第21卷 第1期 控 制 与 决 策 2006年1月
Vol 21 No. 1 Control and Decision Jan. 2006

文章编号: 1001-0920(2006)01-0118-03

# 一类非光滑优化及其在控制系统稳定化中的应用

高 岩
(上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

**摘 要**: 研究一类来自控制系统稳定化中的非光滑优化问题. 考虑Lyapunov函数是非光滑的, 特别是有限个光滑函数的极大值函数. 建立了相应的非光滑优化模型, 进一步导出了这类非光滑优化的KKT系统, 然后基于非线性互补函数将此KKT系统转化成一个非光滑方程组, 最后分别用广义牛顿法和光滑化牛顿法求解此非光滑方程组, 使得此类稳定化设计可以具体实现.

**关键词**: 非光滑优化; 非光滑方程组; 稳定化; Lyapunov函数; 牛顿法
**中图分类号**: O231.2; TD350 **文献标识码**: A

# A Class of Nonsmooth Optimizations and Its Applications to Stabilization for Control Systems

*GAO Yan*
(School of Management, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China. E-mail: gaoyan1962@yahoo.com.cn)

**Abstract**: A nonsmooth optimization problem, which arises from the stabilization for nonlinear control systems, is studied. Nonsmooth Lyapunov functions are obtained by maximizing finitely many smooth functions. First, a nonsmooth optimization model and its Karush-Kuhn-Tucker (KKT) system are proposed. Based on the nonlinear complementarity problem function, the KKT system is transformed into a system of nonsmooth equations. Finally, the generalized Newton method and the smoothing Newton method are applied to solving this system of nonsmooth equations.

**Key words**: Nonsmooth optimization; Nonsmooth equations; Stabilization; Lyapunov function; Newton method

## 1 引 言

考虑下面不确定控制系统:

$$x'(t) = f(x, u, d), \tag{1}$$

其中: $x \in R^n$ 为状态变量, $t \geq 0$ 为时间, $u$ 为控制, $d$ 为有界扰动, $f$ 为Lipschitz函数. 记 $x(t) = x(t, u(t), d(t))$ 为系统(1)的解. 给定Lyapunov函数 $V(x)$, 如果对于任意的 $\eta > 0$ 和 $T > 0$ 都有 $u$ 使得

$$V(x(t)) \leq e^{-at}V(0) + \eta, t \geq 0, \tag{2}$$

则称系统(1)是近似稳定的. 许多文献讨论Lyapunov函数为非光滑情况下的稳定化问题. 文献[1]证明了存在一个分段常数反馈 $u$ 使得式(2)成立, 最近这一结论又被推广到混杂系统[2,3]. 然而文献[1~3]仅证明了分段常数反馈的存在性, 如何计算反馈 $u$ 却没有研究. 本文试图研究相关的数值问题.

$R^n$ 上函数 $f(x)$ 的上图 $\mathrm{Epi}(f)$ 定义为 $\mathrm{Epi}(f) = \{(x, y) \in R^{n+1} | y \geq f(x)\}$. 文献[1~3]中稳定化的主要工作就是在每一时刻求一点 $(a, b)$ 到Lyapunov函数 $V(x)$ 上图 $\mathrm{Epi}(V)$ 的投影, 这里 $a \in R^n, b \in R$, 也就是要求解 $x^* \in R^n, y^* \in R$, 使得

$$d((a, b), \mathrm{Epi}(V)) = (\| x^* - a \|^2 + (y^* - b)^2)^{1/2},$$

这里 $(x^*, y^*) \in \mathrm{Epi}(V)$, $d(x, S)$ 表示点 $x$ 到集合 $S$ 的距离. 实际上, 此问题可以转化成一个非光滑优化. 本文就是试图解决这一类非光滑优化问题. 在实

**收稿日期**: 2004-11-30; **修回日期**: 2005-04-15.
**基金项目**: 教育部归国留学人员基金项目; 上海市教委重点项目(04EA01); 上海市重点学科建设项目(T0502).
**作者简介**: 高岩(1962—), 男, 黑龙江五常人, 教授, 博士生导师, 从事非光滑优化、混杂系统控制等研究.

际应用中, 通常涉及的非光滑Lyapunov函数是如下极大值函数:

$$V(x)=\max_{i\in I}V_i(x).\quad(3)$$

这里$I=\{1,2,\cdots,m\}$为有限标记集合,$V_i(x)$, $i\in I$为$R^n$上的二次连续可微函数. 本文讨论限于式(3)给出的Lyapunov函数, 计算一点到Epi($V$)的投影.

**例 1**　设[3]

$$f(x)=(1+|x|)u+d,\ V(x)=|x|,$$

Lyapunov函数$V(x)$为式(3)给出的形式, 事实上$V(x)$可表示为$V(x)=\max\{x,-x\}$, 这里$V_1(x)=x$,$V_2(x)=-x$均为二次连续可微函数.

## 2　非光滑优化模型和Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 系统

**引理 1**　设$f(x)$为$R^n$上的连续函数, $(a,b)\notin$ Epi($f$), 这里$a\in R^n$, $b\in R$, 如果$x^*\in R^n$是下述问题的解:

$$(\mathrm{P}_1)\quad \min z=\|x-a\|^2+(f(x)-b)^2,$$

那么

$$d((a,b),\mathrm{Epi}(f))=(\|x^*-a\|^2+(f(x^*)-b)^2)^{1/2}.$$

根据引理1, 点$(a,b)$到$V(x)$上图Epi($V$)的投影可通过求解如下问题来完成:

$$(\mathrm{P}_2)\quad \min G(x)=\|x-a\|^2+(\max_{i\in I}V_i(x)-b)^2.$$

显然, $(\mathrm{P}_2)$是一个非光滑优化问题.

设$F:R^n\to R^m$为局部Lipschitz函数,$D_F$表示$F$的可微点集合, $F(x)$的广义雅可比$\partial F(x)$定义为

$$\partial F(x)=\mathrm{co}\{\lim_{x_n\to x}JF(x_n)\mid x_n\to x,\ x_n\in D_F\},$$

这里"$J$"表示雅可比矩阵, 当$m=1$时, $\partial F(x)$称为广义梯度[4].

**引理 2**　假设$f(x)$为$R$上的连续可微函数, $g(x)$为$R^n$上的局部Lipschitz函数, 则有

$$\partial(f(g(x)))=f'(g(x))\partial g(x).\quad(4)$$

**证明**　由广义梯度的链式法则[4], $\partial(f(g(x)))\subset f'(g(x))\partial g(x)$. 因此, 为证明(4)只需证明反包含

$$\partial(f(g(x)))\supset f'(g(x))\partial g(x).\quad(5)$$

设$\eta\subset f'(g(x))\partial g(x)$, 那么存在$\zeta\subset\partial g(x)$使得$\eta=f'(g(x))\zeta$. 由广义梯度的定义可知, 存在$g(x)$的可微点$x_n$使得$\nabla g(x_n)\to\zeta$. 因此$\nabla(f(g(x_n)))=f'(g(x_n))\nabla g(x_n)\to\eta$, 于是$\eta\in\partial(f(g(x)))$, 式(5)得证. □

**定理 1**　设$x$为问题$(\mathrm{P}_2)$的解, 那么存在标量$\lambda_i\geq 0$, $i\in I$, 且$\sum_{i\in I}\lambda_i=1$, 使得

$$x-a+(\max_{i\in I}V_i(x)-b)\sum_{i\in I}\lambda_i\nabla V_i(x)=0,\quad(6a)$$

$$\lambda_j(\max_{i\in I}V_i(x)-V_j(x))=0,\ j=1,2,\cdots,m.\quad(6b)$$

**证明**　定义指标集

$$I(x)=\{j\in I\mid V_j(x)=\max_{i\in I}V_i(x)\}.\quad(7)$$

由文献[4], $V(x)$的广义梯度为

$$\partial(V(x))=\mathrm{co}\{\nabla V_i(x)\mid i\in I(x)\}=\{\sum_{i\in I(x)}\lambda_i\nabla V_i(x)\mid\sum_{i\in I(x)}\lambda_i=1,\lambda_i\geq 0,i\in I(x)\}.\quad(8)$$

$x$是问题$(\mathrm{P}_2)$的最优解, 根据非光滑优化的最优性条件, $0\in\partial G(x)$[4]. 由引理2和式(8)得

$$\partial G(x)=2(x-a)+2(\max_{i\in I}V_i(x)-b)\sum_{i\in I(x)}\lambda_i\nabla V_i(x),$$

其中$\sum_{i\in I(x)}\lambda_i=1$, $\lambda_i\geq 0$, $i\in I(x)$.

于是

$$2(x-a)+2(\max_{i\in I}V_i(x)-b)\sum_{i\in I(x)}\lambda_i\nabla V_i(x)=0.\quad(9)$$

其中: $\lambda_i\geq 0$, $i\in I$, $\sum_{i\in I(x)}\lambda_i=1$. 令$\lambda_i=0$, $\forall i\in I\setminus I(x)$, 则由式(9)可得式(6), 定理得证. □

满足式(6)的点称为问题$(\mathrm{P}_2)$的KKT点. 在一定条件下, 式(6)也为问题$(\mathrm{P}_2)$的充分性条件. 根据定理1, 问题$(\mathrm{P}_2)$的KKT点为下述不等式系统的解:

$$\begin{cases}(x-a)+(\max_{i\in I}V_i(x)-b)\sum_{i\in I}\lambda_i\nabla V_i(x)=0,\\ \lambda_j(\max_{i\in I}V_i(x)-V_j(x))=0,\\ \quad j=1,2,\cdots,m,\\ \sum_{j\in I}\lambda_j=1,\\ \quad\lambda_j\geq 0,j=1,2,\cdots,m.\end{cases}\quad(10)$$

其中$x$和$\lambda_j$为变量.

## 3　非光滑方程组的牛顿法

本节讨论求解系统(10), 为此要将(10)转化为一个非光滑方程组. 非线性互问题(NCP)函数定义为

$$\phi(a,b)=a+b-\sqrt{a^2+b^2}.$$

其中: $a,b\in R$, $\phi(a,b)$有性质$\phi(a,b)=0\Leftrightarrow a\geq 0$, $b\geq 0$, $ab=0$[5].

**定理 2**　系统(10)与下述非光滑方程组等价:

$$\begin{cases}(x-a)+(\max_{i\in I}V_i(x)-b)\sum_{i\in I}\lambda_i\nabla V_i(x)=0,\\ \phi(\max_{i\in I}V_i(x)-V_j(x),\lambda_j)=0, j=1,2,\cdots,m,\\ \sum_{j\in I}\lambda_j=1.\end{cases} \tag{11}$$

**证明** 显然, $\max_{i\in I}V_i(x)-V_j(x)\geq 0, j\in I$, 于是, 下述两个系统等价:

$$\begin{cases}\lambda_j(\max_{i\in I}V_i(x)-V_j(x))=0,\\ \lambda_j\geq 0, j=1,2,\cdots,m;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_j(\max_{i\in I}V_i(x)-V_j(x))=0, \lambda_j\geq 0,\\ \max_{i\in I}V_i(x)-V_j(x)\geq 0, j=1,2,\cdots,m.\end{cases} \tag{12}$$

根据 $\phi(a,b)$ 的性质, 不等式(12) 与等式

$$\phi(\max_{i\in I}V_i(x)-V_j(x),\lambda_j)=0,$$
$$j=1,2,\cdots,m$$

等价. □

式(11) 是一个非光滑方程组. 近年来, 求解非光滑方程组的数值方法被广泛研究[6~8]. 目前主要有两种牛顿法, 一个是广义牛顿法, 另一个是光滑化牛顿法. 考虑下述非光滑方程组:

$$F(z)=0, \tag{13}$$

其中 $F: R^n\to R^n$ 是局部Lipschitz的. 求解非光滑方程组(13) 的广义牛顿法如下:

$$z^{k+1}=z^k-\zeta_k^{-1}F(z^k), \tag{14}$$

其中 $\zeta_k$ 为 $F(z)$ 在 $z^k$ 点广义雅可比中的一个元素[6~8]. 当 $F(z)$ 是半光滑的且广义雅可比中的所有元素在解点处都是非奇异的, 则广义牛顿法具有局部超线性收敛性质. 显然, 方程(11) 的函数是局部Lipschitz 和半光滑的[6], 广义牛顿法可以用来求解非光滑方程组(11). 当 $F(z)$ 是连续可微时, $\zeta_k$ 即为通常的雅可比, 此时广义牛顿法即为通常的牛顿法.

因广义牛顿法只能保证局部收敛性, 所以也可采用光滑化牛顿法或阻尼牛顿法求解非光滑方程组(11). 设 $F_\epsilon(z)$ 是连续可微的且满足 $F_\epsilon(z)\to F(z)$ $(\epsilon\to 0)$, 给定充分小的参数 $\epsilon\geq 0$, 在牛顿法或阻尼牛顿法中用 $F_\epsilon(z)$ 代替 $F(z)$, 即为光滑化牛顿法或光滑化阻尼牛顿法. 定义 $\phi$ 和 $V$ 的光滑化函数如下:

$$\phi_\epsilon(a,b)=a+b-\sqrt{a^2+b^2+\epsilon},$$

$$V_\epsilon(x)=\epsilon\ln\Big(\sum_{i=1}^m e^{V_i(x)/\epsilon}\Big),$$

其中 $\epsilon>0$. $\phi_\epsilon(a,b)$ 和 $V_\epsilon(x)$ 是连续可微的且满足 $\phi_\epsilon(a,b)\to\phi(a,b)$, $V_\epsilon(x)\to V(x)$, $\epsilon\to 0$. 在方程组(11) 中用 $\phi_{\epsilon_1}$ 和 $V_{\epsilon_2}$ 代替 $\phi$ 和 $V$, 得到

$$\begin{cases}(x-a)+\Big(\epsilon_2\ln\Big(\sum_{i\in I}e^{V_i(x)/\epsilon_2}\Big)-\\ \quad b\Big)\sum_{i\in I}\lambda_i\nabla V_i(x)=0,\\ \epsilon_2\ln\Big(\sum_{i=1}^m e^{V_i(x)/\epsilon_2}\Big)-V_j(x)+\lambda_i-\\ \sqrt{\Big(\epsilon_2\ln\Big(\sum_{i=1}^m e^{V_i(x)/\epsilon_2}\Big)-V_j(x)\Big)^2+\lambda_j^2+\epsilon_1}=0,\\ \quad j=1,\cdots,m.\end{cases} \tag{15}$$

方程组(15) 是连续可微的, 经典的牛顿法或阻尼牛顿法可以用来对它求解.

## 4 结 语

本文研究了Lyapunov 函数为非光滑极大值函数时, 稳定化设计中涉及的一类非光滑优化问题. 建立了该问题的非光滑优化模型, 并给出了求解方法. 这样使得此类稳定化设计可以具体实现.

## 参考文献(References)


[1] Quincampoix M, Seube N. Stabilization of Uncertain Control Systems Through Piecewise Constant Feedback [J]. *J Mathematics Analysis and Applications*, 1998, 218(1): 240-255.

[2] Gao Y, Lygeros J, Quincampoix M, et al. Approximate Stabilisation of Uncertain Hybrid Systems with Controllable Transitions [A]. *Proc 36th IEEE Conf on Control and Decision*[C]. Maui, Hawaii, 2003: 1675-1680.

[3] Gao Y, Lygeros J, Quincampoix M, et al. Approximate Control of Uncertain Hybrid Systems: Stabilisation and Controlled Invariance [J]. *Int J of Control*, 2004, 77(16): 1393-1407.

[4] Clarke F H, Leda Yu S, Stern R J, et al. *Nonsmooth Analysis and Control Theory* [M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

[5] Fisher M C. A Special Newton-type Optimization Method[J]. *Optimization*, 1992, 24(2): 269-284.

[6] Qi L, Sun J. A Nonsmooth Version of Newton's Method [J]. *Mathematical Programming*, 1993, 58 (2): 353-367.

[7] Qi L, Sun D. Smoothing Functions and a Smoothing Newton Method for Complementarity and Variational Inequality Problems [J]. *J Optimization Theory and Applications*, 2002, 113(1): 121-147.

[8] Gao Y. Newton Methods for Solving Nonsmooth Equations via a New Subdifferential[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2001, 54(2): 239-257.