文章编号: 1001-0920(2006)12-1383-04

参数不确定性广义周期时变系统的鲁棒稳定性分析

苏晓明[1], 吕明珠[1], 王 刚[1], 刁成海[2]
(1. 沈阳工业大学 理学院, 沈阳 110023; 2. 朝阳师范高等专科学校, 辽宁 朝阳 122000)

摘 要: 基于广义周期时变系统允许的充分必要条件, 提出了参数不确定性广义周期时变系统鲁棒稳定的概念, 并得到了该类系统鲁棒稳定的充分必要条件. 研究在状态反馈控制下保证闭环系统鲁棒稳定的条件, 给出了一族状态反馈鲁棒稳定器的设计方法. 引入广义周期时变系统二次稳定的概念, 讨论了二次稳定性与鲁棒稳定性的关系. 最后通过数值算例说明了所得的主要结果.

关键词: 参数不确定性; 广义周期时变系统; 线性矩阵不等式; 鲁棒稳定性; 二次稳定性
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Analysis of Robust Stability for Linear Time-varying Periodically Descriptor Systems with Uncertain Parameters

SU Xiao-ming[1], *LV Ming-zhu*[1], *WANG Gang*[1], *DIAO Cheng-hai*[2]
(1. College of Science, Shenyang University of Technology, Shenyang 110023, China; 2. Chaoyang Teacher' College, Chaoyang 122000, China. Correspondent: SU Xiao-ming, E-mail: suxm@sut.edu.cn)

Abstract: Based on the necessary and sufficient condition of admissibility for linear periodically descriptor systems with uncertain parameters, a concept of robust stability is put forward. A necessary and sufficient condition is obtained for linear time-varying periodically descriptor systems with uncertain parameters to be robust stable. Then, a condition for the close-loop system under state feedback to be robust stable is derived, with state feedback robust controllers designed. The notion of quadratic stability is introduced, and the relation between quadratic stability and robust stability is discussed. Finally, numerical examples demonstrate the proposed results.

Key words: Uncertain parameters; Periodically descriptor systems; Linear matrix inequalities; Robust stability; Quadratic stability

1 引 言

鲁棒控制问题是现代控制理论发展的必然趋势和通往实际应用的必由之路, 因而得到普遍关注和研究. 系统的鲁棒控制在工程控制的实际中起着越来越重要的作用, 但许多实际问题需要用广义系统模型才能加以准确描述, 因此广义系统的鲁棒镇定问题受到广大学者的极大关注, 并取得了一系列研究成果[1~8].

文献[9]基于矩阵不等式方法给出了一类参数不确定性广义系统的鲁棒稳定性判据; 文献[10]运用Lyapunov不等式研究广义时变周期系统的允许性, 得到了系统允许的充分必要条件. 但对广义周期时变系统鲁棒镇定问题的研究成果却很少.

本文利用不等式方法讨论广义不确定周期时变系统的鲁棒镇定问题, 给出了一族状态反馈鲁棒镇定器的设计方法, 提出了系统二次稳定的概念, 并且得到了鲁棒镇定与二次稳定的关系.

2 鲁棒稳定性

考虑如下参数不确定性广义周期时变系统:

$$E\mathring{x}(t) = [A(t) + \Delta A(t)]x(t). \tag{1}$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为系统的状态变量; $A(t)$ 为适当维数的解析的 T 周期函数矩阵; E 为定常矩阵, 且

收稿日期: 2005-09-09; **修回日期**: 2005-12-19.
基金项目: 辽宁省博士启动基金项目(20041024); 辽宁省教育厅基金项目(202062042).
作者简介: 苏晓明(1964—), 男, 沈阳人, 教授, 博士后, 从事广义系统、鲁棒控制等研究; 吕明珠(1981—), 女, 沈阳人, 从事广义系统等研究.

$\mathrm{rank}(E(t)) = q \le n$; $\Delta A(t)$ 为具有适当维数的解析的周期不确定矩阵, 且具有如下形式:

$$\Delta A(t) = D(t)F(t)M(t). \tag{2}$$

其中: $D(t)$ 和 $M(t)$ 为适当维数的解析的 T 周期函数矩阵; $F(t)$ 为具有 Lebeque 可测元的不确定的解析周期矩阵, 且满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \le I$.

定义 1 系统(1) 称为允许的, 如果它是正则、稳定、无脉冲的.

定义 2 如果系统(1) 对于给定的不确定性矩阵 $\Delta A(t)$ 都是允许的, 则称系统(1) 是鲁棒稳定的.

当 $\Delta A(t) = 0$ 时, 系统(1) 可化为

$$E\dot{x}(t) = A(t)x(t). \tag{3}$$

系统(3) 称为系统(1) 的标称系统.

引理 1[10] 设广义周期系统(2) 解析可解, 则系统(2) 是允许的充要条件是 Lyapunov 不等式

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}(t)X(t) + X^{\mathrm{T}}(t)A(t) + E^{\mathrm{T}}\dot{X}(t) < 0, \\ E^{\mathrm{T}}X(t) = X^{\mathrm{T}}(t)E \ge 0 \end{cases} \tag{4}$$

有解.

由引理 1 可以看出, 若系统(1) 是鲁棒稳定的, 则满足如下 Lyapunov 不等式:

$$\begin{cases} (A(t) + \Delta A(t))^{\mathrm{T}}X(t) + X^{\mathrm{T}}(t)(A(t) + \\ \Delta A(t)) + E^{\mathrm{T}}\dot{X}(t) < 0, \\ E^{\mathrm{T}}X(t) = X^{\mathrm{T}}(t)E \ge 0. \end{cases} \tag{5}$$

引理 2[7] 对于任意的 $x \in R^n$, 有

$$\max\{(x^{\mathrm{T}}MF(t)Nx)^2 \,|\, F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \le I\} = (x^{\mathrm{T}}MM^{\mathrm{T}}x)(x^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}Nx),$$

其中 M 和 N 是具有适当维数的实矩阵.

引理 3[7] 设矩阵 $M, N, P \in R^{n\times n}$, 满足 $M \ge 0, N \ge 0, P < 0$. 对于任意的非零向量 $x \in R^n$, 若有

$$(x^{\mathrm{T}}Px)^2 - 4(x^{\mathrm{T}}Mx)(x^{\mathrm{T}}Nx) > 0,$$

则存在常数 $\lambda > 0$, 使得下式成立:

$$\lambda^2 M + \lambda P + N < 0.$$

对于上述形式的参数不确定广义周期时变系统(1), 有如下鲁棒稳定性判据:

定理 1 系统(1) 为鲁棒稳定的充分必要条件是存在可逆矩阵 $X(t) \in R^{n\times n}$, 以及常数 $\epsilon > 0$, 满足

$$\begin{cases} E\dot{X}(t) + A^{\mathrm{T}}(t)X(t) + X^{\mathrm{T}}(t)A(t) + \\ \epsilon^{2}X^{\mathrm{T}}(t)D(t)D^{\mathrm{T}}(t)X(t) + \epsilon^{-2}M^{\mathrm{T}}(t)M(t) < 0, \\ E^{\mathrm{T}}X(t) = X^{\mathrm{T}}(t)E \ge 0. \end{cases} \tag{6}$$

证明 充分性: 设存在可逆矩阵 $X(t)$ 和常数 $\epsilon > 0$, 满足式(6), 则对于所有允许的不确定性 $\Delta A(t)$, 有

$$\begin{aligned} & E\dot{X}(t) + (A(t) + \Delta A(t))^{\mathrm{T}}X(t) + \\ & X^{\mathrm{T}}(t)(A(t) + \Delta A(t)) \le \\ & E\dot{X}(t) + A^{\mathrm{T}}(t)X(t) + X^{\mathrm{T}}(t)A(t) + \\ & \epsilon^{2}X^{\mathrm{T}}(t)D(t)D^{\mathrm{T}}(t)X(t) + \epsilon^{-2}M^{\mathrm{T}}(t)M(t). \end{aligned}$$

由引理 1 知式(5) 成立, 因此系统(1) 是鲁棒稳定的.

必要性: 设系统(1) 是鲁棒稳定的, 则对于所有允许的不确定性 $\Delta A(t)$, 存在可逆矩阵 $X(t)$ 满足式(5), 即

$$\begin{aligned} & E\dot{X}(t) + A^{\mathrm{T}}(t)X(t) + X^{\mathrm{T}}(t)A(t) + \\ & M^{\mathrm{T}}(t)F^{\mathrm{T}}(t)D^{\mathrm{T}}(t)X(t) + \\ & X^{\mathrm{T}}(t)D(t)F(t)M(t) < 0. \end{aligned}$$

令 $P = E\dot{X}(t) + A^{\mathrm{T}}(t)X(t) + X^{\mathrm{T}}(t)A(t)$, 则对于任意的非零向量 $x \in R^n$, 可得

$$x^{\mathrm{T}}Px < -2x^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}(t)D(t)F(t)M(t)x.$$

所以

$$x^{\mathrm{T}}Px < -2\max\{x^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}(t)D(t)F(t)M(t)x \,|\, F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \le I\} \le 0.$$

于是

$$(x^{\mathrm{T}}Px)^2 > 4\max\{(x^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}(t)D(t)F(t)M(t)x)^2 \,|\, F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \le I\}.$$

由引理 2 得

$$(x^{\mathrm{T}}Px)^2 > 4(x^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}(t)D(t)D^{\mathrm{T}}(t)X(t)x)(x^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}(t)M(t)x).$$

由引理 3, 存在常数 $\lambda > 0$, 使得

$$M^{\mathrm{T}}(t)M(t) + \lambda P + \lambda^2 X^{\mathrm{T}}(t)D(t)D^{\mathrm{T}}(t)X(t) < 0. \tag{7}$$

上式两端同除以 λ, 并令 $\lambda = \epsilon^2$, 可得式(6). □

3 鲁棒镇定方法

在前面鲁棒稳定性分析的基础上, 下面进一步讨论保证闭环系统是允许的状态反馈鲁棒镇定控制器的设计方法.

考虑如下不确定广义周期时变系统:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) = {} & [A(t) + \Delta A(t)]x(t) + \\ & [B(t) + \Delta B(t)]u(t). \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\Delta A(t)$ 和 $\Delta B(t)$ 为具有适当维数的解析的周期不确定矩阵, 且具有如下形式:

$$[\Delta A(t) \quad \Delta B(t)] = D(t)F(t)[M_1(t) \quad M_2(t)].$$

其中矩阵 $D(t), M_1(t), M_2(t), F(t)$ 的意义同上, 且 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \le I$.

当 $\Delta A(t) = 0, \Delta B(t) = 0$ 时, 系统(8) 成为

$$E\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t). \tag{9}$$

称系统(9) 为标称系统.

考虑状态反馈

$$u(t) = K(t)x(t), \tag{10}$$

它与系统(9) 构成的闭环系统为

$$E\dot{x}(t) = [A_c(t) + \Delta A_c(t)]x(t). \tag{11}$$

其中

$$A_c(t) = A(t) + B(t)K(t),$$
$$\Delta A_c(t) = \Delta A(t) + \Delta B(t)K(t).$$

对于系统(8), 设计一个状态反馈(10), 使闭环系统(11) 是鲁棒稳定的 相应的控制器称为鲁棒镇定器

下面给出一种状态反馈鲁棒镇定器的设计方法

定理 2　如果存在可逆矩阵 $Z(t) \in R^{n\times n}$ 以及常数 $\epsilon > 0$, 满足不等式(为书写方便, 这里省略了时间变量, 但各矩阵仍是时变的)

$$\begin{cases} E\mathring{Z}(t) + A^T(t)Z(t) + Z^T(t)A(t) + \\ 2\epsilon^2 Z^T(t)D(t)D^T(t)Z(t) + \epsilon^2 M_1^T(t)M_1(t) - \\ Z^T(t)B(t)(I + \epsilon^2 M_2^T(t)M_2(t))^{-1}B^T(t)Z(t) < 0, \\ E^T Z = Z^T E \geq 0. \end{cases} \tag{12}$$

则存在反馈控制器(10), 使闭环系统是鲁棒稳定的 若上述条件成立, 则所求的状态反馈鲁棒镇定器为

$$K(t) = -(I + \epsilon^2 M_2^T(t)M_2(t))^{-1}B^T(t)Z^{-1}(t). \tag{13}$$

证明　令

$$\begin{aligned} \hat{G} = \\ & E\mathring{Z}(t) + A^T(t)Z(t) + Z^T(t)A(t) + \\ & 2\epsilon^2 Z^T(t)D(t)D^T(t)Z(t) + \epsilon^2 M_1^T(t)M_1(t) - \\ & Z^T(t)B(t)(I + \epsilon^2 M_2^T(t)M_2(t))^{-1}B^T(t)Z(t) < 0. \end{aligned} \tag{14}$$

由于

$$\begin{aligned} & \Delta A_c(t) = \Delta A(t) + \Delta B(t)K(t) = \\ & [D(t) \quad D(t)]\begin{bmatrix} F(t) & 0 \\ 0 & F(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t)K(t) \end{bmatrix} = \\ & \bar{D}(t)\bar{F}(t)\bar{M}(t), \end{aligned}$$

其中

$$\bar{D}(t) = [D(t) \quad D(t)],\ \bar{F}(t) = \begin{bmatrix} F(t) & 0 \\ 0 & F(t) \end{bmatrix},$$
$$\bar{M}(t) = \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t)K(t) \end{bmatrix}.$$

因为 $F^T(t)F(t) \leq I$, 所以 $\bar{F}^T(t)\bar{F}(t) \leq I$. 于是

$$\begin{aligned} G = \\ & E\mathring{Z}(t) + A_c^T(t)Z(t) + Z^T(t)A_c(t) + \\ & \epsilon^2 Z^T(t)\bar{D}(t)\bar{D}^T(t)Z(t) + \epsilon^2 \bar{M}^T(t)\bar{M}(t) = \\ & E\mathring{Z}(t) + A^T(t)Z(t) + Z^T(t)A(t) + \\ & K^T(t)B^T(t)Z(t) + Z^T(t)B(t)K(t) + \\ & 2\epsilon^2 Z^T(t)D(t)D^T(t)Z(t) + \\ & \epsilon^2 M_1^T(t)M_1(t) + \epsilon^2 K^T(t)M_2^T(t)M_2(t)K(t). \end{aligned} \tag{15}$$

将 $K(t)$ 的表达式代入, 整理得

$$G + K^T(t)K(t) = \hat{G}. \tag{16}$$

由式(15) 和(16) 得 $G < 0$, 即

$$\begin{aligned} & E\mathring{Z}(t) + A_c^T(t)Z(t) + Z^T(t)A_c(t) + \\ & \epsilon^2 Z^T(t)\bar{D}(t)\bar{D}^T(t)Z(t) + \epsilon^2 \bar{M}^T(t)\bar{M}(t) < 0. \end{aligned}$$

由定理 1 知, 闭环系统(11) 是鲁棒稳定的 □

4　二次稳定性

下面介绍不确定广义周期时变系统的二次稳定性概念, 并讨论二次稳定性与鲁棒稳定性的关系

对于系统(1), 其不确定性 $\Delta A(t)$ 具有式(2) 的结构 取广义 Lyapunov 函数

$$V(t) = x^T E^T X(t)x, \tag{17}$$

其中 $X(t) \in R^{n\times n}$. 上式对 t 求导, 得

$$\begin{aligned} & \dot{V}(t) = \\ & x^T\{E\mathring{X}(t) + [A(t) + \Delta A(t)]^T X(t) + \\ & X^T(t)[A(t) + \Delta A(t)]\}x. \end{aligned} \tag{18}$$

定义 3　对于系统(1), 若存在矩阵 $X(t) \in R^{n\times n}$ 和正定矩阵 $W(t) \in R^{n\times n}$, 使得系统(1) 满足

$$\begin{cases} E^T\mathring{X}(t) + (A(t) + \Delta A(t))^T X(t) + \\ X^T(t)(A(t) + \Delta A(t)) \leq -W(t), \\ E^T X(t) = X^T(t)E \geq 0. \end{cases} \tag{19}$$

则称系统(1) 是二次稳定的

定理 3　对于系统(1), 若其不确定性 $\Delta A(t)$ 具有式(2) 的结构, 则系统(1) 二次稳定的充分必要条件是该系统为鲁棒稳定的

证明　必要性: 由定义 4 知, 若系统(1) 二次稳定, 则存在矩阵 $X(t) \in R^{n\times n}$ 和正定矩阵 $W(t) \in R^{n\times n}$, 使式(19) 成立 由此得

$$\begin{aligned} & E\mathring{X}(t) + [A(t) + \Delta A(t)]^T X(t) + \\ & X^T(t)[A(t) + \Delta A(t)] \leq -W(t) < 0. \end{aligned}$$

即系统是鲁棒稳定的

充分性: 设系统(1) 是鲁棒稳定的, 由定理 1 知, 存在可逆矩阵 $X(t)$, 满足不等式

$$\begin{cases} E\mathring{X}(t) + A^T(t)X(t) + X^T(t)A(t) + \\ X^T(t)D(t)D^T(t)X(t) + M^T(t)M(t) < 0, \\ E^T X(t) = X^T(t)E. \end{cases} \tag{20}$$

由于

$$\begin{aligned} & E\mathring{X}(t) + (A(t) + \Delta A(t))^T X(t) + \\ & X^T(t)(A(t) + \Delta A(t)) \leq \\ & E\mathring{X}(t) + A^T(t)X(t) + X^T(t)A(t) + \\ & X^T(t)D(t)D^T(t)X(t) + M^T(t)M(t), \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} & W(t) = \\ & -(E\mathring{X}(t) + A^T(t)X(t) + X^T(t)A(t) + \end{aligned}$$

$X^{\mathrm{T}}(t)D(t)D^{\mathrm{T}}(t)X(t) + M^{\mathrm{T}}(t)M(t))$.

由式(20)得 $W(t) > 0$, 于是有

$$E^{\mathrm{T}}\dot{X}(t) + (A(t) + \Delta A(t))^{\mathrm{T}}X(t) + X^{\mathrm{T}}(t)(A(t) + \Delta A(t)) \leq -W(t),$$
$$E^{\mathrm{T}}X(t) = X^{\mathrm{T}}(t)E \geq 0.$$

因此系统(1)是二次稳定的. □

5 算 例

在解析的周期系统(8)中, 取周期 $T = 10$, 当 $1 \leq t \leq 11$ 时, 各系数矩阵的表达式如下:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A(t) = \begin{bmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix},$$
$$B(t) = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}, D(t) = \begin{bmatrix} 0.1t \\ -0.5t \end{bmatrix},$$
$$M_1(t) = [-0.05t \quad 0.1t], M_2(t) = 0.1t.$$

取 $\epsilon = 1$, 计算得

$$V(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & -t \end{bmatrix}.$$

满足线性矩阵不等式(12). 因此得控制器增益

$$K(t) = \frac{1}{1 + 0.01t^2}[te^{-t} \quad 1],$$

使得闭环系统是鲁棒稳定的.

6 结 语

本文利用矩阵不等式方法研究广义不确定周期时变系统鲁棒稳定的充分必要条件, 并给出了一族状态反馈鲁棒稳定器的设计方法. 所得结果是广义定常系统相应结论向广义时变系统的自然推广, 具有一定的理论意义.

参考文献(References)

[1] Xu S, Yang C, Niu Y, et al. Robust Stabilization of Uncertain Discrete-time Singular Systems[J]. *Automatica*, 2001, 37(7): 769-774.

[2] Fang C, Chang F. Analysis of Stability Robustness for Generalized State-space Systems with Structured Perturbations[J]. *Systems and Control Letters*, 1993, 21(2): 109-114.

[3] Huang S, Ren W. New Results on the Robust Bounds of Linear Uncertain Systems[J]. *Int J of Systems Science*, 1997, 28(2): 141-144.

[4] Xie L, Souza C E D. Robust H_∞ Control for Linear Systems with Norm-bounded Time-varying Uncertainty[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(6): 1188-1191.

[5] Shen T L. *H_∞ Control Theory and Application*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996: 177-186.

[6] Zhang Q L, Xu X H. Robust Control for Descriptor Systems[A]. *33th IEEE Conf on Decision and Control*[C]. New York: Oxford University Press, 1994: 2981-2982.

[7] Bittati S. 30 Years of Periodic Control-form Analysis to Design[A]. *Proc of the Third Asian Control Conf*[C]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 2000: 1253-1258.

[8] Campell S L, Terrel W J. Observability for Linear Time-varying Descriptor System[J]. *SIAM J of Matrix Analysis and Application*, 1991, 12(4): 484-496.

[9] 杨冬梅, 张庆灵, 姚波. *广义系统*[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 156-164.
(Yang D M, Zhang Q L, Yao B. *Descriptor Systems*[M]. Beijing: Science Press, 2003: 156-164.)

[10] Su X M. Analysis of Stabilization and Admissibility for Periodically Time-varying Descriptor Systems[J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Inpulse Systems*, 2005, 15(2): 19-30.

(上接第 1382 页)

[6] Danbing Sete, Anuradha M Annaswamy, John Baillieul. Adaptive Control of Nonlinear Systems with Triangular Structure[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(7): 1411-1428.

[7] Hsin-Jang Shieh, Kuo-Kai Shyu. Nonlinear Sliding-mode Torque Control with Adaptive Backstepping Approach for Induction Motor Drive[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 1999, 46(2): 1411-1428.

[8] Zhou J G, Wang Y Y. Real-time Nonlinear Adaptive Backstepping Speed Control for a PM Synchronous motor[J]. *Control Engineering Practice*, 2005, 13(10): 1259-1269.

[9] 夏超英. *交直流传动系统的自适应控制*[M]. 北京: 机械工业出版社, 1999.
(Xia C Y. *Adaptive Control of AC and DC Driving Systems*[M]. Beijing: Mechanical Industry Press, 1999.)