第21卷 第10期 控 制 与 决 策 2006年10月
Vol 21 No. 10 Control and Decision Oct 2006

文章编号: 1001-0920(2006)10-1181-04

基于行为方法的同时镇定

谢世杰, 段广仁
(哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术研究中心, 哈尔滨 150001)

摘 要: 从行为角度研究了动态系统的互联与控制 通过把控制规定为一种互联, 得到了使系统镇定的一些新结果, 此时, 控制器不过是限制对象行为的一个系统 通过潜在变量的消除, 得到人们感兴趣的那部分变量的动态特性刻画: 即可以通过极点配置变成稳定的 通过定义一个既单且满的Bezout映射, 证明了该控制器能镇定系统的多样性, 从而使得一个控制器能对两个或两个以上的系统同时镇定 仿真算例验证了设计的正确性和有效性

关键词: 行为; 互联; 潜在变量; Bezout映射; 同时镇定
中图分类号: TP271 **文献标识码**: A

Simultaneous Stabilization Based on Behavioral Approach

XIE Shi-jie, DUAN Guang-ren
(Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: XIE Shi-jie, E-mail: xieshijie0031@sina.com)

Abstract: The interconnection and control of dynamical systems are studied in a behavioral context. New results of system stabilization are achieved by specifying the controller as a system restricting plant's behavior. Dynamical properties of partial variables of interest are characterized by elimination of latent variables These variables can be stabilized by pole placement. Variety of systems which can be stabilized by this controller is proved by defining a Bezout map both injective and surjective. This makes it possible for a controller to stabilize two or more than two plants Simulation result shows the validity and effectiveness of this design method.

Key words: Behavior; Interconnect; Latent variable; Bezout map; Simultaneous stabilization

1 引 言

同时镇定问题最早见于Vidyasgar利用因子分解方法进行控制问题综合[1]. 在该方案中, 针对对象的名义描述, 综合一个补偿器不仅使得它能镇定名义对象, 而且当对象中某些机构发生改变时(如传感器、执行机构失效等)亦能被该补偿器镇定; 该方案的另一个应用出现在非线性系统的补偿之中: 随着系统的工作点发生变化, 其线性化模型亦发生变化, 如果这些线性化模型都可由一个公共的补偿器镇定, 则这个公共补偿器可用于对该非线性系统进行补偿, 从而降低系统设计的复杂性 其求解思路也很清楚: 包括对给定的对象(一般由传递函数(阵)或状态空间描述)进行左(右)互质分解和求解相应的丢番图方程, 但其计算量非常之大

通常, 无论是传递函数还是状态空间描述都是将系统视为一个接收输入、并将其转化为输出的信号处理器 作为一种控制范例, 输入/输出或输入/状态/输出结构都曾作为能普遍适用的动态模型 然而, 作为一种动态系统建模的方法, 输入/输出的观点未免限制性太强, 因为大多数物理系统并不具备特定的信号流方向 基于这种进退两难的情形, Willems[2,3]提出了控制器与对象互联作为控制理论范例的行为方法, 与经典的处理输入输出的信号流图思想不同, 行为方法认为控制纯粹是对系统变量施加的一个新的法则 控制问题相当于寻求一个控制器, 当它以某种规定的方式与对象互联时, 产生期

收稿日期: 2005-06-23; **修回日期**: 2005-10-12
基金项目: 国家杰出青年基金项目(69925308).
作者简介: 谢世杰(1966—), 男, 湖南常德人, 博士后, 从事数学系统理论中的行为方法及鲁棒控制理论等研究; 段广仁(1962—), 男, 黑龙江桦川人, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制理论、广义系统等研究

望的行为[4,5]. 基于此, 把控制器看成是将要和对象互联的系统, 在互联发生之前, 对象变量的轨迹仅仅要求属于对象的行为, 当控制器连接之后, 对象变量要求同时遵循对象和控制器的法则. 根据这种方式, 人们可以设计控制器使得能从对象行为的所有轨迹中保留期望的行为, 抑制不期望发生的行为. 10 多年来, 行为方法作为动态系统建模的一种手段越来越被广泛接受, 以至于现在被认为是系统分析与设计的一个令人信服的框架. 基于这种方法, 经典系统理论的许多重要问题已被"翻译"和解决并得到了更美妙的结果[6~8].

本文的目的是基于文献[2,3]所构建的体系, 从行为角度具体实现线性系统理论中同时镇定问题. 所得结果表明, 行为方法并不否认传统意义上的状态反馈或输出反馈的优点, 只是告戒人们在对某些情形进行控制设计时不必要引进一些复杂的结构, 比如, 输入/输出结构等.

2 问题的描述——将控制看作互联

正如文献[2]指出, 动态系统 Σ 定义为一个 3 元组: $\Sigma = (T, W, B)$, 其中: $T \subseteq R$ 为时间轴, 表示与所考虑的动态系统相关的时间情形; W 为信号空间的集合; $B \subseteq W^T$ 是系统的行为(W^T 表示所有从 T 到 W 映射的集合). 由于本文只考虑连续时间系统, 故取 $T = R$, 信号空间中的元素为系统产生的时间轨迹. 设 $\Sigma_1 = (T, W, B_1)$ 和 $\Sigma_2 = (T, W, B_2)$ 是两个具有相同时间轴和相同信号空间的动态系统. Σ_1 和 Σ_2 的互联定义为

$$\Sigma_1 \wedge \Sigma_2 = (T, W, B_1 \cap B_2), \tag{1}$$

即互联系统 $\Sigma_1 \wedge \Sigma_2$ 的行为由同时相容于 Σ_1(即 $w \in B_1$) 和 Σ_2(即 $w \in B_2$) 法则的行为构成.

现假设对象, 即动态系统 $\Sigma_p = (T, W, B_p)$ 给定, 设 C 是一个动态系统族, 该系统族中所有系统具有相同的时间轴 T 和相同的信号空间 W, 称 C 是容许控制器的集合. 一个元素 $\Sigma_c \in C$, $\Sigma_c = (T, W, B_c)$ 称为容许控制器, 互联后的系统 $\Sigma_p \wedge \Sigma_c$ 称为受控系统, 控制器 Σ_c 的选择应使得 $\Sigma_p \wedge \Sigma_c$ 满足一定的设计规范. 则控制问题可描述为: 1) 描述容许控制器的集合; 2) 描述受控系统应该具有的(期望) 特性; 3) 寻求容许控制器 Σ_c 使得 $\Sigma_p \wedge \Sigma_c$ 具有期望的特性.

因本文专门研究线性时不变微分方程系统的控制问题, 故如果用 $R^{g\times q}[\xi]$ 表示具有 g 行 q 列的多项式矩阵, ξ 是不定元, 则对象可借助多项式矩阵 $R(\xi) \in R^{g\times q}[\xi]$ 描述为

$$R\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)w = 0, \tag{2}$$

它实际上诱导了一个动态系统 $\Sigma_R = (R, R^q, B_R)$, 其中 B_R 是(2) 的弱解集[9]. 假设容许控制器类由线性时不变微分系统构成, 于是一个容许控制器可由一个多项式矩阵 $C(\xi) \in R^{g'\times q}[\xi]$ 描述, 即

$$C\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)w = 0, \tag{3}$$

设 $\Sigma_C = (R, R^q, B_C)$ 是(3) 诱导的一个动态系统, 于是 Σ_C 作为一个控制器, 受控系统可定义为

$$\Sigma_R \wedge \Sigma_C = (R, R^q, B_R \cap B_C).$$

显然, 本质上它可由(2) 和(3) 的联合来定义, 即

$$\begin{bmatrix} R\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \\ C\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \end{bmatrix} w = 0. \tag{4}$$

于是上述控制问题可更具体地描述为: 给定 $R(\xi)$, 寻求一个 $C(\xi)$ 使得受控系统(4) 具有期望的特性.

3 主要结果 —— 同时镇定

3.1 极点配置和镇定

基于上节将控制看作互联的观点, 现进一步讨论极点配置的一些思想, 为简单起见, 仅考虑一个方程约束两个变量的情形(即传统意义上的单输入/单输出情形). 假设对象由下列方程决定:

$$a\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)w_1 + b\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)w_2 = 0, \tag{5}$$

式中: $a(\xi), b(\xi) \in R[\xi]$, 假设 $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$ 两者都不为零. 容许控制器的集合由线性时不变微分系统构成, 其中的元素亦由一个方程决定, 即

$$c\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)w_1 + d\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)w_2 = 0, \tag{6}$$

式中: $c(\xi), d(\xi) \in R[\xi]$, 于是受控系统由下列联立方程决定:

$$\begin{bmatrix} a\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) & b\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \\ c\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) & d\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = 0, \tag{7}$$

与式(7) 相对应的多项式矩阵为

$$\begin{bmatrix} a(\xi) & b(\xi) \\ c(\xi) & d(\xi) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

基于文献[2], 受控系统(7) 的行为的主要特性(稳定性、调节时间、振荡频率等) 都可由(8) 的奇(点) 性来刻画, 即由行列式

$$e(\xi) = a(\xi)d(\xi) - b(\xi)c(\xi) \tag{9}$$

的根来刻画. 于是, 上节问题的描述等价于: 针对给定的 $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$ 及期望的 $e(\xi)$, 寻求 $c(\xi)$ 和 $d(\xi)$ 使得式(9) 成立. 称 $e(\xi)$ 的根为受控系统的极点, 于是上述问题就变成极点配置的"行为版". 基于文献[3] 得到下列结果:

定理 1　考虑对象(5), 假设 $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$ 两者都不为零, 则对任意的 $e(\xi)\in R[\xi]$, 存在控制器(6)使得

$$\det\begin{bmatrix} a(\xi) & b(\xi) \\ c(\xi) & d(\xi)\end{bmatrix} = e(\xi) \tag{10}$$

的充分必要条件是对象(5) 是可控的(等价的, $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$ 是互质的).

证明　充分性 根据Bezout 等式, 由 $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$ 互质可知, 存在 $c_1(\xi)$ 和 $d_1(\xi)$ 使得

$$a(\xi)d_1(\xi) - b(\xi)c_1(\xi) = 1. \tag{11}$$

两边同乘 $e(\xi)$ 得

$$a(\xi)d_1(\xi)e(\xi) - b(\xi)c_1(\xi)e(\xi) = e(\xi), \tag{12}$$

令 $c(\xi) = c_1(\xi)e(\xi)$, $d(\xi) = d_1(\xi)e(\xi)$ 得到式(10).

必要性 假设 $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$ 不是互质的, $h(\xi)$ 是其一个公因子, 则由(10) 可知 $e(\xi)$ 亦含有 $h(\xi)$, 与 $e(\xi)$ 的任意性矛盾. 称 $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$ 的最大公因子为对象(5) 的不可控多项式, 表示为 $\chi_u(\xi)$. □

类似于经典线性系统理论中可镇定性概念, 由上述结果可以很容易得到类似于文献[3] 中定理 7 的推论:

推论 1　考虑对象(5), 假设 $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$ 两者都不为零, $e(\xi)\in R[\xi]$ 为期望的多项式, 则存在一个控制器(6) 使得(10) 成立的充分必要条件是对象的不可控多项式亦是 $e(\xi)$ 的因子, 或: 对象可镇定当且仅当不可控多项式 $\chi_u(\xi)$ 是稳定的.

证明　充分性 既然 $\chi_u(\xi)$ 是 $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$ 的最大公因子, 设 $a(\xi) = \chi_u(\xi)a'(\xi)$, $b(\xi) = \chi_u(\xi)b'(\xi)$, 显然, $a'(\xi)$ 和 $b'(\xi)$ 是互质的, 根据Bezout 等式, 存在 $c_1'(\xi)$ 和 $d_1'(\xi)$ 使得

$$a'(\xi)d_1'(\xi) - b'(\xi)c_1'(\xi) = 1. \tag{13}$$

由于 $\chi_u(\xi)\mid e(\xi)$, 设 $e(\xi) = \chi_u(\xi)e'(\xi)$, 上式两边同乘 $e(\xi)$ 得

$$\chi_u(\xi)a'(\xi)d_1'(\xi)e'(\xi) - \chi_u(\xi)b'(\xi)c_1'(\xi)e'(\xi) = e(\xi).$$

令 $d(\xi) = d_1'(\xi)e'(\xi)$, $c(\xi) = c_1'(\xi)e'(\xi)$, 得到式(10).

必要性 完全类似于定理 1 的必要性证明. □

假如人们只对其中某一部分变量的动态感兴趣, 比如 w_1, 则可经过“潜在变量消除”[9] 得到 w_1 的动态为

$$e\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)w_1 = \left[a\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)d\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) - b\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)c\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\right]w_1 = 0. \tag{14}$$

并由文献[9] 可直接得到如下结果:

定理 2　设对象(5) 是可控的, 如果(14) 所对应的期望多项式 $e(\xi)$ 与 $b(\xi)$ 互质, 则 w_1 的动态完全由(14) 决定.

从以上叙述可以看出: 视控制为互联的观点实际上相当于限制原始对象行为到期望的子行为, 这种限制可通过增加对象变量所必须满足的方程数目来实施, 这种“附加”法则所定义的系统称为控制器, 具体设计算法可见文献[9].

3.2　同时镇定

设从给定对象(5) 出发, 利用[9] 的结果得出使得系统(5) 镇定的控制器为

$$c\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)w_1 + d\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)w_2 = 0. \tag{15}$$

定义Bezout 映射 $B_{c,d}: R[\xi]\times R[\xi]\to R[\xi]$ 为

$$a_1(\xi), b_1(\xi) \to$$
$$a_1(\xi)d(\xi) - b_1(\xi)c(\xi) = e_1(\xi). \tag{16}$$

显然, 如果 $c(\xi)$ 和 $d(\xi)$ 是互质的, 则它是既单且满的映射[9]. 于是对任意的 $e_1(\xi)\in R[\xi]$, 满足(16) 的 $a_1(\xi)$ 和 $b_1(\xi)$ 存在且唯一. 即任给一个期望的多项式 $e_i(\xi)$, 都存在一个如(5) 那样描述的对象 $(a_i(\xi), b_i(\xi))$ 和原始对象(5) 能被控制器(15) 同时镇定. 于是得到如下结果:

定理 3　设对于(5) 所描述的系统, 存在一个使之镇定的控制器(15), 如果控制器 $c(\xi)$ 和 $d(\xi)$ 是互质的, 则对任意稳定多项式 $e_i(\xi)$, 满足

$$a_i(\xi)d(\xi) - b_i(\xi)c(\xi) = e_i(\xi) \tag{17}$$

的对象

$$a_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)w_1 + b_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)w_2 = 0 \tag{18}$$

能与原始对象(5) 同时被控制器(15) 镇定.

4　举　　例

考虑系统

$$\left(1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right)w_1 = w_2, \tag{19}$$

设刻画 w_1 动态特性的期望多项式为

$$e(\xi) = 1 + 2\xi + \xi^2, \tag{20}$$

根据文献[3] 的算法, 得控制器系统为

$$3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_1 + w_2 = 0. \tag{21}$$

假设欲利用上述控制器镇定另一个对象, 期望的多项式为

$$e(\xi) = 1 + \xi + \xi^2, \tag{22}$$

得原始系统之一为

$$\left(1 - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right)w_1 = w_2, \tag{23}$$

显然, 系统(19) 与系统(23) 可同时镇定.

假如 (w_1, w_2) 是输入/输出分块, 即 w_1 是输出向量, w_2 是输入向量, 则(微分算子) 多项式(20) 刻

画了控制器(21) 与系统(19) 互联后 w_1 的动态特性; 多项式(22) 刻画了控制器(21) 与系统(23) 互联后 w_1 的动态特性. 在非零初始条件下, 其响应曲线分别如图 1 和图 2 所示.

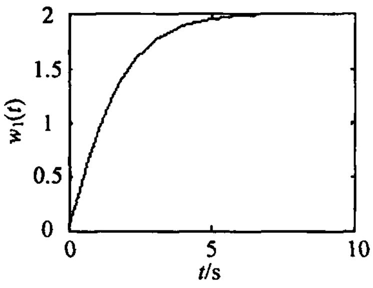

图 1　系统(20) 非零初始条件响应曲线

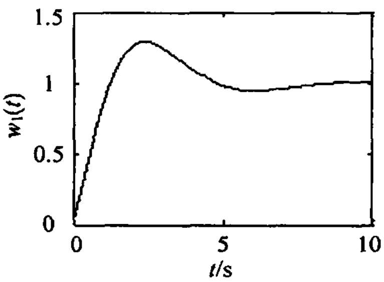

图 2　系统(22) 非零初始条件响应曲线

从举例及仿真曲线可以看出, 利用本文方法所设计的控制器可以对多个对象同时镇定.

5　结　　论

本文从行为的观点研究了系统理论中的一个经典问题——同时镇定, 因为控制被认为是施加在系统(外部) 变量上的一个(限制) 法则, 这样就避免了可能因部分状态的不可观测性引进观测器而导致系统结构的复杂. 以这样的方式设计的控制器事实上能使一类(参数变化的) 系统同时镇定. 鲁棒控制的主要特点之一就是能处理系统参数的不确定性, 故本文的设计方法从一个侧面保证了系统设计的鲁棒性.

参考文献(References)

[1] Vidyasgar M. *Control System Synthesis: A Factorization Approach* [M]. Cambridge: MIT Press, 1985: 123-131.

[2] Willems J C. Paradigms and Puzzles in the Theory of Dynamical System [J]. *IEEE Trans on Automaticic Control*, 1991, 36(3): 259-294.

[3] Willems J C. On Interconnection, Control, and Feedback [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(3): 326-339.

[4] Willems J C, Trentelman H L. Synthesis of Dissipative System Using Quadratic Differential Forms, Part 1[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(1): 53-69.

[5] Trentelman H L, Willems J C. Synthesis of Dissipative System Using Quadratic Differential Forms, Part 2[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(1): 70-85.

[6] Belur M N, Trentelman H L. Stabilization, Pole Placement, and Regular Implementability [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(5): 735-744.

[7] Van Der Schaft A J. Achievable Behavior of General System [J]. *System Control Letter*, 2003, 49(9): 141-149.

[8] Julius A A, Willems J C, Belur M N, et al. The Canonical Controller and Regular Interconnection [J]. *System Control Letter*, 2005, 51: 253-258.

[9] Polderman J W, Willems J C. *Introduction to Mathematical System Theory: A Behavioral Approach* [M]. New York: Springer, 1998: 363-382.

(上接第 1180 页)

[4] Cheng D. Stabilization of Planar Switched System [J]. *System and Control Letter*, 2004, 51(2): 79-88.

[5] Paul A, Akar M, Safonov M G, et al. Necessary and Sufficient Conditions for Stability of a Class of Second-order Switched System [A]. *Proc of American Control Conf* [C]. Boston, 2004: 4561-4562.

[6] Johansson M, Rantzer A. Computation of Piecewise Quadratic Lyapunov Functions for Hybrid Systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(4): 555-559.

[7] 程代展, 秦化淑. 平面系统稳定性的间接方法[J]. ***控制理论与应用***, 1999, 16(5): 651-654.
(Cheng D Z, Qin H S. Indirect Method for Stability of Plane Systems[J]. *Control Theory and Applications*, 1999, 16(5): 651-654.)

[8] Skafidas E, Evans R J, Savkin A V, et al. Stability Results for Switched Controller Systems[J]. *Automatica*, 1999, 35(4): 553-564.

[9] Boyd S, Ghaoui El, Feron E, et al. *Linear Matrix Inequality in System and Control Theory* [M]. Philadelphia Press, 1994.