定理 2[7]　在定理 1 中, 设关于 x 还含有等式约束信息, 即 $y_{n+1} = H_{n+1}x$. 不失一般性, 令

$$x = [x_1^T \quad x_2^T]^T,$$

$$y_i = H_{i,*1}x_1 + H_{i,*2}x_2 + v_i,\quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$y_{n+1} = H_{n+1,*1}x_1 + H_{n+1,22}x_2.$$

若 $H_{n+1,22}$ 可逆, 则 $\hat{x} = [\hat{x}_1^T \quad \hat{x}_2^T]^T$ 是基于 $y_i (i = 1, 2, \cdots, n+1)$ 的最优线性融合估计. 且

$$\hat{x}_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{H}_i^T R_i^{-1} \overline{H}_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \overline{H}_i^T R_i^{-1} (y_i - H_{i,*2} H_{n+1,22}^{-1} y_{n+1}), \tag{4}$$

$$\hat{x}_2 = H_{n+1,22}^{-1} (y_{n+1} - H_{n+1,*1}\hat{x}_1). \tag{5}$$

式中

$$\overline{H}_i = H_{i,*1} - H_{i,*2}H_{n+1,22}^{-1}H_{n+1,*1},\quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

定理 2 为信息奇异融合估计算法, 即含有等式约束信息的融合估计算法

3　基于信息融合估计理论的最优控制

3.1　问题描述

考虑如下动力学系统:

$$x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + B_2d(k). \tag{6}$$

式中: $x(k) \in R^{n\times 1}$ 为状态量; $u(k) \in R^{m_1\times 1}$ 为控制量; $d(k) \in R^{m_2\times 1}$ 为已知量; A, B_1, B_2 为已知的维数适当的矩阵; $x(0) = x_0$.

问题是求最优控制序列 $\{u(k)\}$, 使二次性能指标

$$J = \sum_{k=1}^{k_f} \| x(k) - x^*(k) \|_{M(k)}^2 + \sum_{k=0}^{k_f-1} \| u(k) - u^*(k) \|_{N(k)}^2 \tag{7}$$

为最小 其中: k_f 为终端时刻; $x^*(k)$ 为期望轨道; $u^*(k)$ 为理想控制策略; $M(k)$ 和 $N(k)$ 为对称正定阵

3.2　最优控制序列的集中解法

最优控制序列的集中解法属于信息融合估计的集中方式

首先, 从式(7) 可看出, $M(k)$ 和 $N(k)$ 实际上就是 $x^*(k)$ 和 $u^*(k)$ 关于自身的信息量 因此, 可将式(7) 转化为如下信息融合估计的统一模型:

$$x^*(k) = x(k) + m(k),\quad k = 1, 2, \cdots, k_f, \tag{8}$$

$$u^*(k) = u(k) + n(k),\quad k = 0, 1, 2, \cdots, k_f - 1. \tag{9}$$

式中: $x(k)$ 和 $u(k)$ 为被估计量, $x^*(k)$ 和 $u^*(k)$ 为观测数据, $m(k)$ 和 $n(k)$ 为观测误差, 且 $E[m(k)] = 0$, $\mathrm{var}[m(k)] = M^{-1}(k)$, $E[n(k)] = 0$, $\mathrm{var}[n(k)] = N^{-1}(k)$.

令

$$\overline{x^*} = \begin{bmatrix} x^*(1) \\ x^*(2) \\ \vdots \\ x^*(k_f) \end{bmatrix},\quad \overline{x} = \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(k_f) \end{bmatrix},\quad \overline{m} = \begin{bmatrix} m(1) \\ m(2) \\ \vdots \\ m(k_f) \end{bmatrix},$$

$$\overline{u^*} = \begin{bmatrix} u^*(0) \\ u^*(1) \\ \vdots \\ u^*(k_f-1) \end{bmatrix},\quad \overline{u} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(k_f-1) \end{bmatrix},$$

$$\overline{n} = \begin{bmatrix} n(0) \\ n(1) \\ \vdots \\ n(k_f-1) \end{bmatrix},$$

则可将式(8) 和(9) 写成集中形式

$$\overline{x^*} = \overline{x} + \overline{m}, \tag{10}$$

$$\overline{u^*} = \overline{u} + \overline{n}. \tag{11}$$

式中

$$\mathrm{var}[\overline{m}] = \overline{M}^{-1} = \{\mathrm{diag}[M(1), M(2), \cdots, M(k_f)]\}^{-1},$$

$$\mathrm{var}[\overline{n}] = \overline{N}^{-1} = \{\mathrm{diag}[N(0), N(1), \cdots, N(k_f-1)]\}^{-1}.$$

而式(6) 属于等式约束信息, 经过简单变换后, 有

$$\overline{x} = H_u\overline{u} + H_d\overline{d}. \tag{12}$$

式中

$$H_u = \begin{bmatrix} B_1 & & & & 0 \\ AB_1 & B_1 & & & \\ A^2B_1 & AB_1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ A^{k_f-1}B_1 & A^{k_f-2}B_1 & \cdots & AB_1 & B_1 \end{bmatrix},$$

$$H_d = \begin{bmatrix} B_2 & & & & 0 \\ AB_2 & B_2 & & & \\ A^2B_2 & AB_2 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ A^{k_f-1}B_2 & A^{k_f-2}B_2 & \cdots & AB_2 & B_2 \end{bmatrix},$$

$$\overline{d} = \begin{bmatrix} d(0) \\ d(1) \\ \vdots \\ d(k_f-1) \end{bmatrix}.$$

将式(12) 代入式(10) 后, 可得如下关于被估计量 $\overline{u}$ 的一个观测信息:

$$\overline{x^*} - H_d\bar{d} = H_u\bar{u} + \bar{m}. \tag{13}$$

考虑式(11) 和式(13), 根据定理 1, 可得关于 $\bar{u}$ 的最优估计为

$$\hat{\bar{u}} = (\bar{N} + H_u^T\bar{M}H_u)^{-1}[\bar{N}\,\overline{u^*} + H_u^T\bar{M}(\overline{x^*} - H_d\bar{d})]. \tag{14}$$

3.3 最优控制序列的序贯解法

最优控制序列的序贯解法属于信息融合估计的序贯方式.

关于被估计量 $x(k+1)$ 的所有信息, 包括 3 部分, 即:

1) $u^*(i), i = k+1, k+2, \cdots, k_f - 1$;

2) $x^*(i), i = k+1, k+2, \cdots, k_f$;

3) $x(i+1) = Ax(i) + B_1u(i) + B_2d(i)$,
$i = k+1, k+2, \cdots, k_f - 1$.

若已求得 $x(k+1)$ 的最优估计 $\hat{x}(k+1)$ 及其信息量 $P(k+1)$, 则关于被估计量 $x(k)$ 的所有信息如下:

1) $\hat{x}(k+1) =$
$Ax(k) + B_1u(k) + B_2d(k) + p(k+1)$;

2) $u^*(k) = u(k) + n(k)$;

3) $x^*(k) = x(k) + m(k)$.

根据定理 1, 融合上述 3 个信息, 可求得关于 $x(k)$ 的信息量 $P(k)$ 及其最优估计 $\hat{x}(k)$ 分别为

$$P(k) = M(k) + A^T[P^{-1}(k+1) + B_1N^{-1}(k)B_1^T]^{-1}A, \tag{15}$$

$$\hat{x}(k) = P^{-1}(k)\{M(k)x^*(k) + A^T[P^{-1}(k+1) + B_1N^{-1}(k)B_1^T]^{-1}[\hat{x}(k+1) - B_1u^*(k) - B_2d(k)]\}. \tag{16}$$

同理, 关于被估计量 $u(k)$ 的所有信息, 也包括 3 部分, 即:

1) $u^*(i), i = k, k+1, \cdots, k_f - 1$;

2) $x^*(i), i = k+1, k+2, \cdots, k_f$;

3) $x(i+1) = Ax(i) + B_1u(i) + B_2d(i)$,
$i = k, k+1, \cdots, k_f - 1$, 且 $x(k)$ 已知.

若已求得 $x(k+1)$ 的最优估计 $\hat{x}(k+1)$ 及其信息量 $P(k+1)$, 则关于被估计量 $u(k)$ 的所有信息如下:

1) $\hat{x}(k+1) = x(k+1) + p(k+1)$,
$E[p(k+1)] = 0$,
$\mathrm{var}[p(k+1)] = P^{-1}(k+1)$;

2) $u^*(k) = u(k) + n(k)$;

3) $x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + B_2d(k)$, $x(k)$ 已知.

根据定理 2, 融合上述 3 个信息, 可得被估计量 $u(k)$ 的最优估计为

$$\hat{u}(k) = [N(k) + B_1^TP(k+1)B_1]^{-1}[N(k)u^*(k) + B_1^TP(k+1)(\hat{x}(k+1) - Ax(k) - B_2d(k))]. \tag{17}$$

综合考虑式(15)～(17), 便可实现最优控制序列的序贯求解. 理论推导和仿真计算都表明, 最优控制序列的序贯算法和集中算法完全等效. 但是, 由于集中算法属于开环控制, 而序贯算法属于闭环控制, 因此, 当系统含有未知干扰时, 不能采用集中算法.

4 应用举例

文献[2]给出了一个宏观经济的计量模型, 即

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.014 & 0.002 \\ 0.093 & 0.753 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.004 \\ -0.100 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} -1.312 \\ 0.448 \end{bmatrix},$$

式中: $x(k) = \begin{bmatrix} C(k) \\ I(k) \end{bmatrix}$, $C(k)$ 为第 k 期的消费, $I(k)$ 为第 k 期的投资; $u(k)$ 为第 k 期的政府支出.

如果已知 $C(0) = 460.1$, $I(0) = 113.1$, $u(0) = 153.6$, 并且要求他们均按 0.75% 的速度增长, 则期望轨道和理想控制策略分别为

$$C^*(k) = 1.0075^kC(0),$$
$$I^*(k) = 1.0075^kI(0),$$
$$u^*(k) = 1.0075^ku(0).$$

该经济系统的控制目标是使 $x(k)$ 尽可能接近 $x^*(k) = \begin{bmatrix} C^*(k) \\ I^*(k) \end{bmatrix}$, $u(k)$ 尽可能接近 $u^*(k)$. 当考虑终端时刻 $k_f = 7$ 时, 性能指标函数取为

$$J(u) = \|x(7) - x^*(7)\|^2_{\begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}} + \sum_{k=1}^{6}\{\|x(k) - x^*(k)\|^2 + \|u(k) - u^*(k)\|^2\}.$$

对上述宏观经济控制问题, 文献[2]采用最优跟踪算法所得到的最优控制序列为 156.4, 156.8, 157.2, 157.4, 157.2, 156.7; 最优消费轨道序列为 464.8, 469.6, 474.5, 479.4, 484.4, 489.5, 494.6; 最优投资轨道序列为 112.8, 112.9, 113.4, 114.2, 115.3, 116.7, 118.3; 性能指标函数取值为 $J = 988.1$.

采用文献[3～5]的算法所得到的最优控制序列为 152.9, 152.2, 151.6, 151.0, 150.2, 149.1; 最优消费轨道序列为 456.0, 460.7, 465.4, 470.3, 475.2, 480.1, 485.2; 最优投资轨道序列为 119.8, 117.8, 116.7, 116.5, 116.8, 117.6, 118.7; 性能指标函数取值为 $J = 452.2$

采用本文给出的算法所得到的最优控制序列为 153.6, 153.7, 153.8, 153.8, 153.5, 152.8; 最优消费轨道序列为 456.1, 460.8, 465.6, 470.4, 475.3, 480.2, 485.3; 最优投资轨道序列为 122.8, 120.0, 118.3, 117.4, 117.2, 117.6, 118.4; 性能指标函数取值为 $J = 338.7$.

文献[2] 采用的最优跟踪算法没有利用期望轨道信息的未来全部信息, 仅利用了期望轨道信息的未来一步信息, 且没有利用理想控制策略信息; 文献[3～5] 的算法利用了期望轨道信息的未来全部信息, 但也没利用理想控制策略信息; 本文算法利用了系统提供的全部信息. 从上述比较可以看出, 在求最优控制策略时, 所利用的信息越多, 性能指标函数取值越低, 控制策略越好. 因此, 文献[2] 采用的算法性能指标值最高, [3～5] 的算法性能指标值次之, 本文算法性能指标值最低.

5 结 语

本文研究了含理想控制策略和期望轨道的二次型最优控制问题. 通过把二次性能指标等效为关于控制的观测信息, 从信息融合估计的角度, 使原问题转化为求控制量的“最优估计”问题. 通过一个宏观经济系统控制的例子, 计算结果表明, 本文算法所得二次性能指标值低于现有算法, 现有算法不能实现式(7) 所示的性能指标意义下的最优.

参考文献(References)

[1] Pindyck R S. Optimal Economic Stabilization Policies under Decentralized Control and Conflicting Objectives [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1977, 22(4): 517-529.

[2] 王翼. *经济系统的分析预测与控制*[M]. 北京: 中国城市出版社, 2001: 191-194.
(Wang Y. *Analysis, Prediction and Control of Economic System* [M]. Beijing: Chinese Municipality Press, 2001: 191-194.)

[3] 于欣, 廖福成, 史明坤. 利用虚拟目标值的预见控制设计[J]. *应用基础与工程科学学报*, 1998, 6(3): 319-326.
(Yu X, Liao F C, Shi M K. Preview Control with Imaginary Input [J]. *J of Basic Science and Engineering*, 1998, 6(3): 319-326.)

[4] 谭跃刚, 刘峰, 周祖德. 基于协调误差的目标轨迹预见跟踪控制的研究[J]. *中国机械工程*, 2003, 14(15): 1265-1268.
(Tan Y G, Liu F, Zhou Z D. Study Preview Tracking Control of Object Trajectory Based on Harmony Error [J]. *Chinese Mechanical Engineering*, 2003, 14(15): 1265-1268.)

[5] Halpern M E. Preview Tracking for Discrete-time SISO Systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(3): 589-592.

[6] 周军, 王志胜, 周凤岐. 基于线性均方估计的数据融合理论[J]. *宇航学报*, 2003, 24(4): 364-367.
(Zhou J, Wang Z S, Zhou F Q. Data Fusion Theory Based on Linear Least Square[J]. *J of Astronautics*, 2003, 24(4): 364-367.)

[7] 王志胜. *信息融合控制理论和方法*[R]. 南京: 南京航空航天大学, 2004: 43-44.
(Wang Z S. *Information Fusion Control Theory and Method* [R]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2004: 43-44.)

(上接第 99 页)

[4] 刘红军, 韩璞, 王东风, 等. 灰色预测模糊 PID 控制在气温控制系统中的应用[J]. *系统仿真学报*, 2004, 16(8): 1839-1848.
(Liu H J, Han P, Wang D F, et al. Fuzzy PID Control with Grey Prediction and Its Application in Temperature Control System [J]. *J of System Simulation*, 2004, 16(8): 1839-1848.)

[5] 孙增圻, 张再兴, 邓志东. *智能控制理论与技术*[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997: 45-57.
(Sun Z Q, Zhang Z X, Deng Z D. *Intelligent Control Theory and Technology* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997: 45-57.)

[6] 易继锴, 侯媛彬. *智能控制技术*[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1999: 194-199.
(Yi J K, Hong Y B. *Intelligent Control Technology* [M]. Beijing: Beijing University of Technology Press, 1999: 194-199.)

[7] Kenya Fukushima. Looper Optimal Multivariable Control for Hot Strip Finishing Mill [J]. *Trans on ISIJ*, 1988, 28(2): 463-469.