文章编号: 1001-0920(2006)11-1219-05

独立摄动参数不确定线性系统的正实控制

邵汉永[1,2], 冯纯伯[2]
(1. 曲阜师范大学 电气信息与自动化学院, 山东 日照 276826; 2. 东南大学 自动化研究所, 南京 210096)

摘　要: 考虑了一类范数有界参数不确定线性系统的鲁棒正实性分析和设计问题, 其中参数不确定性是独立摄动的. 通过构造增广系统将不确定系统的鲁棒正实分析和控制问题转化为确定系统的情形, 给出了鲁棒正实分析问题的线性矩阵不等式解法, 导出了输出反馈控制器的存在条件. 所得结论将范数有界参数不确定系统的鲁棒正实分析和控制的现有结果推进了一步.

关键词: 正实; 正实控制; 不确定系统; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Positive Real Control for Linear Systems with Independent Coefficient Perturbations

SHAO Han-yong[1,2], *FENG Chun-bo*[2]
(1. College of Electrical, Information and Automation, Qufu Normal University, Rizhao 276826, China; 2. Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China. Correspondent: SHAO Han-yong, E-mail: hanyongshao@163.com)

Abstract: Robust positive real analysis and synthesis problems are considered for a class of norm-bounded uncertain systems, where the parameters are perturbed independently. It is shown that robust positive real analysis and synthesis of the uncertain systems can be converted into those of some augmented systems without uncertainties. The robust positive real analysis problem is solved by using LMI approach. The existence conditions of output feedback controller are derived. The existing results on the robust positive real control for norm-bounded uncertain systems are generalized.

Key words: Positive real; Positive real control; Uncertain system; LMI

1 引　　言

正实概念在系统的分析和综合中起着很重要的作用, 在自适应控制、鲁棒控制系统设计和非线性系统控制等方面均有广泛应用[1~3], 如何设计控制器使闭环系统渐近稳定且传递函数正实具有重要意义. 综合控制器使闭环系统渐近稳定且传递函数正实称为正实控制问题. 文献[4]基于Riccati方程(不等式)给出了正实控制问题的存在条件以及状态反馈、输出反馈控制器的构造方法, [5]则将正实控制问题归结为线性矩阵不等式的求解问题, 指出正实控制器的存在性等价于线性矩阵不等式的可解性并给出了控制器的LMI解法. 由于各种不确定性因素的存在, 研究鲁棒正实控制问题很有必要. [6,7]就广义正实不确定情形研究了系统鲁棒正实的判定方法和输出反馈控制问题的可解条件. 至于范数有界不确定系统的鲁棒正实控制问题, [8]对状态矩阵和输入矩阵带有不确定性的线性系统, 给出了动态输出反馈使闭环系统鲁棒稳定且严格正实的条件, 证明了鲁棒正实控制问题可转化为确定系统的正实设计. 对各参数矩阵均有不确定性的系统, [9]将鲁棒正实条件化为线性矩阵不等式, 给出了系统鲁棒正实的判定方法, 研究了鲁棒控制问题的可解条件, 同

收稿日期: 2005-09-07; **修回日期**: 2005-10-30.
基金项目: 国家自然科学基金重点项目(60574080, 60404006); 曲阜师范大学博士科研启动基金项目.
作者简介: 邵汉永(1964—), 男, 山东济宁人, 博士生, 从事无源性分析, 自适应控制等研究; 冯纯伯(1928—), 男, 江苏金坛人, 中国科学院院士, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统控制、无源控制等研究.

时给出了控制器的构造步骤 [10]则对这类不确定系统给出了基于观测器的输出反馈控制器 以上这些文献讨论的不确定系统有一个共同点, 即各参数摄动最终依赖于同一矩阵的变化

本文考虑一类参数独立摄动不确定系统的鲁棒正实控制问题 以正实引理为理论基础, 以线性矩阵不等式为主要工具, 考虑系统鲁棒稳定且正实的条件, 讨论了输出反馈实现闭环系统的鲁棒稳定和正实性问题, 同时给出了控制器的存在条件

2 系统描述和基础知识

考虑下面的参数不确定系统:

$$\dot{x} = A_\Delta x + B_\Delta w + B_{1\Delta} u, \tag{1}$$

$$z = C_\Delta x + D_\Delta w + D_{12\Delta} u, \tag{2}$$

$$y = C_{1\Delta} x + D_{21\Delta} w + D_{22\Delta} u. \tag{3}$$

其中: $x \in R^n$ 为状态, $w \in R^p$ 为外部输入, $z \in R^p$ 为被控输出, $u \in R^m$ 为控制输入, $y \in R^r$ 为量测输出

对参数矩阵作以下假设:

$$\begin{bmatrix} A_\Delta & B_\Delta & B_{1\Delta} \\ C_\Delta & D_\Delta & D_{12\Delta} \\ C_{1\Delta} & D_{21\Delta} & D_{22\Delta} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A & B & B_1 \\ C & D & D_{12} \\ C_1 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B & \Delta B_1 \\ \Delta C & \Delta D & \Delta D_{12} \\ \Delta C_1 & \Delta D_{21} & \Delta D_{22} \end{bmatrix}.$$

式中: $A, B, C, D, B_1, C_1, D_{12}, D_{21}, D_{22}$ 为已知矩阵; $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D, \Delta B_1, \Delta C_1, \Delta D_{12}, \Delta D_{21}, \Delta D_{22}$ 为不确定矩阵, 且满足

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B & \Delta B_1 \\ \Delta C & \Delta D & \Delta D_{12} \\ \Delta C_1 & \Delta D_{21} & \Delta D_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} H_{11}F_{11}E_{11} & H_{12}F_{12}E_{12} & H_{13}F_{13}E_{13} \\ H_{21}F_{21}E_{21} & H_{22}F_{22}E_{22} & H_{23}F_{23}E_{23} \\ H_{31}F_{31}E_{31} & H_{32}F_{32}E_{32} & H_{33}F_{33}E_{33} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$H_{ij}, E_{ij}\,(i, j = 1, 2, 3)$ 为已知矩阵, F_{ij} 为未知矩阵且

$$F_{ij}^{\mathrm T} F_{ij} \le I, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{5}$$

为叙述方便, 以下将满足式(4) 和式(5) 的不确定性称为容许不确定性

注 1 以上对不确定性的假设意味着参数摄动可以是独立的 当 $H_{i1} = H_{i2} = H_{i3} = H_i, F_{ij} = F$, $E_{1j} = E_{2j} = E_{3j} = E_j\,(i, j = 1, 2, 3)$ 时, 条件(4) 和 (5) 退化为通常的范数有界参数不确定性描述[8~10].

本文的目的是对系统(1)～(3) 进行鲁棒正实性分析和控制 鲁棒正实分析问题是考虑系统鲁棒渐近稳定且扩展严格正实的条件, 而鲁棒正实控制问题是通过输出反馈实现闭环系统的鲁棒正实性

首先给出必要的预备知识 令 $u = 0$, 由式(1) 和式(2) 得

$$\dot{x} = A_\Delta x + B_\Delta w,$$

$$z = C_\Delta x + D_\Delta w, \tag{6}$$

它所对应的标称系统为

$$\dot{x} = A x + B w,$$

$$z = C x + D w. \tag{7}$$

于是有:

引理 1[7] 系统(7) 渐近稳定且扩展严格正实的充要条件为存在 $P > 0$, 使

$$\begin{bmatrix} PA + A^{\mathrm T}P & PB - C^{\mathrm T} \\ B^{\mathrm T}P - C & -(D + D^{\mathrm T}) \end{bmatrix} < 0. \tag{8}$$

为解决系统(1)～(3) 的鲁棒正实性分析和综合问题, 还需下面的结果:

引理 2[7] 设 Q, H, E, R 为适当维数的实矩阵且 Q 对称, R 正定, 则 $\forall F: F^{\mathrm T}F \le R$,

$$Q + HFE + E^{\mathrm T}F^{\mathrm T}H^{\mathrm T} < 0$$

成立的充要条件是: 存在 $\epsilon > 0$, 使

$$Q + \epsilon^{-2}E^{\mathrm T}RE + \epsilon^2 HH^{\mathrm T} < 0.$$

引理 3 设 Q, H_i, E_i, R_i 为适当维数的实矩阵且 Q 对称, R_i 正定, 则

$$\forall F_i: F_i^{\mathrm T}F_i \le R_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$Q + \sum_{i=1}^n H_iF_iE_i + \sum_{i=1}^n E_i^{\mathrm T}F_i^{\mathrm T}H_i^{\mathrm T} < 0$$

成立的一个充分条件是: 存在 $\epsilon > 0$, 使

$$Q + \sum_{i=1}^n \epsilon^{-2}E_i^{\mathrm T}R_iE_i + \sum_{i=1}^n \epsilon^2 H_iH_i^{\mathrm T} < 0.$$

证明 记

$$F = \mathrm{diag}\{F_1 \ \ F_2 \ \ \cdots \ \ F_n\},$$

$$R = \mathrm{diag}\{R_1 \ \ R_2 \ \ \cdots \ \ R_n\},$$

$$H = [H_1 \ \ H_2 \ \ \cdots \ \ H_n],$$

$$E^{\mathrm T} = [E_1^{\mathrm T} \ \ E_2^{\mathrm T} \ \ \cdots \ \ E_n^{\mathrm T}],$$

则

$$Q + \sum_{i=1}^n H_iF_iE_i + \sum_{i=1}^n E_i^{\mathrm T}F_i^{\mathrm T}H_i^{\mathrm T} =$$

$$Q + HFE + (HFE)^{\mathrm T}.$$

由 $F_i^{\mathrm T}F_i \le R_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 知 $F^{\mathrm T}F \le R$. 根据引理 2,

$$Q + \sum_{i=1}^n H_iF_iE_i + \sum_{i=1}^n E_i^{\mathrm T}F_i^{\mathrm T}H_i^{\mathrm T} < 0$$

成立的一个充分条件是: 存在 $\epsilon > 0$, 使

$$Q + \epsilon^{-2}E^{\mathrm T}RE + \epsilon^2 HH^{\mathrm T} < 0.$$

即

$$Q + \sum_{i=1}^n \epsilon^{-2}E_i^{\mathrm T}R_iE_i + \sum_{i=1}^n \epsilon^2 H_iH_i^{\mathrm T} < 0.$$

不难发现, 引理 3 的条件比较保守, 若将其中的

ϵ换为ϵ_i可减小保守性 但使用这个引理便于对系统(1)～(3)进行鲁棒正实性分析和设计, 可得到较为简明的结果

3　正实分析

考虑到引理 1, 先给出以下定义:

定义 2　系统(6)称为鲁棒稳定且扩展严格正实的, 若存在 $0 < P \in R^{n\times n}$ 使

$$\begin{bmatrix} PA_\Delta + A_\Delta^{\mathrm T}P & PB_\Delta - C_\Delta^{\mathrm T} \\ B_\Delta^{\mathrm T}P - C_\Delta & -(D_\Delta + D_\Delta^{\mathrm T}) \end{bmatrix} < 0$$

对所有容许不确定性都成立

注 2　当 $F_{ij} = 0\,(i, j = 1, 2)$ 时, 定义 2 中的不等式退化为(8). 这说明不确定系统(6)鲁棒稳定且扩展严格正实首先要求其标称系统(7)是渐近稳定且扩展严格正实的, 这一要求显然是合理的

根据引理 1, 只要给出系统鲁棒稳定且扩展严格正实的判别方法, 也就解决了鲁棒正实分析问题 但根据定义 2 判别系统(6)的鲁棒稳定且扩展严格正实性, 需要考虑所有容许不确定性, 是非常困难的, 必须寻求其他方法 引入增广系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_\epsilon \bar{w}, \\ z &= C_\epsilon x + D_\epsilon \bar{w}. \end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$B_\epsilon = [B\ \ \epsilon H_{11}\ \ \epsilon H_{12}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0], \tag{10}$$

$$C_\epsilon = [C^{\mathrm T}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -\epsilon^{-1}E_{11}^{\mathrm T}\ \ -\epsilon^{-1}E_{21}^{\mathrm T}]^{\mathrm T}, \tag{11}$$

$$D_\epsilon = \begin{bmatrix} D & D_{1\epsilon} \\ D_{2\epsilon} & I/2 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$D_{1\epsilon} = [0\ \ 0\ \ \epsilon H_{21}\ \ \epsilon H_{22}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0], \tag{13}$$

$$D_{2\epsilon} = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -\epsilon^{-1}E_{12}^{\mathrm T}\ \ -\epsilon^{-1}E_{22}^{\mathrm T}\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm T}. \tag{14}$$

于是有下面的分析结果:

定理 1　若存在 $\epsilon > 0$ 使系统(9)是渐近稳定且扩展严格正实的, 则系统(6)鲁棒稳定且为扩展严格正实的

证明　由定义 2, 要使系统(6)为鲁棒稳定且扩展严格正实的, 只要存在 $P > 0$ 使

$$\begin{bmatrix} PA_\Delta + A_\Delta^{\mathrm T}P & PB_\Delta - C_\Delta^{\mathrm T} \\ B_\Delta^{\mathrm T}P - C_\Delta & -(D_\Delta + D_\Delta^{\mathrm T}) \end{bmatrix} < 0$$

对所有容许不确定性都成立

记

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} PA + A^{\mathrm T}P & PB - C^{\mathrm T} \\ B^{\mathrm T}P - C & -(D + D^{\mathrm T}) \end{bmatrix},$$

$$\bar{H}_1 = \begin{bmatrix} PH_{11} \\ 0 \end{bmatrix},\ \bar{H}_2 = \begin{bmatrix} PH_{12} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{H}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -H_{21} \end{bmatrix},\ \bar{H}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -H_{22} \end{bmatrix},$$

$$\bar{E}_1 = [E_{11}\ \ 0],\ \bar{E}_2 = [0\ \ E_{12}],$$
$$\bar{E}_3 = [E_{21}\ \ 0],\ \bar{E}_4 = [0\ \ E_{22}].$$

则上述不等式可重写为

$$\bar{Q} + \sum_{i=1}^{4} \bar{H}_i \bar{F}_i \bar{E}_i + \sum_{i=1}^{4} \bar{E}_i^{\mathrm T} \bar{F}_i^{\mathrm T} \bar{H}_i^{\mathrm T} < 0.$$

这里

$$\bar{F}_1 = F_{11}, \bar{F}_2 = F_{12}, \bar{F}_3 = F_{21}, \bar{F}_4 = F_{22}.$$

由引理 3, 上述不等式成立的充分条件是: 存在 $\epsilon > 0$ 使

$$\bar{Q} + \sum_{i=1}^{4} \epsilon^2 \bar{H}_i \bar{H}_i^{\mathrm T} + \sum_{i=1}^{4} \epsilon^{-2} \bar{E}_i^{\mathrm T} \bar{E}_i < 0,$$

即

$$\bar{Q} + \epsilon^2 \bar{H} \bar{H}^{\mathrm T} + \epsilon^{-2} \bar{E}^{\mathrm T} \bar{E} < 0. \tag{15}$$

其中

$$\bar{H} = [\bar{H}_1\ \ \bar{H}_2\ \ \bar{H}_3\ \ \bar{H}_4],$$
$$\bar{E} = [\bar{E}_1^{\mathrm T}\ \ \bar{E}_2^{\mathrm T}\ \ \bar{E}_3^{\mathrm T}\ \ \bar{E}_4^{\mathrm T}]^{\mathrm T},$$

也即

$$\bar{Q} + [\epsilon \bar{H}\ \ \epsilon^{-1}\bar{E}^{\mathrm T}] \begin{bmatrix} \epsilon \bar{H}^{\mathrm T} \\ \epsilon^{-1}\bar{E} \end{bmatrix} < 0.$$

根据 Schur 补, 这个不等式等价于

$$\begin{bmatrix} \bar{Q} & \epsilon \bar{H} & \epsilon^{-1}\bar{E}^{\mathrm T} \\ \epsilon \bar{H}^{\mathrm T} & -I & 0 \\ \epsilon^{-1}\bar{E} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0,$$

即

$$\begin{bmatrix}
A^{\mathrm T}P + PA & PB - C^{\mathrm T} & \epsilon PH_{11} & \epsilon PH_{12} & 0 & 0 & \epsilon^{-1}E_{11}^{\mathrm T} & 0 & \epsilon^{-1}E_{21}^{\mathrm T} & 0 \\
B^{\mathrm T}P - C & -D^{\mathrm T} - D & 0 & 0 & -\epsilon H_{21} & -\epsilon H_{22} & 0 & \epsilon^{-1}E_{12}^{\mathrm T} & 0 & \epsilon^{-1}E_{22}^{\mathrm T} \\
\epsilon H_{11}^{\mathrm T}P & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\epsilon H_{12}^{\mathrm T}P & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\epsilon H_{21}^{\mathrm T} & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\epsilon H_{22}^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\epsilon^{-1}E_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\
0 & \epsilon^{-1}E_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\
\epsilon^{-1}E_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\
0 & \epsilon^{-1}E_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I
\end{bmatrix} < 0.$$

将倒数第 3、第 1、第 4、第 2 列换至倒数第 4、第 3、第 2、第 1 列, 同时作相应的行变换, 注意到式(10)～

(14), 易见上式等价于

$$\begin{bmatrix} PA + A^{T}P & PB_{\epsilon} - C_{\epsilon}^{T} \\ B_{\epsilon}^{T}P - C_{\epsilon} & -(D_{\epsilon} + D_{\epsilon}^{T}) \end{bmatrix} < 0.$$

由引理 1, 定理 1 得证 □

注 3 定理 1 给出了鲁棒正实分析问题的一种处理方法, 即把不确定系统的鲁棒正实性分析转化为确定系统的正实性分析. 由证明过程还可得到鲁棒正实分析问题的线性矩阵不等式解法, 注意到(15) 等价于

$$\begin{bmatrix} \bar{Q} + \epsilon^{-2}\bar{E}^{T}\bar{E} & \bar{H} \\ \bar{H}^{T} & -\epsilon^{-2}I \end{bmatrix} < 0.$$

令 $\mu = \epsilon^{-2}$, 易得:

推论 系统(6) 鲁棒稳定且为扩展严格正实的充分条件是: 存在正数 μ 及矩阵 $P > 0$, 使

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & PB - C^{T} & PH_{11} & PH_{12} & 0 & 0 \\ B^{T}P - C & \Phi_2 & 0 & 0 & -H_{21} & -H_{22} \\ H_{11}^{T}P & 0 & -\mu I & 0 & 0 & 0 \\ H_{12}^{T}P & 0 & 0 & -\mu I & 0 & 0 \\ 0 & -H_{21}^{T} & 0 & 0 & -\mu I & 0 \\ 0 & -H_{22}^{T} & 0 & 0 & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0.$$

其中

$$\Phi_1 = PA + A^{T}P + \mu E_{11}^{T}E_{11} + \mu E_{21}^{T}E_{21},$$
$$\Phi_2 = -(D + D^{T}) + \mu E_{22}^{T}E_{22} + \mu E_{12}^{T}E_{12}.$$

注意上述不等式关于 P, μ 是联合线性的, 可用 Matlab 中的 LMI 工具箱验证可行性. 因而可用 Matlab 中的 LMI 工具箱判断不确定系统(6) 的鲁棒正实性.

4 正实设计

现考虑前面提出的鲁棒正实控制问题. 类似于鲁棒正实分析问题的处理, 这里将不确定系统的鲁棒正实控制问题转化为确定系统的情形. 对系统(1)～(3) 引入增广系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \tilde{B}_{\epsilon}\bar{w} + B_1 u, \\ z &= \tilde{C}_{\epsilon}x + \tilde{D}_{\epsilon}\bar{w} + \tilde{D}_{12\epsilon}u, \\ y &= C_1 x + \tilde{D}_{21\epsilon}\bar{w} + D_{22}u. \end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$\tilde{B}_{\epsilon} = [B \quad \epsilon r_1(\bar{H}_{11}) \quad \epsilon r_1(\bar{H}_{12}) \quad 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0], \tag{17}$$

$$\tilde{D}_{21\epsilon} = [D_{21} \quad \epsilon r_2(\bar{H}_{11}) \quad \epsilon r_2(\bar{H}_{12}) \quad 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0], \tag{18}$$

$$\tilde{C}_{\epsilon} = [C^{T}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \quad -\epsilon^{-1}(c_1(\bar{E}_{11}))^{T} \quad -\epsilon^{-1}(c_1(\bar{E}_{21}))^{T}]^{T}, \tag{19}$$

$$\tilde{D}_{12\epsilon} = [D_{12}^{T}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \quad -\epsilon^{-1}(c_2(\bar{E}_{11}))^{T} \quad -\epsilon^{-1}(C_2(\bar{E}_{21}))^{T}]^{T}, \tag{20}$$

$$\tilde{D}_{\epsilon} = \begin{bmatrix} D & \bar{D}_{1\epsilon} \\ \bar{D}_{2\epsilon} & I/2 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

$r_i(M)$ 表示矩阵 M 的第 i 行, $c_i(M)$ 表示矩阵 M 的第 i 列, 而

$$\bar{H}_{11} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{31} & H_{33} \end{bmatrix},$$
$$\bar{H}_{12} = \begin{bmatrix} H_{12} & 0 \\ 0 & H_{32} \end{bmatrix},$$
$$\bar{H}_{21} = [H_{21} \quad H_{23}], \tag{22}$$

$$\bar{E}_{11}^{T} = \begin{bmatrix} E_{11}^{T} & 0 & E_{31}^{T} & 0 \\ 0 & E_{13}^{T} & 0 & E_{33}^{T} \end{bmatrix},$$
$$\bar{E}_{12} = \begin{bmatrix} E_{12} \\ E_{32} \end{bmatrix}, \quad \bar{E}_{21} = \begin{bmatrix} E_{21} & 0 \\ 0 & E_{23} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$\bar{D}_{1\epsilon} = [0\ \ 0\ \ \epsilon H_{21}\ \ \epsilon H_{22}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0], \tag{24}$$

$$\bar{D}_{2\epsilon} = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -\epsilon^{-1}\bar{E}_{12}^{T}\ \ -\epsilon^{-1}E_{22}^{T}\ \ 0\ \ 0]^{T}. \tag{25}$$

下面给出本文的主要结果:

定理 2 输出反馈控制器 $u = K(s)y$ 与系统(1)～(3) 组成的闭环系统是鲁棒稳定且扩展严格正实的, 若存在 $\epsilon > 0$ 使系统(16) 与该输出反馈组成的闭环系统是渐近稳定且扩展严格正实的.

证明 设控制器 $u = K(s)y$ 的状态空间实现为

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_0\xi + B_0 y, \\ u &= C_0\xi. \end{aligned} \tag{26}$$

令 $\eta = [x^{T}\ \ \xi^{T}]^{T}$, 将控制器(26) 作用于系统(1)～(3), 得闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\bar{A} + \Delta\bar{A})x + (\bar{B} + \Delta\bar{B})w, \\ z &= (\bar{C} + \Delta\bar{C})x + (D + \Delta\bar{D})w. \end{aligned}$$

其中

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B_1C_0 \\ B_0C_1 & A_0 + B_0D_{22}C_0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ B_0D_{21} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [C \quad D_{12}C_0],$$

$$\Delta\bar{A} = \bar{B}_0\bar{H}_{11}\bar{F}_{11}\bar{E}_{11}\bar{C}_0, \quad \Delta\bar{B} = \bar{B}_0H_{12}\bar{F}_{12}\bar{E}_{12},$$
$$\Delta\bar{C} = \bar{H}_{21}\bar{F}_{21}\bar{E}_{21}\bar{C}_0, \quad \Delta\bar{D} = H_{22}\bar{F}_{22}E_{22},$$

而

$$\bar{F}_{11} = \mathrm{diag}(F_{11}, F_{13}, F_{31}, F_{33}),$$
$$\bar{F}_{12} = \mathrm{diag}(F_{12}, F_{32}),$$
$$\bar{F}_{21} = \mathrm{diag}(F_{21}, F_{23}),\ \bar{F}_{22} = F_{22},$$
$$\bar{B}_0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B_0 \end{bmatrix},\ \bar{C}_0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C_0 \end{bmatrix}.$$

由假设(5), 显然 $\bar{F}_{ij}^{\mathrm{T}}\bar{F}_{ij} \le I,\ i, j = 1, 2$

另一方面, 系统(16) 与控制器(26) 构成的闭环系统为

$$\dot{\eta} = \bar{A}\eta + \begin{bmatrix} \hat{B}_\epsilon \\ \hat{B}_0\hat{D}_{21\epsilon} \end{bmatrix}\tilde{w},$$
$$\tilde{z} = [\hat{C}_\epsilon\ \ \hat{D}_{12\epsilon}C_0]\eta + \hat{D}_\epsilon\tilde{w}.$$

注意到(22)～ (25) 和$\hat{B}_{1\epsilon}, \hat{C}_{1\epsilon}, \hat{D}_{12\epsilon}, \hat{D}_{21\epsilon}, \hat{D}_\epsilon$的定义, 根据定理 1, 定理 2 即得证 □

由定理 2, 不确定系统的鲁棒正实控制问题可转化为确定系统的正实控制问题, 而后者可用 Riccati 方法或线性矩阵不等式方法求解[4]. 因此, 定理 2 给出了输出反馈鲁棒正实控制问题的一种处理方法

5　结　　语

对参数独立摄动不确定线性系统, 研究了鲁棒正实性分析和设计问题 通过构造增广系统将不确定系统的鲁棒正实性分析和设计转化为确定系统的情形, 导出了系统鲁棒正实性条件, 给出了输出反馈鲁棒正实控制问题的处理方法 由于参数独立摄动不确定性包括了通常的范数有界不确定性, 所得结果将现有鲁棒正实控制问题的相关结果推进了一步.

参考文献(References)

[1] Anderson B D O, Vangpanitlerd S. *Network Analysis and Synthesis: A Modern Systems Theory Approach* [M]. England Cliffs: Prentice-Hall, 1973.

[2] Vidyasagar M. *Nonlinear Systems Analysis* [M]. England Cliffs: Prentice-Hall, 1993.

[3] 王龙, 黄琳 区间有理函数严格正实性的有限检验[J]. *科学通报*, 1991, 36(4): 262-264
(Wang L, Huang L. Finite Strictly Positive Realness Test of Interval Rational Functions[J]. *Chinese Science Bulletin*, 1991, 36(4): 262-264.)

[4] Molander P, Willems J C. Synthesis of State Feedback Control Laws with a Specified Gain and Phase Margin [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1980, 25(7): 928-931.

[5] Sun W, Khargoneckar P, Shim D. Solution to the Positive Real Control Problem for Linear Time-invariant Systems[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1994, 39(10): 2034-2046.

[6] 郭雷, 忻欣, 冯纯伯 线性对象的正实控制问题[J]. *自动化学报*, 1997, 23(5): 577-582
(Guo L, Xin X, Feng C B. The Positive Real Control Problem for Generalized Linear Plants [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1997, 23(5): 577-582.)

[7] 邵汉永, 冯纯伯 一类不确定多变量系统的鲁棒严格正实性分析及其输出反馈控制[J]. *东南大学学报*, 2003, 33(4): 492-494
(Shao H Y, Feng C B. Robustly Strict Positive Real Analysis and Output Feedback Control for a Class of Uncertain MIMO Linear Systems [J]. *J of Southeast University*, 2003, 33(4): 492-494.)

[8] 邵汉永, 冯纯伯 严格正实线性多变量系统的鲁棒性分析及其输出反馈控制 [J]. *控制与决策*, 2004, 19(3): 277-280.
(Shao H Y, Feng C B. Robustness Analysis and Feedback Control for Strictly Positive Real Linear MIMO Systems[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(3): 277-280.)

[9] Xie L, Soh Y C. Positive Real Control Problem for Uncertain Linear Time-invariant Systems[J]. *Systems and Control Letters*, 1995, 24(4): 265-271.

[10] Mahmoud M S, Xie L. Positive Analysis and Synthesis for Uncertain Discrete-time Systems [J]. *IEEE Trans on Circuits System I*, 2000, 47(3): 403-406.

[11] Mahmoud M S, Soh Y C, Xie L, et al. Observed-based Positive Real Control of Uncertain Linear Systems[J]. *Automatica*, 1999, 35(4): 749-754.

(上接第 1218 页)

[9] Marcus R. A Parallel Implementation of Ant Colony Optimization[J]. *Parallel and Distributed Computing*, 2002, 62: 1421-1432

[10] Stutzle T. Parallelization Strategies for Ant Colony Optimization[A]. *Proc of Parallel Problem Solving from Nature* 1998 [C]. Berlin: Springer-Verlgy, 1998: 722-741.