

文章编号: 1001-0920(2006)01-0104-03

一类欠驱动机械系统的非线性控制

高丙团, 陈宏钧, 张晓华

(哈尔滨工业大学 电气工程系, 哈尔滨 150001)

摘要: 针对一类欠驱动机械系统, 分析了其数学模型, 提出了一种基于部分反馈线性化的非线性控制方案。该方案利用精确线性化的方法将欠驱动系统直接激励部分线性化, 将被动部分作为系统的内部动态考虑; 并选择直接激励的自由度作为系统输出, 进行系统的轨迹跟踪控制; 通过分析系统的内部动态, 证明了零动态的稳定性能保证控制系统的稳定性。最后通过对吊车的负载防摆控制的研究, 验证了该方案的可行性。

关键词: 非线性控制; 欠驱动机械系统; 部分反馈线性化; 跟踪控制; 吊车防摆

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Nonlinear Control for a Class of Underactuated Mechanical Systems

GAO Bing-tuan, CHEN Hong-jun, ZHANG Xiao-hua

(Department of Electrical Engineer, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: GAO Bing-tuan, E-mail: gaopu1089@hit.edu.cn)

Abstract: A mathematical model of a class of underactuated mechanical systems is analyzed and a nonlinear control scheme based on partial feedback linearization is presented. In the underactuated mechanical system, the dynamics corresponding to the active degrees of freedom are linearized based on the exact linearization design technique, while the dynamics corresponding to the passive degrees are taken as the internal dynamics of the system. The trajectory tracking control of the linearized system is studied by choosing the active degrees as the system outputs. The analysis of the system internal dynamics shows that the stability of the zero dynamics guarantees the stability of the control system. Finally, simulation is done for the anti-swing control of an overhead crane system.

Key words: Nonlinear control; Underactuated mechanical systems; Partial feedback linearization; Tracking control; Anti-swing of overhead crane

1 引言

欠驱动机械系统拥有比系统自由度少的驱动器,它需要通过较少的驱动器完成复杂的运动控制任务;多数情况下欠驱动机械系统为非完整约束系统,同时又表现出一般光滑状态反馈控制无法镇定的性质。欠驱动系统控制的难点在于:直接激励部分的自由度和欠驱动部分的自由度相互间是非线性耦合的,设计的控制器必需同时能够对系统所有的自由度具有较好的控制性能。

近年来,由于欠驱动机械系统的广泛应用,其控制方法也得到了深入的研究。对于欠驱动机械系统

的研究已经有“倒立摆的控制”^[1,2]、“吊车的控制”^[3,4]、“平面操纵机器人的控制”^[5]等;同时欠驱动机械系统的稳定性问题也逐步受到了大家的重视,对于部分特定的欠驱动机械系统的稳定性,已有证明^[2]。但是大部分学者只是基于自己的兴趣,针对一些具体的应用进行研究,对于具有普遍意义的控制系统的稳定性没有给出相应的证明。

本文考虑一类欠驱动机械系统,针对欠驱动系统激励不足的特征,利用部分反馈线性化的方法设计系统的非线性控制方案。通过选择直接激励的自由度作为系统输出,给出了基于轨迹跟踪控制的一

收稿日期: 2004-12-01; 修回日期: 2005-03-03

作者简介: 高丙团(1981—),男,江苏淮安人,博士生,从事非线性控制与机器人控制的研究; 张晓华(1961—),男,哈尔滨人,教授,博士生导师,从事智能机器人与运动控制、机器视觉与自主控制等研究。

类欠驱动系统的标准形式, 基于对该标准型内部动态进行的分析, 证明了在保证零动态稳定的情况下, 控制系统是稳定的. 最后通过一个实例(吊车负载防摆控制问题)验证了本方案的可行性.

2 系统建模

对于空间规范流形 Q , 定义 $(q, \dot{q}) = (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ 为映射空间 $M = TQ$ 的向量束, q, \dot{q} 和 \ddot{q} 分别表示坐标及其速度和加速度形式. 系统由 m 维($m < n, m \geq 1$)独立控制量驱动, 即系统的控制输入维数少于系统维数, 用 $u \in R^m$ 表示系统的输入变量. 将系统的维数 $q = (q_1, \dots, q_n)$ 分解为 $q = (q_1, q_2)$, 其中 $q_1 \in R^m, q_2 \in R^{n-m}$; 不失一般性的假设系统驱动部分由 q_1 表示, 欠驱动部分由 q_2 表示, 则基于Lagrange方程建立的系统模型为^[6]

$$M_{11}(q)\ddot{q}_1 + M_{12}(q)\ddot{q}_2 + F_1(q, \dot{q}) = B(q)u, \quad (1)$$

$$M_{21}(q)\ddot{q}_1 + M_{22}(q)\ddot{q}_2 + F_2(q, \dot{q}) = 0 \quad (2)$$

其中: $B(q) \in R^{m \times m}$ 对于所有 $q \in Q$ 可逆; $F_1(q, \dot{q}) \in R^m, F_2(q, \dot{q}) \in R^{n-m}$; $M_{ij}(q), i, j = 1, 2$ 组成 $n \times n$ 的惯性矩阵, 惯性矩阵对所有 $q \in Q$ 都是正实对称的.

式(1)和式(2)表征了一类欠驱动机械系统的动力学模型.

3 控制方案

下面对系统(1)和(2)使用“部分反馈线性化”的方法进行处理, 同时选择系统输出为 $y = q_1 \in R^m$, 这样系统的输出就与激励部分直接相关; 而将未被线性化的部分作为系统的内部动态进行考虑.

3.1 部分反馈线性化

根据式(2)可解得

$$\ddot{q}_2 = -M_{22}^{-1}(q)[M_{21}(q)\ddot{q}_1 + F_2(q, \dot{q})] \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)可得

$$\bar{M}(q)\ddot{q}_1 + \bar{F}(q, \dot{q}) = B(q)u, \quad (4)$$

其中

$$\bar{M}(q) = M_{11}(q) - M_{12}(q)M_{22}^{-1}(q)M_{21}(q),$$

$$\bar{F}(q, \dot{q}) = F_1(q, \dot{q}) - M_{12}(q)M_{22}^{-1}(q)F_2(q, \dot{q}).$$

应用部分反馈线性化控制方法, 即取

$$u = B^{-1}(q)[\bar{M}(q)v + \bar{F}(q, \dot{q})],$$

其中 $v \in R^m$ 为新的控制输入, 则式(1)和式(2)可重写为

$$\ddot{q}_1 = v, \quad (5)$$

$$\ddot{q}_2 = J(q)\ddot{q}_1 + R(q, \dot{q}), \quad (6)$$

$$y = q_1. \quad (7)$$

其中

$$J(q) = -M_{22}^{-1}(q)M_{21}(q),$$

$$R(q, \dot{q}) = -M_{22}^{-1}(q)F_2(q, \dot{q}).$$

方程(5)和(6)具有表征欠驱动机械系统特征的三角形式或级联形式.

可以看出: v 到 y 为二次线性化了的输入输出; 整个系统具有 m 维的相对阶向量 $(2, \dots, 2)^T$, 方程(6)表征了系统的内部动态.

3.2 轨迹跟踪控制

如果用 $y^d = q_1^d(t)$ 表征系统的期望轨迹, 这样可选择轨迹控制量

$$v = \ddot{q}_1^d + k_d(\dot{q}_1^d - \dot{q}_1) + k_p(q_1^d - q_1), \quad (8)$$

其中 k_d 和 k_p 为表征系统增益的正的 m 维对角矩阵. 选择状态变量

$$\begin{aligned} z_1 &= q_1 - q_1^d, z_2 = \dot{q}_1 - \dot{q}_1^d, \\ \eta &= q_2, \eta_k = \dot{q}_2, \end{aligned} \quad (9)$$

同时选择输出误差

$$\bar{y} = y - y^d, \quad (10)$$

则整个闭环系统可以写成

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \dot{z}_2 = -k_p z_1 - k_d z_2, \dot{\eta} = \eta_k, \\ \dot{\eta}_k &= J(q)(\ddot{q}_1^d - k_p z_1 - k_d z_2) + R(q, \dot{q}), \\ \bar{y} &= z_1. \end{aligned} \quad (11)$$

写成矩阵形式为

$$\dot{z} = Az, \quad (12)$$

$$\dot{\eta} = \omega(z, \eta), \quad (13)$$

$$\bar{y} = Cz. \quad (14)$$

其中: $z^T = (z_1^T, z_2^T)$, $\eta^T = (\eta^T, \eta_k^T)$, 矩阵 A 和矩阵 C 及 $\omega(z, \eta)$ 分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{m \times m} \\ -k_p & -k_d \end{bmatrix}; C = [I_{m \times m} \quad 0];$$

$$\omega(z, \eta) = \begin{bmatrix} \eta_k \\ J(q)(\ddot{q}_1^d - k_p z_1 - k_d z_2) + R(q, \dot{q}) \end{bmatrix}.$$

3.3 控制系统稳定性证明

观察系统(12)~(14), 状态空间中 $z = 0$ 面为系统定义了一个可积流形. 由正增益 k_d 和 k_p 组成的矩阵 A 是Hurwitz的, 该流形的动态特性为

$$\dot{\eta} = \omega(0, \eta), \quad (15)$$

同时(15)也定义了系统的零动态.

引理1^[7] 对于系统

$$\dot{z} = f(z, y), \quad \dot{y} = Ay + p(z, y), \quad (16)$$

并假定所有接近0的 z 有 $p(z, 0) = 0$ 且

$$\frac{\partial p}{\partial y}(0, 0) = 0 \quad (17)$$

如果 $\dot{z} = f(z, 0)$ 在零点 $z = 0$ 处渐近稳定, 且 A 是Hurwitz的, 则系统(16)渐近稳定于零点 $(z, y) = (0, 0)$.

定理1 对于系统(12)~(14), 当时间 $t \rightarrow 0$ 时, 零动态 $\dot{\eta} = \omega(0, \eta)$ 渐近稳定于 $\eta = 0$, 且矩阵 A 是Hurwitz的, 则反馈控制算法使得系统(12)~

(14) 渐近稳定于 $(z, \eta) = (0, 0)$.

证明 可直接应用引理 1, 因为子系统 $\dot{\eta} = \omega(0, \eta)$ 在平衡点 $\eta = 0$ 是渐近稳定的, 同时注意到系统(12), (13) 与系统(16) 具有相同的形式, 故定理成立

该定理主要指出了整个系统的稳定性可以通过分析(12) 和(13) 两个系统得到, 即系统(13) 的稳定性保证系统(12) 的稳定性, 这样控制系统的稳定性就得到了保证

4 应用实例

下面通过吊车这一实际的欠驱动机械系统的“负载防摆控制问题”来验证上述控制算法 根据文献[3], 二维吊车系统的动力学模型表示为

$$\begin{aligned}
 m_{11}(q)\ddot{q}_1 + m_{12}(q)\ddot{q}_2 + f_1(q, \dot{q}) &= b(q)u, \\
 m_{21}(q)\ddot{q}_1 + m_{22}(q)\ddot{q}_2 + f_2(q, \dot{q}) &= 0, \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中参数的表达式及具体意义参见文献[3]

系统(18) 通过部分反馈线性化可得

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= v_x, \quad \ddot{l} = v_l, \\
 \ddot{\theta} &= -g \sin \theta / l - 2\dot{\theta} \dot{l} / l + \cos \theta v_x / l \quad (19)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 v_x &= (u_x + u_l \sin \theta) / M, \\
 v_l &= g \cos \theta + l \ddot{\theta} + \sin \theta u_x / M + \\
 &\quad (M + m \sin^2 \theta) u_l / (M m).
 \end{aligned}$$

为跟踪给定的目标轨迹, 取

$$v_x = \ddot{x}^d + k_{d_x}(x^d - x) + k_{p_x}(x^d - x), \quad (20)$$

$$v_l = \ddot{l}^d + k_{d_l}(\dot{l}^d - \dot{l}) + k_{p_l}(l^d - l). \quad (21)$$

选择 $\tilde{x} = (x - x^d)$ 和 $\tilde{l} = (l - l^d)$, 则可得到闭环系统

$$\ddot{\tilde{x}} + k_{d_x} \dot{\tilde{x}} + k_{p_x} \tilde{x} = 0, \quad (22)$$

$$\ddot{\tilde{l}} + k_{d_l} \dot{\tilde{l}} + k_{p_l} \tilde{l} = 0 \quad (23)$$

显然, 闭环系统(22), (23) 的性能由参数 $k_{d_x}, k_{p_x}, k_{d_l}$ 和 k_{p_l} 决定

对于系统的内部动态(19), 为了保证零动态稳定, 可将 v_x 修改成如下形式^[8]:

$$v_x = \ddot{x}^d + k_{d_x}(x^d - x) + k_{p_x}(x^d - x) + k\dot{\theta} \quad (24)$$

这样系统的零动态为

$$\ddot{\theta} - k \cos \theta \dot{\theta} / l + g \sin \theta / l = 0 \quad (25)$$

由于吊车运行过程中 $\cos \theta$ 始终为正, 所以只需

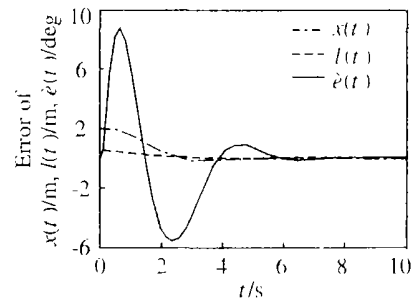
$$k < -2|\dot{\theta}| < 0 \quad (26)$$

即可保证系统的零动态的稳定, 从而保证了“负载摆角”始终保持衰减状态

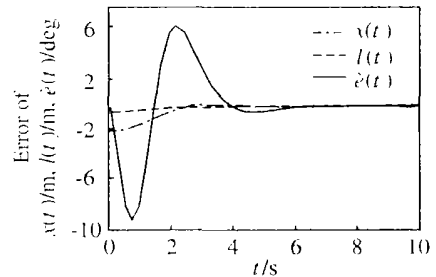
仿真实验中, 取小车质量 $M = 25$ kg, 负载质量

$m = 5$ kg, $[k_{d_x}, k_{p_x}, k_{d_l}, k_{p_l}] = [1.414, 1, 1.414, 1], k = 2$ 模拟负载在高处的某个地方和低处某个地方来回吊运过程, 吊运开始前小车和负载都处于静止状态

仿真实验的结果如图 1 所示, 其纵轴为误差曲线, 1(a) 中“ $x(0 \rightarrow 2), l(0.5 \rightarrow 1)$ ”表示吊车将负载从初始位置为 0 m, 初始摆长为 0.5 m 处吊往低处的位置为 2m, 摆长为 1m 处; 1(b) 中“ $x(2 \rightarrow 0), l(1 \rightarrow 0.5)$ ”则给出了将负载从低处吊回原处的仿真曲线 由仿真结果可以看出在负载来回吊运的过程中吊车系统在 7 s 左右同时实现了小车位置和摆长的跟踪任务, 负载的摆动也得到了消除, 这证明本文提出的控制方案是切实可行的



(a) $x(0 \rightarrow 2), l(0.5 \rightarrow 1)$



(b) $x(2 \rightarrow 0), l(1 \rightarrow 0.5)$

图 1 系统轨迹跟踪的误差曲线

5 结 语

本文针对一类欠驱动机械系统的动力学模型, 提出了一种部分反馈线性化的非线性控制规律, 该控制规律能够使欠驱动机械系统直接激励部分的自由度实现精确跟踪; 同时, 给出了控制系统稳定性的证明 针对吊车这一欠驱动机械系统的“负载防摆控制问题”, 仿真实验结果表明: 所提出的控制规律具有一定的实践指导意义和理论参考价值

参考文献(References)

[1] Chatterjee D, Patra A, Joglekar H. Swing-up and Stabilization of a Cart-pendulum System Under Restricted Cart Track Length [J]. *System and Control Letters*, 2002, 47(4): 355-364

(下转第 110 页)

p) 可得 $f(ID_i)G_1$, 从而用 Lagrange 插值公式恢复出密钥, 才能计算出票数. 而求解 $f(ID_i)G_1$ 时需用到参与者的私钥 k_i , 用公钥 $X_i = k_i G_1$ 计算 k_i 是求解椭圆曲线上离散对数难解问题, 是困难的.

4) 隐私性 验证者认证投票者的投票有效, 使用的是非交互公开可认证的零知识证明协议 ECDEQ (G_1, U, G_2, Q) , 认证时没泄露出 v 的任何信息. 投票者既可让人认证自己投入了有效的选票, 又不必泄露自己投了谁的票, 保护了隐私.

5) 不可重复性 用了投票者的公开身份识别号作为 x 值, 可进行认证以防止投票者重复投票.

6) 不可抵赖性 投票者和计票者都不可否认自己的身份, 只有他们自己才有私钥能算出碎片及密钥.

7) 重复使用性 此策略参与者 A_i 不需要知道 $f(ID_i)$ 的值, 只要知道相关的 $S_i = f(ID_i)G_1$ 便可重新恢复出密钥 sG_1 , 而 s 并没有泄露, 同时参与者 A_i 也不要公开他的私钥 k_i . 所以密钥 s 和参与者的私钥可以同时用在几个不同的选举中, 有利于密钥的复制和更新.

8) 此策略进行的解密、加密、认证都是椭圆曲线上的加减法运算, 运算速度快. 计票者的密钥位数短, 存储量小. 长度为 160 bit 的素数 p 即可 (相当于大数分解 RSA 中长度为 1024 bit 素数的难度). 因而此策略速度快、安全性能高、方便简洁.

4 结 语

本文基于椭圆曲线上难解问题, 构造出了一个新的非交互可公开认证的电子选举策略, 该策略的一个特点就是任何人皆可认证所有投票者所投出的选票是否为正确 (选票是否有效但无法得知其所投的内容为何), 任何人皆可认证计票是否公正 (只有

合法的选票才会被加入到最后的总票数内, 且一定会被加入). 也解决了计票人权力过于集中的问题, 还能对计票人的身份和数据进行公开认证, 防止了计票人的欺诈行为. 另外, 在投票中随时认证将非法选票去除, 降低了存储量. 该方案适用于重要的、小型的电子选举, 有一定的实用价值.

参考文献 (References)

- [1] Benaloh J, Tuinstra D. Receipt-free Secret-ballot Elections [A]. *Proc of the Twenty-sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing* [C]. Montreal, Quebec, 1994: 544-553.
- [2] Jan J K, Chen Y Y, Lin Y. The Design of Protocol for e-Voting on the Internet [A]. *Proc of IEEE 35th International Carnahan Conference on Security Technology* [C]. London, 2001: 180-189.
- [3] Ku W C, Wang S D. A Secure and Practical Electronic Voting Scheme [J]. *Computer Communications*, 1999, 22(3): 279-286.
- [4] Pedersen T P. Non-interactive and Information-theoretic Secure Verifiable Secret Sharing [A]. *Lecture Notes in Computer Science* [C]. Berlin: Springer-Verlag, 1992, 576: 129-140.
- [5] Chaum D, Pedersen T P. Wallet Databases with Observers [A]. *Lecture Notes in Computer Science* [C]. Berlin, 1993: 740: 89-105.
- [6] Blum M, De Santis A, Micali S, et al. Non-interactive Zero-knowledge Proof Systems [J]. *SIAM J on Computing*, 1991, 20(6): 1084-1118.
- [7] Benaloh J, Yung M. Distributing the Power of a Government to Enhance the Privacy of Voters [A]. *Proc of 5th ACM Symposium on Principles of Distributed Computing* [C]. New York, 1986: 52-62.

(上接第106页)

- [2] Mullahaupt P, Srinivasan B, Bonvin D. Analysis of Exclusively Kinetic Two-link Underactuated Mechanical Systems [J]. *Automatica*, 2002, 38(3): 1565-1573.
- [3] Ho-Hoon Lee. Modeling and Control of a Three-dimensional Overhead Crane [J]. *J of Dynamic Systems Measurement and Control*, 1998, 120(4): 471-476.
- [4] Fang Y, Dixon W E, Dawson D M, et al. Nonlinear Coupling Control Laws for an Underactuated Overhead Crane System [J]. *IEEE / ASME Transactions on Mechatronics*, 2003, 8(3): 418-423.
- [5] Yabuno H, Goto K, Aoshima N. Swing-up and

Stabilization of an Underactuated Manipulator Without State Feedback of Free Joint [J]. *IEEE Transactions on Automatic and Control*, 2004, 20(2): 359-365.

- [6] Reyhanoglu M, Van Der Schaft A, McClamroch N H, et al. Dynamics and Control of a Class of Underactuated Mechanical Systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic and Control*, 1999, 44(9): 1663-1671.
- [7] Isidori A. *Nonlinear Control Systems* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [8] Vikramaditya B, Rajamani R. Nonlinear Control of a Trolley Crane system [A]. *Proc of the American Control Conference* [C]. Chicago, 2000: 1032-1036.