文章编号: 1001-0920(2006)11-1201-07

区间分析及其在控制理论中的应用

彭 瑞, 岳继光
(同济大学 控制科学与工程系, 上海 200092)

摘 要: 对区间分析理论及其在控制领域的应用进行了综述 首先简单阐述了区间分析的基本原理, 包括区间计算、区间Newton 法和区间全局优化方法等; 然后对区间方法在参数与状态估计、鲁棒控制、智能理论等方面的应用研究成果进行了归纳和总结; 最后分析了区间方法在控制理论应用研究中所面临的主要问题, 并展望了未来的研究方向

关键词: 区间分析; 参数估计; 鲁棒控制; 区间模糊集; 区间神经网络
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

A Review on Interval Analysis and Its Applications to Control Problems

PENG Rui, YUE Ji-guang
(Department of Control Science and Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China. Correspondent: PENG Rui, E-mail: ruipeng58@sohu.com)

Abstract: An overview of interval analysis and its applications to control problems is presented. Firstly, the interval analysis including interval computation, interval Newton algorithm and interval global optimization algorithm is introduced briefly. Then main research results of interval methods to the parameter and state estimation, robust control and intelligence theory are summarized, problems and further development of research on interval methods for control are point out.

Key words: Interval analysis; Parameter estimation; Robust control; Interval fuzzy set; Interval neural networks

1 引 言

美国数学家Moore 在20 世纪50 年代提出了区间分析理论, 其初衷是为了进行自动误差分析, 之后该理论不断发展, 很快成为计算数学的一个活跃分支 区间分析以区间来实现对数据的存储与运算, 运算结果保证包含所有可能的真实值, 即结果是准确可靠的 另外人们可以很方便地把某些不确定性计算参数表述为区间, 并直接包含在区间算法之中, 这在实际应用中也具有重要意义 区间分析理论从产生至今, 已经在科学计算和工程应用中取得了大量成功的应用 一个名为《可靠计算》的国际刊物专门用来发表这方面的研究论文 研究者们还定期召开区间分析国际会议, 讨论和交流该领域的最新进展

区间分析方法具有的可以有效界定函数范围并提供数学意义上严格的运算结果的特性, 使得它特别适于解决某些非线性方程求解和全局优化问题 另外, 利用区间可以表示数据的不确定性, 因而适于解决自动控制领域中的非线性和参数不确定性现象, 如鲁棒辨识和控制等 目前, 区间方法在控制领域越来越受到关注, 研究者们已经对许多控制问题提出了基于区间分析的求解方法 此外, IEEE 控制系统学会还成立了一个专门的研究组给这方面的研究者们提供交流平台

本文在介绍区间分析理论的基础上, 对其应用于控制理论领域的主要研究成果进行了总结

2 区间分析简介

2.1 区间定义及运算[1,2]

实数集R 上的一个连续子集$X = [\underline{x}, \overline{x}]$称为实

收稿日期: 2005-09-26; **修回日期**: 2005-12-12
作者简介: 彭瑞(1977—), 女, 河南潢川人, 博士生, 从事过程控制与计算机控制、区间分析理论与应用等研究; 岳继光(1961—), 男, 河北唐山人, 教授, 博士生导师, 从事过程控制、检测技术等研究

区间, 区间 X 的上下端点分别记做 $\sup(X)$ 和 $\inf(X)$, 所有实区间的集合记作 $\mathbb{IR}$. 区间 X 的中点、宽度和绝对值分别定义为: $\mathrm{mid}(X) = (\underline{x} + \overline{x})/2$, $w(X) = \overline{x} - \underline{x}$, $|X| = \max\{|\underline{x}|, |\overline{x}|\}$.

区间四则运算法则为:

任给 $X = [\underline{x}, \overline{x}]$, $Y = [\underline{y}, \overline{y}] \in \mathbb{IR}$, 则

$$X \text{ op } Y = \{x \text{ op } y \mid x \in X, y \in Y\}, \text{op} \in \{+, -, \times, /\}.$$

分量为区间的向量称为区间向量. 所有 n 维实区间向量的集合记作 $\mathbb{IR}^n$. 对于一个 n 维区间向量 $X = (X_1, \cdots, X_n)$, 其宽度 $w(X) = \max\limits_i (w(X_i))$, 中点 $\mathrm{mid}(X) = (\mathrm{mid}(X_1), \cdots, \mathrm{mid}(X_n))$. 元素为区间的矩阵称为区间矩阵. 所有 $m \times n$ 实区间矩阵的集合记作 $\mathbb{IR}^{m \times n}$.

对于元素为 A_{ij} 的区间矩阵 A, 其宽度 $w(A) = \max\limits_{i,j}(w(A_{ij}))$, 范数 $\|A\| = \max\limits_i\{\sum\limits_j |A_{ij}|\}$.

区间向量和区间矩阵运算规则分别是实向量和实矩阵运算规则的推广, 只是分量或元素间运算采用区间运算规则.

在计算机上实现区间运算时, 一切计算结果(包括中间结果) 都必须满足包含原理, 因此区间运算采用向上向下舍入模式, 使得采用有限精度的浮点运算可以保证计算的可靠性.

2.2 区间扩展函数

区间扩展函数的概念在区间分析中非常重要, 几乎所有区间算法都基于扩展函数的包含特性. 区间扩展函数定义为: 设 f 是从 R^n 到 R^m 的函数, 且 f 在某一区间向量 $X \in \mathbb{IR}^n$ 上的值域表示为 $f(X)$, 即 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$, 如果存在从 $\mathbb{IR}^n$ 到 $\mathbb{IR}^m$ 的区间函数 F 满足: $\forall X \in \mathbb{IR}^n, f(X) \subseteq F(X)$, 则称 F 为函数 f 的区间扩展函数.

对于基本函数, 如 $f \in \{\mathrm{sqr}, \mathrm{sqrt}, \sin, \exp, \log \cdots\}$, 其扩展函数通过直接计算函数范围得到, 即 $F(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$.

同一函数可以有不同的扩展函数形式, 如自然扩展形式、中值形式、针对多项式的 Horner 形式和 Bernstein 形式等, 其中最常用的是自然扩展函数. 对于给定的由基本函数和四则运算组成的可以用表达式或算法表示的函数 f, 如果将其中每个实变量用区间变量代替, 每个基本函数和运算符用各自相应的区间基本函数和区间运算符代替, 得到的即为自然扩展函数. 若 f 连续, 其自然扩展函数 F 满足:

1) 包含性: $\forall X \in \mathbb{IR}^n, f(X) \subseteq F(X)$;

2) 收敛性: $w(X) \to 0 \Rightarrow w(F(X)) \to 0$.

2.3 求解非线性方程与全局优化

区间分析奠定了许多新的计算方法的理论基础. 这些新算法能够可靠解决一些传统方法难以解决的问题, 如给定区域内非线性方程组求解和全局优化等问题[3]. 这两个问题的求解是区间分析理论应用的最成功的两个方面, 同时也是区间方法求解一些控制问题的主要理论基础.

2.3.1 区间 Newton 法[2,4]

在给定范围 $x \in X^0$ 内, 求解非线性方程或方程组 $f(x) = 0$ 是计算数学中的一个重要问题. 区间 Newton 法是一个可靠求解该问题的较好的方法. 该方法在经典 Newton 法的基础上, 引入区间变量并利用区间计算, 使得每次迭代产生包含解的区间, 随着迭代的进行, 解区间不断缩小, 最终得到近似解和对应的解误差. 算法每次迭代需要计算区间 Newton 算子 N^k, 然后通过 $X^{(k+1)} = N^k \cap X^k$ 进行迭代. 有时需要将 X^k 一分为二, 分别进行迭代处理. 区间 Newton 法不但可以准确包含非线性方程或方程组的解, 而且迭代过程中可以判别解的存在性和唯一性, 这也是该方法突出的优点.

2.3.2 区间全局优化算法[2,5]

基于区间分析的优化方法是一种确定性全局优化方法, 能够可靠地确定给定范围内所有的全局最优解. 该类优化方法一般采用分支定界策略, 算法不断地细分解区域, 更新最优解近似值, 通过检验法则排除不可能包含最优解的区域, 最终得到所有最优解. 其中检验法则有赋值检验、单调性检验、凹凸性检验、区间 Newton 法等.

例如欲求解 n 维无约束优化问题 $\min f(x), x \in X^0$, 算法可以同时采用以下的检验法则:

赋值检验是最基本的检验法则. 对于任一 $X \in X^0$, 如果扩展函数值下界 $\inf(F(X))$ 大于当前最优值上界 τ, 则 X 应被排除; 否则保留并等待进一步处理. 一个最简单的区间优化算法就是由赋值检验和对 X^0 的不断二分组成.

目标函数欲取得极值必须满足一定的导数条件(边界除外), 利用区间方法可以很方便地确定某一区域内的导函数范围, 以此来判断该区域是否被排除. 单调性检验和凹凸性检验是分别基于一阶和二阶导数的判别法则.

另外对于由一阶导数条件得到的非线性方程组 $g(x) = 0$, 可采用区间 Newton 法判别某一区域内

是否存在极值点,并能在存在时确定该极值点范围

区间全局优化算法虽然可以可靠地确定所有最优解(实际是误差足够小的包含最优解的区域),但求解维数较高的问题时,运算速度较慢 约束优化问题求解方法以及更多的区间全局优化方面的研究内容请参阅相关文献

3　区间分析方法在控制理论中典型应用

区间方法已经在控制理论中取得了不少成功的应用,其中较典型且研究较多的主要包括参数与状态估计、鲁棒控制、区间智能理论等几个方面

3.1　参数与状态估计

3.1.1　非线性参数估计

区间分析应用于非线性模型参数估计问题有两种研究方法: 一是常规的通过优化某一目标函数寻找最优参数; 二是在误差未知但有界情况下,寻找所有与误差相符的不确定参数集 两种情况采用区间方法都可以保证获得可靠的结果

3.1.1.1　常规参数估计

常规参数估计方法如最小二乘估计、极大较小估计等都是通过优化某一目标函数来完成 许多经典优化方法(如梯度类高斯 - 牛顿法、序列二次规划法、非梯度类单纯形法等) 都可用于求解这类问题 但这些方法均属于局部方法,不能保证找到全局最优的模型参数 区间全局优化算法为非线性模型参数估计提供了一种有效途径 文献[2, 6] 等对该方法进行了研究,并且[6] 将其应用于化工过程中汽液平衡模型参数估计,结果表明此方法求得的全局最优模型参数在模型预测性能方面明显优于其他方法

3.1.1.2　有界误差估计

常规估计的结果是一个标称参数,一般没有给出参数误差大小 80 年代中期以来,一种假定误差未知但有界(UBB) 的估计理论和方法愈来愈引人注目 利用区间分析来确定非线性模型待估参数集是其中一种重要方法

此问题描述为: 对于非线性模型 $y = f(x, p) + e$,已知输入输出观测数据对 (x_i, y_i) 和误差 $e_i = [\underline{e_i}, \overline{e_i}]$,确定所有使得误差满足的参数集 P.

根据输出观测数据和误差,可得理想模型输出为 $y_{mi} = [y_i - \overline{e_i}, y_i - \underline{e_i}]$,将模型输出区间向量记做 Y_m. 设模型扩展函数为 F,则对可能的参数区间向量 $\overline{P}$ 进行如下测试处理[2, 7]:

1) 若 $F(x, \overline{P}) \subseteq Y_m$,则 $\overline{P} \subseteq P$;

2) 若 $F(x, \overline{P}) \cap Y_m = \phi$,则 $\overline{P} \cap P = \phi$;

3) 若 $w(\overline{P}) < \epsilon$,则 $\overline{P}$ 被认为足够小无需再测试;

4) 若以上 3 种情况都不满足则将 $\overline{P}$ 一分为二,对子区间向量分别进行递归测试

最终可求出待估参数集 P 的两个近似集合 P^- 和 P^+,其中 P^- 是所有满足 1) 的参数子集的并集,即确定的参数集合,P^+ 是所有满足 1) 或 3) 的参数子集的并集,即所有确定和尺寸足够小的参数集合,则待估参数集满足 $P^- \subset P \subset P^+$. 理论上可以控制 P^- 和 P^+ 以任意精度逼近 P. 该方法能够有效处理误差未知但有界情况下非线性模型的参数估计问题,且可以得到可靠的估计结果 另外,此方法具有一定的校验功能,算法结束时如确定参数集为空集则说明模型假设或观测数据存在错误

采用以上方法虽然结果可靠,但其最大问题在于随着待估参数维数增加,计算时间可能会呈指数增加 由于能够有效降低高维计算复杂度,近年来区间约束传播方法在区间分析领域引起了极大的关注[8]. 文献[9] 将区间约束传播方法引入上述的参数测试算法中,大大提高了算法效率

此外,文献[10, 11] 研究了试验因素(如测量时刻) 不确定性的情况,此时参数测试算法需进行适当调整 同样区间约束传播方法也被用来提高算法效率

3.1.2　非线性系统有界误差状态估计

非线性系统通常采用推广的卡尔曼滤波器方法进行状态估计,但因对模型作了线性化的近似,该方法所得结果通常非最优 在假定误差未知但有界的情况下,文献[12, 13] 等分别对离散时间和连续时间的非线性系统状态估计问题,采用基于区间分析的方法进行了研究,并且获得了可靠的结果 这些文献中也都采用了与上述有界误差参数估计类似的参数可行性测试和区间约束传播等方法

3.2　鲁棒控制

基于区间理论的参数方法是鲁棒控制研究的一个重要分支 在已知参数变化边界的情况下,可以用区间相关理论对参数不确定控制对象的数学模型进行描述,一般称这样的系统为区间系统 区间系统的研究大多集中于多项式和矩阵稳定性理论的研究,文献[14] 综述了这方面的研究进展 另外也有一些学者提出基于区间分析的算法,对较复杂的参数相关摄动系统进行分析和综合

3.2.1　多项式稳定理论

在经典控制方法中,常通过分析系统特征多项

式来判定系统的稳定性 在区间系统鲁棒稳定性分析中, 同样可以采用特征多项式来处理 系数带有参数摄动的多项式表示为

$$P(s,q)=\sum_{i=1}^{n}a_i(q)s^i,$$

其中 q 为不确定参数向量, $q\in Q^0, Q^0=\{q\,|\,q_i\in[\underline{q}_i,\overline{q}_i], i=1,\cdots,m\}$.

如果多项式 $P(s,a)=\sum_{i=1}^{n}a_is^i$ 的系数 a_i 相互独立且 $a_i\in[\underline{a}_i,\overline{a}_i]$, 则该多项式被称作区间多项式 前苏联学者 Kharitonov 提出的 Kharitonov 定理[15], 开创了研究区间系统鲁棒稳定性的先河 该定理指出区间多项式的 Hurwitz 稳定性等价于下列 4 顶点多项式的 Hurwitz 稳定性:

$$P_1(s)=\underline{a}_0+\underline{a}_1s+\overline{a}_2s^2+\overline{a}_3s^3+\underline{a}_4s^4+\cdots,$$

$$P_2(s)=\underline{a}_0+\overline{a}_1s+\overline{a}_2s^2+\underline{a}_3s^3+\underline{a}_4s^4+\cdots,$$

$$P_3(s)=\overline{a}_0+\underline{a}_1s+\underline{a}_2s^2+\overline{a}_3s^3+\overline{a}_4s^4+\cdots,$$

$$P_4(s)=\overline{a}_0+\overline{a}_1s+\underline{a}_2s^2+\underline{a}_3s^3+\overline{a}_4s^4+\cdots.$$

实际上 Kharitonov 定理要求的特征多项式各系数相互独立常难以满足 此后许多学者研究了更复杂的多项式族的稳定性理论, 如系数线性、多线性相关摄动的多项式族的鲁棒稳定性等, 提出了边定理、广义 Kharitonov 定理等[16]. 但这些研究成果使用时验证过程复杂、计算量大, 因此在高维问题的应用受到了限制

3.2.2 区间矩阵稳定性理论

状态空间意义下的区间系统稳定性的研究是参数鲁棒稳定性研究的另一重要方向 与多项式稳定性相比, 矩阵稳定性更复杂 在各种形式的参数摄动矩阵中, 最简单的是假设元素在各自区间内自由变动的区间矩阵 关于区间矩阵的稳定性问题, 人们试图找到类似 Kharitonov 定理的结论, 即区间矩阵的稳定性等价于顶点矩阵的稳定性, 但没有成功 文献[17] 提出利用区间矩阵分解的方法判断区间矩阵的稳定性, 即将区间矩阵分解为若干个子区间矩阵, 若验证每个子区间矩阵稳定时, 可得到整个区间矩阵的稳定性 在此基础上, 文献[18] 进一步说明了一个区间矩阵的稳定性与此区间矩阵中有限个矩阵的稳定性等价, 并给出了寻找该有限个矩阵的更有效的计算方法 矩阵分解的方法虽然从理论上给出了区间矩阵稳定性的充要条件, 具有普遍性但计算量很大 很多学者提出了一些判定区间矩阵稳定的充分条件或是针对某些特殊类型的区间矩阵给出了更有效的稳定性判据[19~22]. 另外, 由于时滞存在是导致系统不稳定的一个重要因素, 时滞区间系统的稳定性问题也引起了不少的关注[23,24].

区间矩阵稳定性问题虽已取得了很多研究结果, 但现有结果中, 有的条件太复杂, 计算量很大; 有的条件虽然简单, 但适用范围较窄 因此这方面仍须做很多工作

3.2.3 利用区间算法进行鲁棒性分析和综合

基于多项式族和区间矩阵的稳定性理论, 实际上主要是利用了区间而不是区间计算 近年来, 不少学者利用区间算法进行控制系统的鲁棒性分析和综合研究, 一般是针对较复杂的多项式或任意非线性相关摄动的参数不确定性系统

区间算法在性能检验、性能裕量计算、稳定参数域求解等鲁棒性分析问题中都得到了应用 对于鲁棒性检验问题, 可通过将鲁棒稳定性和鲁棒性能指标表示为一系列不等式, 进而将该问题转化为函数正性检验问题 文献[25] 通过采用区间优化算法求解函数全局最小值来判断函数正性, 而[26] 利用模区间分析法研究函数正性问题 对于多项式相关摄动系统, 基于 Bernstein 多项式的区间算法是一种很有效的鲁棒性分析方法[27]. 关于鲁棒性能裕量计算问题, 现有文献中主要研究稳定半径的求解方法 文献[2] 直接采用基于区间分析的有约束问题的优化方法来求解, 而[28] 采用区间无约束优化算法结合区间二分算法的方法来求解 除以上两个问题, 还有些学者研究更困难的稳定参数域求解问题 文献[29] 在劳斯判据基础上采用区间分析集逆运算方法对该问题进行了研究

利用区间算法进行控制器设计一般考虑在给定控制器结构的情况下, 调整控制器参数使得系统满足鲁棒稳定性或某些鲁棒性能 文献[25,30] 等分别采用具体各不相同的分支定界型区间算法, 在预先给定的控制器参数空间内寻找某一可行或是全部可行的控制器参数 文献[2] 将该问题转化为求解最大稳定度问题, 然后采用基于区间分析的求解 Minimax 问题的优化算法进行求解 此外模区间分析法和 Bernstein 多项式法也被用于鲁棒控制器设计[26,31].

区间计算方法应用于鲁棒性分析和综合, 其优势在于能够方便地处理较复杂的参数摄动系统, 具有全局性, 结果可靠, 能避免其他一些局部性方法可能会导致的误判 但该类方法同样存在不确定参数维数高时计算量大的问题, 限制了其应用范围, 因此

需进一步的研究

3.2.4　其他研究结果

除区间系统方面有较多的研究外, 近年来广义区间动力系统的稳定性也已有一些研究[32, 33]. 由于广义区间动力系统稳定性的分析既要考虑其稳定性又要考虑其正则性及脉冲膜的存在性, 故其分析比较复杂, 研究结果还相对较少, 且给出的稳定判据验证较难.

3.3　区间智能理论

区间分析与智能理论的结合也正逐渐引起人们的关注, 目前主要体现在区间模糊和区间神经网络两个方面.

3.3.1　区间模糊理论

通常模糊逻辑是采用 0, 1 之间的一个实数表示隶属度, 而在实际应用中, 有时隶属度不能准确给出, 所以采用一个区间数表示隶属度可能更为合理, 于是文献[34] 引入了区间值模糊集(IVFS) 的概念. 区间模糊理论已被用于实际系统设计过程中的决策、优化、控制等许多方面[35]. 文献[36, 37] 研究了区间模糊控制器设计方法, 且[36] 将此方法应用于一个自主导航系统的设计, 成功地实现了为微型机器人在未知迷宫中导航.

区间模糊理论虽然已有不少的研究与具体应用, 但许多理论问题如区间模糊集算子、区间模糊逻辑及推理等都还有待于进一步研究.

3.3.2　区间神经网络理论

也有些学者将区间表示方法应用于神经网络的研究之中. 文献[38] 首先提出了权值为区间数的区间神经网络, 并将其应用于模糊回归分析. 文献[39 ～ 41] 等研究了推广得到的各种形式的区间神经网络, 并研究了网络训练算法等. 类似于点值神经网络的函数逼近定理, 文献[42] 证明了 4 层前馈型区间神经网络是一个通用的区间值函数逼近器. 区间神经网络应用的一个成功例子是基因搜索[43]. 另外区间模糊神经网络方面也有一些研究, 这里不再详述.

3.4　其他应用

除了前述几方面的研究得到了较多的关注外, 区间分析还在其他一些控制问题中得到了应用, 下面对其中一些进行简要说明. 针对带有时滞或是超越函数的非有理函数型传函的系统, 文献[44] 提出一种基于区间方法的可靠的频率特性计算方法. 该方法通过区间细分实现任意精度逼近真实结果, 避免了采用近似方法或格点法处理所带来的计算结果误差难以估计的问题. 另外区间分析也在非线性控制系统中得到了应用. 文献[45] 采用集计算与约束传播方法研究了非线性离散系统状态向量或输出向量满足集员指标的控制序列计算问题, 并且其成果还被扩展应用到非线性离散系统的鲁棒控制中.

4　总结与展望

区间分析方法具有很好的可靠性, 适于处理不确定性参数, 已被用于求解一些控制问题, 并取得了较好的效果. 但目前该方法的应用仍具有局限性, 且现有的研究也还不够完善, 原因有两方面:

1) 区间数学本身固有问题的制约. 区间计算方法虽然在许多领域许多问题中取得了较大成功的应用, 但其本身存在两大问题: 相关性问题和“维数灾难”问题. 由于区间计算不考虑变量的相关性, 导致运算结果无效扩大, 从而导致迭代算法效率降低或是结果精度降低. 另外区间算法大多基于分支定界策略, 随着问题维数增加, 二分次数和计算量呈指数增加, 解决高维问题就比较困难.

2) 区间方法还未被控制领域的研究者们所广泛接受. 利用区间的优势来解决控制理论中的一些问题需要更多的研究者积极参与, 从而推动区间方法在控制领域的进一步发展.

今后还需从以下几个方面进一步研究:

1) 区间分析理论和算法的研究. 区间算法是区间方法应用于控制领域的主要基础, 如何提高算法效率需要在理论上进行更深入的探索. 由于区间约束传播方法被认为可能是区间分支定界算法过程中处理大区域高维问题的唯一方法[46], 可考虑从寻找更有效的一致性域缩减方法或是基本区间分析方法与约束传播结合等方面进行研究.

2) 目前应用领域的进一步完善. 区间分析虽已在解决某些控制问题中取得了一定的突破或进展, 但现有结果仍有许多问题没有很好地解决, 需要进一步研究.

3) 找到更多区间方法和控制理论的结合点. 虽然目前区间分析已经在控制理论中多个方向得到了应用, 但尝试利用区间方法研究和解决更多的控制问题, 甚至将区间思维拓展到控制领域的各个方面还需要大量的研究工作. 例如充分利用区间分析可靠非精确的特性, 研究如何将其直接引入到需要高速控制或对具有高安全要求的控制系统中是值得尝试的.

SUN 公司在一篇技术报告中这样评价区间方法: “随着越来越多的教育、硬件和软件支持, 区间方法将成为思考和解决实际问题的一种很自然的方

式 ’我们相信, 随着区间数学基础理论的进一步完善和更多控制界研究者们的积极参与, 区间方法必将会在控制领域的应用研究中有更多的突破

参考文献(References)

[1] Moore R E. *Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing*[D]. Starford: Stanford University, 1962.

[2] Jaulin L, Kieffer M, Didrit O, et al. *Applied Interval Analysis with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics*[M]. London: Springer-Verlag, 2001.

[3] 胡承毅, 徐山鹰, 杨晓光. 区间算法简介[J]. *系统工程理论与实践*, 2003, 23(4): 59-62.
(Hu C Y, Xu S Y, Yang X G. A Brief Introduction to the Interval Methods [J]. *System Engineering-theory and Practice*, 2003, 23(4): 59-62.)

[4] 王德人, 张连生, 邓乃杨. *非线性方程的区间算法*[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1987.
(Wang D R, Zhang L S, Deng N Y. *Interval Algorithms for Nonlinear Equations* [M]. Shanghai: Shanghai Publishing House of Science and Technology, 1987.)

[5] Hansen E R. *Global Optimization Using Interval Analysis*[M]. New York: Marcel Dekker, 1992.

[6] Gau C Y, Brennecke J F, Stadtherr M A. Reliable Nonlinear Parameter Estimation in VLE Modeling[J]. *J of Fluid Phase Equilibria*, 2000, 168(1): 1-18.

[7] Jaulin L, Walter E. Set Inversion via Interval Analysis for Nonlinear Bounded-error Estimation [J]. *Automatica*, 1993, 29(4): 1053-1064.

[8] Benhamou F, Goualard F, Granvilliers L, et al. Revising Hull and Box Consistency [A]. *Proc of the 16th Int Conf on Logic Programming* [C]. Las Cruces, 1999: 230-244.

[9] Jaulin L. Interval Constraint Propagation with Application to Bounded-error Estimation [J]. *Automatica*, 2000, 36(10): 1547-1552.

[10] Jaulin L, Walter E. Guaranteed Parameter Bounding for Nonlinear Models with Uncertain Experimental Factors[J]. *Automatica*, 1999, 35(5): 849-856.

[11] Braems I, Ramdani N, Boudenne A, et al. New Set-membership Techniques for Parameter Estimation in Presence of Model Uncertainty [A]. *Proc of the 5th Int Conf on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*[C]. Cambridge, 2005, B09: 1-9.

[12] Kieffer M, Jaulin L, Walter E. Guaranteed Recursive Nonlinear State Estimation Using Interval Analysis [A]. *Proc of the 37th IEEE Conf on Decision and Control*[C]. Tampa, 1998: 3966-3971.

[13] Jaulin L. Nonlinear Bounded-error State Estimation of Continuous-time Systems [J]. *Automatica*, 2002, 38(6): 1079-1082.

[14] 张大庆, 何希勤, 张庆灵. 区间动力系统稳定性分析的最新进展[J]. *鞍山钢铁学院学报*, 2002, 25(6): 419-423.
(Zhang D Q, He X Q, Zhang Q L. Recent Results of Stability Analysis on Interval Systems [J]. *J of Anshan Institute of I & S Technology*, 2002, 25(6): 419-423.)

[15] Kharitonov V L. Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations [J]. *Differential Equations*, 1978, 14(11): 2086-2088.

[16] Bhattacharyya S P, Chapellat H, Keel L H. *Robust Control: The Parametric Approach* [M]. Prentice-Hall, 1995.

[17] Kaining W, Anthong N M, Derong L. Necessary and Sufficient Conditions for The Hurwitz and Schur Stability of Interval Matrices [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(6): 1251-1255.

[18] 廖晓昕, 罗琦, 梅正扬, 等. 关于区间矩阵稳定性、可控性、可观性的充要条件的注记[J]. *自动化学报*, 1998, 24(6): 829-833.
(Liao X X, Luo Q, Mei Z Y, et al. Notes on Necessary and Sufficient Conditions of Stability, Observability and Controllability for Interval Matrices [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24(6): 829-833.)

[19] Chen J. Sufficient Conditions on Stability of Interval Matrices: Connections and New Results [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(4): 541-544.

[20] Sezer M E, Siljak D D. On Stability of Interval Matrices [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(2): 368-371.

[21] 毛维杰, 孙优贤. 区间矩阵的鲁棒稳定性判据[J]. *控制与决策*, 1997, 12(3): 264-268.
(Mao W J, Sun Y X. Criteria for the Robust Stability of Interval Matrices[J]. *Control and Decision*, 1997, 12(3): 264-268.)

[22] 盖如栋, 麻世高, 邢长征. 区间系统的鲁棒稳定性[J]. *自动化学报*, 2003, 29(6): 922-926.
(Gai R D, Ma S G, Xing C Z. Robust Stability of Interval Systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2003, 29(6): 922-926.)

[23] Liu P L. Robust Stability of Interval Dynamic Systems with Multiple Time-delays [J]. *Electronics Letters*, 2001, 37(20): 1269-1270.

[24] 宋乾坤. 具有时滞的线性区间动力系统的鲁棒稳定性[J]. *控制理论与应用*, 2005, 22(1): 161-163.
(Song Q K. On Robust Stability of Linear Interval Systems with Time-delay [J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(1): 161-163.)

[25] Malan S, Milanese M, Taragan M. Robust Analysis and Design of Control Systems Using Interval Arithmetic[J]. *Automatica*, 1997, 33(7): 1363-1372.

[26] Vehi J, Sainz M A. Necessary and Sufficient Conditions for Robust Stability Using Modal Intervals [A]. *Proc of IEEE Midwest Symposium on Circuits and Systems*[C]. Las Cruces, 1999: 673-676.

[27] Zettler M, Garloff J. Robustness Analysis of Polynomials with Polynomials Parameter Dependency Using Bernstein Expansion [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(3): 425-431.

[28] Kwon S, Cain J T. Interval Analysis Application for Stability Margin Computation of Linear Uncertain Systems[A]. *Proc of the 28th Southeastern Symposium on System Theory*[C]. Washington: IEEE, 1996: 492-496.

[29] Walter E, Jaulin L. Guaranteed Characterization of Stability Domains via Set Inversion[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(4): 886-889.

[30] Jaulin L, Walter E. Guaranteed Tuning, with Application to Robust Control and Motion Planning [J]. *Automatica*, 1996, 32(8): 1217-1221.

[31] Dorato P. Quantified Multivariate Polynomial Inequalities [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2000, 20(5): 48-58.

[32] 徐胜元, 杨成梧. 广义区间动力系统的稳定性分析[J]. *控制理论与应用*, 2000, 17(2): 249-254.
(Xu S Y, Yang C W. On Stability Analysis of Generalized Interval Dynamic Systems [J]. *Control Theory and Applications*, 2000, 17(2): 249-254.)

[33] Lin C, Lam J, Wang J L, et al. Analysis on Robust Stability for Interval Descriptor Systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 42(4): 267-278.

[34] Turksen I B. Interval Valued Fuzzy Sets Based on Normal Forms[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20(2): 191-210.

[35] Kreinovich V, Nguyen H T. Applications of Fuzzy Intervals[A]. *Proc of NAFIPS/IFIS/NASA* [C]. Piscataway: IEEE, 1994: 461-463.

[36] Wu K C. Fuzzy Interval Control of Mobile Robots[J]. *Computers Electric Engineering*, 1996, 22(3): 211-229.

[37] Liang Q L, Mendel J M. Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems: Theory and Design [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2000, 8(5): 535-550.

[38] Ishibuchi H, Tanaka H. An Architecture of Neural Networks with Interval Weights and Its Application to Fuzzy Regression[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 57(1): 27-39.

[39] 何希勤, 黎明, 张化光. 基于区间数的神经网络逼近性质的研究[J]. *东北大学学报*, 1999, 20(5): 479-481.
(He X Q, Li M, Zhang H G. Research on Approximation Property of Neural Networks Based on Interval Numbers[J]. *J of Northeastern University*, 1999, 20(5): 479-481.)

[40] Hu C, Beheshti M, Berrashed A, et al. On Interval Weighted Three-layer Neural Networks[A]. *Proc of the 31 Annual Simulation Symposium* [C]. IEEE Computer Society Press, 1998: 188-194.

[41] Garczarczyk Z A. Interval Neural Networks[A]. *Proc of IEEE Int Symposium on Circuits and Systems*[C]. Geneva, 2000: 567-570.

[42] Mark R B. Universal Approximation Theorem for Interval Neural Networks [J]. *Reliable Computing*, 1998, 4(3): 235-239.

[43] Hu C Y, Xu S Y, Yang X G. A Review on Interval Computation-software and Applications[J]. *Int J of Computational and Numerical Analysis and Applications*, 2002, 1(2): 149-162.

[44] Barve J J. *Interval Methods for Analysis of Linear and Nonlinear Control Systems*[D]. Bombay: IIT Bombay, 2001.

[45] Jaulin L, Ratschan S, Hardouin L. Set Computation for Nonlinear Control[J]. *Reliable Computing*, 2004, 10(1): 1-26.

[46] Kearfott R B. COCOS'02, A Workshop on Global Constrained Optimization and Constraint Satisfaction [J]. *Reliable Computing*, 2003, 9(1): 81-87.