

文章编号: 1001-0920(2006)01-0038-04

电子自旋的时间量子控制

董道毅, 陈宗海

(中国科学技术大学 自动化系, 合肥 230027)

摘要: 提出一种时间量子控制方案, 通过控制所加外部控制场的作用时间能有效地控制电子自旋到达给定的目标量子态, 同时发现电子自旋状态能随控制场作用时间呈周期性变化. 讨论了外部控制场与其作用时间的关系, 结果表明: 对于给定的量子控制任务, 在选定的某个周期内, 作用时间与控制场强度成反比.

关键词: 量子控制论; 电子自旋; 量子态; 时间量子控制; 作用时间

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Time Quantum Control of Electron Spin

DONG Dao-yi, CHEN Zong-hai

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China. Correspondent: CHEN Zong-hai, E-mail: chenzh@ustc.edu.cn)

Abstract: A time quantum control scheme is proposed, in which the electron spin can effectively be controlled to given objective quantum state through controlling acting time of external control field. The states of electron spin periodically vary with the acting time of control field. The relation between external control field and its acting time is also discussed. The result shows that the acting time is in inverse proportion to control strength in some certain period when a quantum control task is given.

Key words: Quantum control theory; Electron spin; Quantum states; Time quantum control; Acting time

1 引言

量子理论的创立是20世纪人类最重要的成就之一, 它将人们的视角从宏观领域引入到微观系统. 近年来, 选键化学和量子信息学^[1]的迅速发展使得对量子态的制备、识别^[2]和控制变成了科学家们的一项中心任务. 同时, 经典装置(如集成芯片、半导体)的尺寸越来越小, 量子效应也开始显现出来. 既然量子领域存在一系列区别于宏观系统的现象, 如量子纠缠、量子干涉、海森堡测不准原理等, 经典控制论就无法有效的指导完成各种量子控制任务, 从而导致量子控制论的产生和发展^[3]. 量子控制论主要研究对象是量子力学系统, 其目的是有效的对量子系统状态进行主动控制, 以按人们的期望暂时的或是永久的改变微观物质的状态^[4]. 根据控制的目

的不同, 可以大致细分为: 状态控制、最优控制和跟踪控制等. 量子控制论作为一门新兴交叉学科, 近年来得到迅速发展. 目前, 对量子控制论的研究主要涉及到量子系统的建模^[5]、可控性^[6]、量子最优控制^[7]和量子反馈控制^[8-12].

在众多的量子控制任务中, 对电子自旋进行控制是一项十分有意义的工作. 因为自旋电子是一个两态量子系统, 它具有自旋朝上和自旋朝下两个特征量子态, 可以构成量子比特作为量子通信、量子计算机的信息单元. 既然对量子信息的处理实质上是对量子态进行操纵^[1], 可通过对电子自旋的量子控制来实现各种量子信息处理任务.

本文提出了一种时间量子控制方法, 可通过控制外加恒定控制场的作用时间来对电子自旋态进行

收稿日期: 2004-12-31; 修回日期: 2005-03-10

基金项目: 国家985高水平大学建设基金项目(KY2706); 中国科学院研究生科学与社会实践资助专项(创新研究类)项目(No. 2004-18); 中国科学技术大学研究生创新基金项目(KD 2004048).

作者简介: 董道毅(1978—), 男(土家族), 湖北利川人, 博士生, 从事量子信息、量子控制的研究; 陈宗海(1963—), 男, 安徽桐城人, 教授, 博士生导师, 从事系统建模仿真、量子控制等研究.

有效的量子控制, 并发现电子自旋态随控制场作用时间呈周期性变化. 另外还讨论了外加控制场与控制时间的关系. 结果表明: 对于给定的量子控制任务, 在选定的某个周期内, 作用时间与控制场强度成反比.

2 电子自旋的描述

在量子控制中, 所研究的对象是量子力学系统, 要控制的是系统的量子态. 根据量子力学可知, 系统的量子态可用希尔伯特空间的态矢 $|\psi(t)\rangle$ 描述, $|\psi(t)\rangle$ 是一个复数矢量, 如果在希尔伯特空间中选用一组基矢 $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle\}$, 则 $|\psi(t)\rangle$ 可表示为^[13]

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{i=1}^n C_i |\varphi_i\rangle. \quad (1)$$

其中: $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是复系数, $|C_i|^2$ 表示测量量子态 $|\psi(t)\rangle$ 时得到结果 $|\varphi_i\rangle$ 的概率, $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle\}$ 中的 $|\varphi_i\rangle (i=1, 2, \dots, n)$ 也称为该量子系统的特征量子态. 由此可见, 对一个量子系统, 它不仅处于特征量子态上, 而且可以处于它的各个特征量子态的任意叠加态, 量子通信、量子计算的许多优越性正是来源于这一叠加性^[1]. 对处于量子态的 $|\psi(t)\rangle$ 进行观测, $|\psi(t)\rangle$ 将以 $|C_i|^2$ 的概率跳变到 $|\varphi_i\rangle$. 因而, 在量子控制中, 必须考虑获取信息的过程也破坏系统状态本身这一问题.

按照量子理论, 量子态 $|\psi(t)\rangle$ 随时间的演化遵循 Schrodinger 方程^[13]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle. \quad (2)$$

其中: i 为虚数单位, \hbar 为普朗克常量, H 为系统的哈密顿算符. 如果给定初始时刻系统的量子态为 $|\psi(0)\rangle$, 则 t 时刻量子态 $|\psi(t)\rangle$ 可通过么正算符 $U(t)$ 对 $|\psi(0)\rangle$ 的作用来得到, 即

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle. \quad (3)$$

将式(3)代入式(2), 可得

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [U(t) |\psi(0)\rangle] = H U(t) |\psi(0)\rangle, \quad (4)$$

容易解出 $U(t)$ 为

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar}, \quad (5)$$

则 t 时刻量子态 $|\psi(t)\rangle$ 可表示为

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(0)\rangle. \quad (6)$$

下面来具体考虑电子自旋的描述. 大量实验事实表明, 电子在绕原子核运动时, 还存在一种“自转”, 它是电子的一种内禀属性, 称为电子自旋^[13]. 研究表明, 电子自旋在空间任何方向的投影只可能取两个值, 即 $\pm \hbar/2$. 为方便, 取 $+\hbar/2$ 时称自旋朝上, 形象记为 $|\uparrow\rangle$, 取 $-\hbar/2$ 时称自旋朝下, 记为

$|\downarrow\rangle$. 为了描述电子自旋这一量子态, 引入一个新变量 s_z , 它的取值只能是 $\pm \hbar/2$, 则量子态可表示成一个两分量的列矢量, 即

$$|\psi(s_z, t)\rangle = \begin{bmatrix} |\psi(+\hbar/2, t)\rangle \\ |\psi(-\hbar/2, t)\rangle \end{bmatrix} = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle. \quad (7)$$

其中: α 和 β 是两个复系数, $|\alpha|^2$ 和 $|\beta|^2$ 分别表示自旋朝上和自旋朝下的概率. 为了能方便地在希尔伯特空间计算, 可取两个基矢分别表示两个自旋指向, 不妨取

$$|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$|\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

取自旋算符 $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$, 根据量子力学知识可知, 自旋算符的 3 个分量满足如下关系^[13]:

$$\begin{cases} S_x S_y - S_y S_x = i\hbar S_z, \\ S_y S_z - S_z S_y = i\hbar S_x, \\ S_z S_x - S_x S_z = i\hbar S_y. \end{cases} \quad (10)$$

为计算方便, 通常引入泡利矩阵 $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, 满足

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad (11)$$

根据电子自旋的性质, 结合式(10)和式(11), 并作某些人为规定, 可得到泡利矩阵的 3 个分量为

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

有了泡利矩阵, 便可以方便地进行电子自旋计算, 如

$$\sigma_x |\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |\downarrow\rangle, \quad (13)$$

$$\sigma_y |\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = i |\downarrow\rangle. \quad (14)$$

经简单计算, 还可以得出泡利矩阵具有如下性质:

$$\begin{cases} \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 0, \\ \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y = 0, \\ \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z = 0; \end{cases} \quad (15)$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

3 电子自旋的时间量子控制

考虑恒定磁场中电子自旋的量子控制问题, 设电子的磁矩为 $\vec{M} = k\vec{S}$ (k 为常系数), 如果初始时刻电子处于自旋朝上 (不妨设为 z 轴正向), 即 $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$, 就让电子沿 y 轴运动, 用 y 轴方向的恒定磁场作为外部控制场, 即 $\vec{U} = u_0 \vec{e}_y$. 然后, 通过控制所

加外部控制场的时间来对电子自旋的量子态进行控制, 求取外部控制场与时间的关系

根据量子力学知识可得系统的哈密顿算符为^[13]

$$H = -\vec{M} \cdot \vec{U} = -ku_0 \vec{S} \cdot \vec{e}_y = -ku_0 S_y \quad (17)$$

结合式(11), 可得

$$H = -\frac{ku_0}{2} h \sigma_y \quad (18)$$

根据式(6)可以写出 t 时刻系统的状态为

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\Psi(0)\rangle = e^{\frac{iku_0 t}{2} i \sigma_y} | \quad (19)$$

为了进一步计算, 下面先证明引理 1 和定理 1.

引理 1 设 $\vec{\alpha}$ 是一个三维矢量, $\alpha = |\vec{\alpha}|$, 则 $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma})^2 = \alpha^2 \sigma_0$

证明 记 $\vec{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$, 则

$$\begin{aligned} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma})^2 &= (\alpha_x \sigma_x + \alpha_y \sigma_y + \alpha_z \sigma_z)^2 = \\ &\alpha_x^2 \sigma_x^2 + \alpha_y^2 \sigma_y^2 + \alpha_z^2 \sigma_z^2 + \alpha_x \alpha_x \sigma_x \sigma_x + \\ &\alpha_x \alpha_x \sigma_x \sigma_x + \alpha_x \alpha_y \sigma_x \sigma_y + \alpha_y \alpha_x \sigma_y \sigma_x + \\ &\alpha_x \alpha_z \sigma_x \sigma_z + \alpha_z \alpha_x \sigma_z \sigma_x \end{aligned} \quad (20)$$

利用式(15)和式(16), 可得结论

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma})^2 = (\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2) \sigma_0 = \alpha^2 \sigma_0 \quad (21)$$

定理 1 设 $\vec{\alpha}$ 是一个三维矢量, $\alpha = |\vec{\alpha}|$, $\vec{e}_\alpha = \vec{\alpha}/\alpha$ 则 $e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} = \sigma_0 \cos \alpha + i(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{\sigma}) \sin \alpha$

证明

$$\begin{aligned} e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma})^{2n} + \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma})^{2n+1} \end{aligned} \quad (22)$$

利用引理 1 的结论, 并考虑到 $(\sigma_0)^n = \sigma_0$, 可得

$$\begin{aligned} e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \alpha^{2n} \sigma_0 + \\ i(\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}) &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n} = \\ \sigma_0 \cos \alpha &+ i(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{\sigma}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} = \end{aligned}$$

$$\sigma_0 \cos \alpha + i(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{\sigma}) \sin \alpha \quad (23)$$

根据定理 1, 可得到

$$e^{\frac{iku_0 t}{2} i \sigma_y} = \sigma_0 \cos\left(\frac{ku_0 t}{2}\right) + i \sigma_y \sin\left(\frac{ku_0 t}{2}\right) \quad (24)$$

将式(24)代入式(19), 并利用式(14)和关系 $\sigma_0 | \quad = | \quad$, 可得 t 时刻电子自旋态为

$$|\Psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{ku_0 t}{2}\right) | \quad - \sin\left(\frac{ku_0 t}{2}\right) | \quad . \quad (25)$$

对上述结果, 本文作如下讨论:

1) 显然, 对于一个给定的目标自旋态, 控制场强度 u_0 与作用时间 t 成反比关系, 即对同一个量子控制问题, 较大的控制场强度需要的控制时间较短

2) 从式(25)可以看出, 在恒定的外部控制场作用下, 通过控制作用时间大小可以控制电子自旋到预先给定的量子态, 这正是本文提出时间量子控制方案的依据 例如, 在 $\frac{ku_0 t}{2} \in [0, \pi]$ 内, 如果给定目标量子态, 可以得到相应的控制时间解, 表 1 中给出了几组结果

由此还得到在同一周期内对应不同目标自旋态的控制场 - 作用时间关系示意图, 如图 1 所示

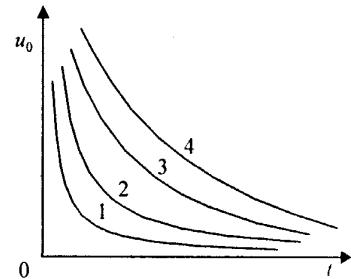


图 1 同一周期内不同目标自旋态情况

3) 根据式(25)还可以看出, 电子自旋态随作用时间周期性变化, 又根据量子理论可知, 在任意一个量子态前面添加正负号所得的量子态与原来量子态相同, 因而周期为 $T = 2\pi/(ku_0)$. 假设量子控制任务是将电子自旋进行翻转, 则作用时间和控制场只需

表 1 目标电子自旋态与作用时间关系表

No.	目标量子态	$ku_0 t/2$	作用时间 t	目标态的物理解释
0	$ \quad \rangle$	0	0	自旋朝上
1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad - \frac{1}{2} \quad \rangle$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3ku_0}$	处于自旋朝上与自旋朝下的量子叠加态, 自旋朝上概率 75%, 朝下概率 25%
2	$\frac{\sqrt{2}}{2} (\quad - \quad \rangle)$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2ku_0}$	处于自旋朝上与自旋朝下的量子叠加态, 自旋朝上和自旋朝下概率各为 50%
3	$- \quad \rangle$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{ku_0}$	自旋朝下, 该量子控制任务对应于将电子自旋进行翻转
4	$\frac{\sqrt{2}}{2} (\quad + \quad \rangle)$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2ku_0}$	处于自旋朝上与自旋朝下的量子叠加态, 自旋朝上和自旋朝下概率各为 50%

要满足

$$\frac{ku_0}{2}t = (n\pi + \frac{\pi}{2}), n = 0, 1, 2, \dots, \quad (26)$$

即只需要控制作用时间为

$$t = \frac{(2n+1)\pi}{ku_0}. \quad (27)$$

图 2 中给出了几个不同周期控制场 - 作用时间关系示意图 由此可以得到最小作用时间(或者说最优时间解)为 $\pi/(ku_0)$. 因而, 对每个给定的量子控制问题, 一般都有多个作用时间可以使系统达到目标量子态, 通常可以选取它的最优时间解

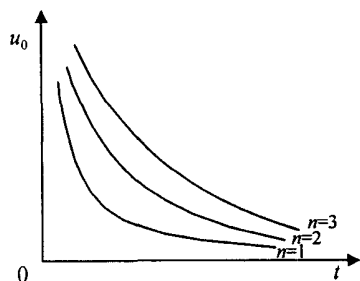


图 2 同一目标自旋态不同周期内的情况

4 结 语

量子控制是一门迅速发展的新兴交叉学科, 本文针对电子自旋态的量子控制问题, 提出了一种时间量子控制方案, 通过控制所加外部控制场的作用时间来有效地控制电子自旋到达给定的目标自旋态 经研究发现, 电子自旋态随控制场作用时间呈周期性变化, 因而对某个选定量子控制任务, 有多个作用时间满足要求, 通常选用最优时间解 并讨论了外部控制场与其作用时间的关系, 结果表明: 对于给定的量子控制任务, 在选定的某个周期内, 作用时间与控制场强度成反比 本文的时间量子控制方案也可以用到量子最优控制、量子反馈控制、量子通信网络等问题的研究

参考文献(References)

- [1] Nielsen M A, Chuang IL. *Quantum Computation and Quantum Information* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000: 2-59
- [2] Dong D Y, Chen Z H. Clustering Recognition of Quantum States Based on Quantum Module Distance [J]. *量子光学学报*, 2003, 9(4): 144-148

- (Dong D Y, Chen Z H. Clustering Recognition of Quantum States Based on Quantum Module Distance [J]. *Acta Sinica Quantum Optica*, 2003, 9(4): 144-148)
- [3] 程代展. 量子控制——一个全新的学科领域[J]. *控制与决策*, 2002, 17(5): 513-516
(Cheng D Z. Quantum Control——A New Academic Field[J]. *Control and Decision*, 2002, 17(5): 513-516)
- [4] 陈宗海, 董道毅. 量子控制论[J]. *量子电子学报*, 2004, 21(5): 546-554
(Chen Z H, Dong D Y. Quantum Control Theory [J]. *Chinese J of Quantum Electronics*, 2004, 21(5): 546-554)
- [5] Tarn T J, Huang G, Clark J W. Modelling of Quantum Mechanical Control Systems [J]. *J of Mathematical Modelling*, 1980, 1(1): 109-121
- [6] Albertini F, D'Alessandro D. Notions of Controllability for Bilinear Multilevel Quantum Systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(8): 1399-1403
- [7] D'Alessandro D, Dahleh M. Optimal Control of Two-level Quantum Systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(6): 866-876
- [8] Lloyd S. Coherent Quantum Feedback [J]. *Physical Review A*, 2000, 62: 1-12
- [9] Dong D Y, Zhang C B, Chen Z H. Quantum Feedback Control Using Quantum Cloning and State Recognition [A]. *Proc of the 16th IFAC World Congress* [C]. Prague, 2005: 1965-1971.
- [10] Doherty A C, Habib S, Jacobs K, et al. Quantum Feedback Control and Classical Control Theory [J]. *Physical Review A*, 2000, 62: 1-14
- [11] Yanagisawa M, Kimura H. Transfer Function Approach to Quantum Control-Part I: Dynamics of Quantum Feedback Systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(12): 2107-2120
- [12] Yanagisawa M, Kimura H. Transfer Function Approach to Quantum Control-Part II: Control Concepts and Applications [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(12): 2121-2132
- [13] 张永德. *量子力学* [M]. 北京: 科学出版社, 2002: 68-256
(Zhang Y D. *Quantum Mechanics* [M]. Beijing: Science Press, 2002: 68-256)