第21卷 第1期 控 制 与 决 策 2006年1月
Vol 21 No. 1 Control and Decision Jan. 2006

文章编号: 1001-0920(2006)01-0024-04

一类切换线性广义系统的稳定性

尹玉娟[1], 刘玉忠[2], 赵 军[1]
(1. 东北大学 a. 教育部暨辽宁省流程工业综合自动化重点实验室, b. 信息与工程学院 沈阳 110004; 2. 沈阳师范大学 数学与系统科学学院, 沈阳 110034)

摘 要: 提出了一种新的切换系统即广义切换系统. 应用共同Lyapunov函数方法研究切换线性广义系统的稳定性, 给出了切换广义系统在任意切换律下都稳定的充分条件, 以及构造一类共同Lyapunov函数的方法. 最后的数值例子说明了方法的可行性.

关键词: 切换系统; 切换线性广义系统; 共同Lyapunov函数
中图分类号: TP273; N941.1 **文献标识码**: A

Stability of a Class of Switched Linear Singular Systems

YIN Yu-juan[1], *LIU Yu-zhong*[2], *ZHAO Jun*[1]
(1a. Key Laboratory of Process Industry Automation, Ministry of Education, 1b. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. School of Mathematics and System Sciences, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China. Correspondent: YIN Yu-juan, E-mail: yinyj64@tom.com)

Abstract: A new class of switched systems, called switched singular systems, is introduced. Stability of switched linear singular systems under arbitrary switching signals is investigated. A sufficient condition for the existence of a common Lyapunov Function is given and a method to construct such a common Lyapunov Function is also presented. A numerical example is given to illustrate the result.

Key words: Switched systems; Switched linear singular systems; Common Lyapunov function

1 引 言

广义系统是一类更一般化、有着广泛应用背景的动力系统, 它大量出现在许多实际的系统模型中. 例如: 电力系统、能源系统、航天工程、化学过程、经济系统、社会系统和生物系统等[1]. 广义系统的研究始于20世纪70年代, 进入80年代以来, 广义系统的研究进入一个蓬勃发展阶段, 特别是关于广义系统稳定性的研究, 取得了许多重要成果[2~6].

与广义系统的蓬勃发展情况相类似的是切换系统的研究. 切换系统是混杂系统的一种重要类型, 它由一组子系统和一个控制切换规则构成, 通过在子系统之间的切换来实现控制目的. 利用切换技术可以获得较好的系统性能. 例如, 当单一的反馈控制无法使系统渐近稳定时, 可通过切换技术使系统渐近稳定[7]. 由于切换系统在改善系统性能方面的作用以及它满足了智能控制飞速发展的需要, 切换系统的研究取得了长足的进展, 也取得了一系列的成果[8~12].

目前研究的切换系统, 其子系统都是正常的线性或非线性系统, 而关于切换广义系统的研究却不多见. 文献[5]给出了一类切换线性广义系统容许的控制器的设计方法; 文献[6]研究了切换线性广义系统的能达性问题, 并得到了切换线性广义系统能达的必要条件. 本文主要研究一类切换线性广义系统在任意切换律下的稳定性. 首先给出切换广义系统的概念, 应用共同Lyapunov函数方法, 针对一类切

收稿日期: 2004-10-20; **修回日期**: 2005-07-04.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60574013; 60274009); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20020145007); 辽宁省自然科学基金项目(20032020).
作者简介: 尹玉娟(1964—), 女, 山东莱州人, 博士生, 从事混杂系统、切换广义系统等研究; 赵军(1957—), 男, 辽宁海城人, 教授, 博士生导师, 从事复杂非线性系统、混杂系统等研究.

换线性广义系统, 给出其在任意切换信号下均稳定的充分条件, 并且给出了一类共同 Lyapunov 函数的构造方法.

2 预备知识

2.1 广义系统

考虑如下线性广义系统:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \tag{1}$$

其中: $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^p$ 分别为状态变量和控制输入变量; $E, A \in R^{n\times n}$ 为定常矩阵; B 为具有适当维数的定常矩阵.

一般地, $\mathrm{rank}E = r < n$, 为确保系统(1) 存在唯一解, 恒假定系统(1) 是正则的, 即 $\det(sE - A) \neq 0$.

引理 1[4]　线性广义系统

$$E\dot{x} = Ax(t) \tag{2}$$

正则、稳定、无脉冲的充要条件是: 对任意给定的对称正定矩阵 W, 都存在矩阵 V 满足广义 Lyapunov 方程

$$A^{\mathrm{T}}V + V^{\mathrm{T}}A = -W, \tag{3}$$

$$E^{\mathrm{T}}V = V^{\mathrm{T}}E \geq 0. \tag{4}$$

2.2 切换线性广义系统

将子系统均为广义系统的切换系统称为切换广义系统.

定义 1　切换线性广义系统可表示为

$$E_{\sigma(t)}\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u_{\sigma(t)}(t),$$
$$x(t_0) = x_0. \tag{5}$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为状态变量; 切换律 $\sigma(t): R^+ \to \Sigma = \{1, 2, \cdots, n\}$ 为分段常值函数; $u_i \in R^{m_i}$ 为控制输入变量; $E_i, A_i \in R^{n\times n}$ 为定常矩阵, B_i 为具有适当维数的定常矩阵, E_i 为奇异阵, $x_0 \in D \subset R^n$ 为一致初始状态.

当 E_i 非奇异时, 系统(5) 退化为一般意义下的线性切换系统.

定义 2　切换序列是一个有限或无限的二元组的集合, 即

$$\pi = \{(t_0, i_0), \cdots, (t_M, i_M)\}. \tag{6}$$

其中: 正整数 $M \leq \infty$ 表示切换序列的长度, 当 $M < \infty$ 时称切换序列 π 是有穷的; 否则称为无穷的. 对于任意给定的 $k \in \{1, 2, \cdots\}$, $i_k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 为激活子系统的指标.

定义 3　若对任意的 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, (E_i, A_i) 均正则、无脉冲, 则称系统(5) 是正则的且无脉冲.

定义 4　对某一切换序列 $\pi = \{(t_0, i_0), \cdots, (t_M, i_M)\}$ 和一致初始状态 x_0, 若系统(5) 存在唯一的状态响应 $x(t)$, 且当 $t \in [t_j, t_{j+1})$ 时, $x(t)$ 满足 $E_{i_j}\dot{x}(t) = A_{i_j}x(t) + B_{i_j}u_{i_j}(t)$, $i_j = \sigma(t_j)$; 在切换时刻满足 $x(t_j) = H_j x(t_j^-)$, 则称 $x(t)$ 是系统(5) 在切换律 π 下的解, 记为 $x_\pi(t; x_0, t_0)$. 其中 $H_j \in R^{n\times n}$ 定常矩阵, $j \in \{1, 2, \cdots\}$.

注 1　对于广义系统而言, 不是任何的初始状态都是允许的, 即使系统无脉冲, 也可能由于非一致初始状态而产生脉冲解. 为了避免上述情况发生, 本文假定当每个子系统正则且无脉冲时, H_j 能够确保系统(5) 不产生脉冲解, 即 $x(t_j) = H_j x(t_j^-)$ 是第 i_j 个子系统的一致初始状态. 实际上, 一般的切换系统也存在解不连续(状态跳跃) 的情形. 广义系统的解不仅要满足微分方程, 同时要满足代数约束. 一般情况下, 不同的广义系统其代数约束往往是不同的. 因此, 切换的广义系统在切换时刻很可能产生状态跳跃.

定义 5　若 $u_i(t) \equiv 0$, 当 $t \to \infty$ 时, 有 $x_\pi(t; x_0, t_0) \to 0$, 则称系统(5) 在切换律 π 下渐近稳定.

3 主要结果

考虑如下的切换线性广义系统:

$$E\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t),$$
$$x(t_0) = x_0. \tag{7}$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为状态变量; 切换律 $\sigma(t): R^+ \to \Sigma$ 为分段常值函数; $E, A_i \in R^{n\times n}$ 为定常矩阵, $\mathrm{rank}E = r < n$; $x_0 \in D \subset R^n$ 为一致初始状态.

由 $\mathrm{rank}E = r$ 可知, 存在非奇异矩阵 M, N 使

$$MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

设

$$MA_iN = \begin{bmatrix} A_{i11} & A_{i12} \\ A_{i21} & A_{i22} \end{bmatrix},$$
$$i \in \Sigma,\ N^{-1}x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

于是, 系统正则、无脉冲等价于矩阵 A_{i22} 非奇异.

定理 1　若系统(7) 正则、无脉冲, x_0 为一致初始状态, 且在切换点 t_j 处, 系统的状态满足

$$x_\pi(t_j; x_0, t_0) = N\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -A_{k22}^{-1}A_{k21} & 0 \end{bmatrix}N^{-1}x_\pi(t_j^-; x_0, t_0),$$
$$k = \sigma(t_j),$$

则对于切换律 π, 系统(7) 存在唯一且分段连续的解, 其中 N 满足式(8).

证明　由 $\mathrm{rank}E = r$ 知, 存在非奇异矩阵 M, N 使式(8) 和(9) 成立, 此时系统(7) 受限等价于

$$\dot{x}_1(t) = (A_{i11} - A_{i12}A_{i22}^{-1}A_{i21})x_1(t), \tag{10}$$

$$x_2(t) = -A_{i22}^{-1}A_{i21}x_1(t). \tag{11}$$

为方便, 记 $\bar{A}_{i11} = A_{i11} - A_{i12}A_{i22}^{-1}A_{i21}$. 当 $t \in [t_0, t_1)$ 时, 有

$$x_\pi(t; x_0, t_0) = N\,[x_1^{\mathrm T}(t) \quad x_2^{\mathrm T}(t)]^{\mathrm T},$$
$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\bar{A}_{i_0 11}(t-t_0)} x_1(t_0),$$
$$x_2(t) = -A_{i_0 22}^{-1}A_{i_0 21}x_1(t).$$

当 $t = t_1$ 时, 有

$$x_\pi(t_1; x_0, t_0) = N\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -A_{i_1 22}^{-1}A_{i_1 21} & 0 \end{bmatrix} N^{-1}x_\pi(t_1^-; x_0, t_0) = N\begin{bmatrix} x_1(t_1^-) \\ -A_{i_1 22}^{-1}A_{i_1 21}x_1(t_1^-) \end{bmatrix}.$$

由 $x_1(t)$ 的唯一性可知, 当 $t_1 \leq t < t_2$ 时, 系统的解唯一且连续, 以此类推, 系统(7) 关于任意切换律 π 都存在唯一且分段连续的解.

定理 2 假设系统(7) 正则、无脉冲, 在切换点 t_j 系统的状态满足

$$x_\pi(t_j; x_0, t_0) = N\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -A_{k22}^{-1}A_{k21} & 0 \end{bmatrix} N^{-1}x_\pi(t_j^-; x_0, t_0),$$

式中 $k = \sigma(t_j)$, 那么系统(7) 在任意切换律下都稳定的充分条件是: 存在矩阵 V, 对任意的 $i \in \Sigma$, Lyapunov 不等式成立

$$A_i^{\mathrm T}V + V^{\mathrm T}A_i < 0, \quad i \in \Sigma, \tag{12}$$
$$E^{\mathrm T}V = V^{\mathrm T}E \geq 0. \tag{13}$$

证明 由 $E^{\mathrm T}V = V^{\mathrm T}E \geq 0$ 及式(8), 不难证得 $M^{-\mathrm T}VN$ 具有如下形式:

$$M^{-\mathrm T}VN = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ V_2 & V_3 \end{bmatrix}.$$

其中: $V_1 \in R^{r\times r}, V_1 > 0$.

由定理的条件可知, 对任意的 $i \in \Sigma, A_i^{\mathrm T}V + V^{\mathrm T}A_i < 0$ 都成立, 即

$$\begin{bmatrix} A_{i11}^{\mathrm T} & A_{i21}^{\mathrm T} \\ A_{i12}^{\mathrm T} & A_{i22}^{\mathrm T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ V_2 & V_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1^{\mathrm T} & V_2^{\mathrm T} \\ & V_3^{\mathrm T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{i11} & A_{i12} \\ A_{i21} & A_{i22} \end{bmatrix} < 0.$$

上式分别左乘 S, 右乘 $S^{\mathrm T}$, 得

$$(A_{i11} - A_{i12}A_{i22}^{-1}A_{i21})^{\mathrm T}V_1 + V_1(A_{i11} - A_{i12}A_{i22}^{-1}A_{i21}) < 0. \tag{14}$$

其中

$$S = \begin{bmatrix} I & -A_{i21}^{\mathrm T}A_{i22}^{-\mathrm T} \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

显然由式(14) 及共同 Lyapunov 函数方法可知, 在任意切换律下 $\lim\limits_{t\to\infty}x_1(t) = 0$. 容易证得当 $t \to \infty$ 时, $x_\pi(t; x_0, t_0) \to 0$. 由 π 的任意性, 得系统(7) 在任意切换律下都是稳定的.

注 2 切换系统的解 $x(t) = [x_1^{\mathrm T} \quad x_2^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$ 分段连续, $x_1(t)$ 在 R^r 空间连续, $x_2(t)$ 在 R^{n-r} 空间分段连续. 当系统存在共同的分解时, $x_\pi(t; x_0, t_0)$ 是连续的, 此时可根据慢子系统的共同 Lyapunov 函数构造切换系统的共同 Lyapunov 函数, 从而将正常切换系统的共同 Lyapunov 函数方法推广到切换广义系统.

定理 3 若切换线性广义系统(7) 正则, 存在非奇异矩阵 P 和 Q 使得

$$[PEQ \quad PA_iQ] = [\mathrm{diag}(I_1 \quad 0), \mathrm{diag}(A_{i1} \quad I_2)] \tag{15}$$

成立. 且对矩阵 A_{i1}, 存在对称正定矩阵 V_1 满足 Lyapunov 不等式

$$A_{i1}^{\mathrm T}V_1 + V_1A_{i1} < 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{16}$$

则切换线性广义系统(7) 在任意切换律下都是稳定的, 且存在共同 Lyapunov 函数

$$v(Ex) = (Ex)^{\mathrm T}Vx,$$

其中 $V = P^{\mathrm T}\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I_2 \end{bmatrix}Q^{-1}$.

证明 系统(7) 正则且存在非奇异矩阵 P 和 Q 使式(15) 和(16) 成立, 显然每个子系统都正则、稳定无脉冲. 于是, 对任意的 $i \in \Sigma$, 有

$$A_i^{\mathrm T}V + V^{\mathrm T}A_i = Q^{-\mathrm T}\left[\begin{bmatrix} A_{i1}^{\mathrm T} & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{i1} & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\right]Q^{-1} = Q^{-\mathrm T}\begin{bmatrix} A_{i1}^{\mathrm T}V_1 + V_1A_{i1} & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix}Q^{-1} < 0,$$

及

$$E^{\mathrm T}V = V^{\mathrm T}E = Q^{-\mathrm T}\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1} \geq 0.$$

由定理 2 可知, 系统(7) 在任意切换律下都是稳定的. 且存在共同的 Lyapunov 函数.

注 3 在定理 3 的条件下, 系统存在唯一且连续的解, 该定理的证明过程给出了构造切换广义系统的共同 Lyapunov 函数的方法.

4 数值例子

下面通过一个数值例子说明构造切换广义系统共同 Lyapunov 函数的方法.

考虑如下的切换广义系统:

$$E\dot{x}(t) = A_ix(t), \quad i = 1, 2 \tag{17}$$

其中

$$E=\begin{bmatrix}-6&-6&-1&3\\23&-5&5&6\\30&-18&7&15\\8&-8&2&6\end{bmatrix},$$

$$A_1=\begin{bmatrix}20.5&3.5&4.5&6\\-33&5&-7&-9\\-33.5&13.5&-9.5&-12\\-3&15&-1&-15\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-5&8&-1&0\\-49&21&-11&-21\\-101&48&-25&-42\\-34&28&-8&-27\end{bmatrix}.$$

系统(17) 受限等价于

$$\mathring{x}_1=A_{11}^{i}x_1,\ i=1,2,\qquad x_2=0. \tag{18}$$

其中

$$Q^{-1}x=[x_1^{\mathrm T}\quad x_2^{\mathrm T}]^{\mathrm T},$$

$$A_{11}^{1}=\begin{bmatrix}-1&0.5\\0&-2\end{bmatrix},\ A_{11}^{2}=\begin{bmatrix}-3&-1\\0&-1\end{bmatrix},$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1&-3\\2&3&0&1\\5&2&-3&-1\\2&0&0&3\end{bmatrix},$$

$$Q^{-1}=\begin{bmatrix}4&-4&1&3\\5&1&1&0\\2&1&1&0\\0&2&0&-3\end{bmatrix}.$$

经计算可求得对称正定矩阵 $V_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ 时, 满足 $(A_{11}^{i})^{\mathrm T}V_1+V_1A_{11}^{i}<0,\ i=1,2.$

由定理 3 得

$$V=\begin{bmatrix}-0.3716&-0.9155&-0.1250&0.3649\\2.9459&0.1486&0.5000&0.1622\\0.2095&-0.1385&0.1250&0.1216\\-1.2838&-1.3446&-0.2500&0.8514\end{bmatrix}.$$

容易验证

$$A_i^{\mathrm T}V+V^{\mathrm T}A_i<0,\ i=1,2,$$
$$E^{\mathrm T}V=V^{\mathrm T}E\geq 0.$$

5　结　论

本文针对一类切换线性广义系统, 研究其在任意切换信号下的稳定性. 应用共同 Lyapunov 函数方法, 得到了系统在任意切换律下都稳定的充分条件, 并将正常系统的共同 Lyapunov 函数方法推广到切换广义系统. 如果切换系统在切换时刻产生状态跳跃(即具有脉冲作用), 这样的切换系统便具有更一般意义, 也更具有研究价值, 对此问题将另文研究. 而对于一般切换广义系统(E_i 不同) 的稳定性分析, 由于必须同时考虑系统的正则性、脉冲特性、一致初始状态和稳定性等问题, 使得问题的研究具有一定难度, 有关这类问题尚须进一步研究.

参考文献(References)

[1] Dai L. *Singular Control Systems*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[2] Ishhara J Y, Terra M H. On the Lyapunov Theorem for Singular Systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1926-1930.

[3] Zhang Q L, Liu W Q, Hill D. A Lyapunov Approach to Analysis of Discrete Singular Systems[J]. *Systems and Control Letters*, 2002, 45(3): 237-247.

[4] 张庆灵, 杨冬梅. *不确定广义系统的分析与综合*[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2003.
(Zhang Q L, Yan D M. *Analysis and Synthesis for Uncertain Descriptor Systems* [M]. Shenyang: Northeastern University Press, 2003.)

[5] Bin Meng. Admissible Switched Control of Singular Systems [A]. *Proc of the 23rd Chinese Control Conference* [C]. Shanghai: East China University of Science and Technology Press, 2004: 1615-1619.

[6] 孟斌, 张继峰. 切换线性奇异系统能达的必要条件[J]. *航空学报*, 2005, 26(2): 224-228.
(Meng B, Zhang J F. Necessary Condition for Reachability of Switched Linear Singular Systems[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2005, 26(2): 224-228.)

[7] Liberzon D, Morse A S. Basic Problems in Stability and Design of Switched Systems[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, 19(5): 59-70.

[8] Decarlo R A, Branicky M S, Pettersson S, et al. Perspectives and Results on the Stability and Stabilizability of Hybrid Systems[A]. *Proc of the IEEE* [C]. 2000, 88(7): 1069-1082.

[9] 刘玉忠, 张霄力, 赵军. 一类线性开关系统的渐近稳定性[J]. *控制与决策*, 2002, 17(1): 111-113.
(Liu Y Z, Zhang X L, Zhao J. Asymptotic Stability of a Class of Linear Systems[J]. *Control and Decision*, 2002, 17(1): 111-113.)

[10] Yanpin R, Zuo Z, Qiufeng W. Stability Analysis of a Class Switched Systems[A]. *Proc of 14th IFAC*[C]. Beijing, 1999: 515-519.

[11] Davarazos G, Koussoulas N T. A Review of Stability Results for Switched and Hybrid Systems[A]. *Proc of 9th Mediterranean Conf Control and Automation*[C]. Dubrovnik, Croatia, 2001.

[12] Liberzon D. *Switched in Systems and Control*[M]. Berlin: Spring-Verlag, 2003.