

文章编号: 1001-0920(2006)12-1402-05

连续回滞系统的模型参考自适应控制

冯颖¹, 胡跃明¹, 苏春翌²

(1. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广州 510640; 2. 肯考迪娅大学 机械工程系, 加拿大 蒙特利尔)

摘要: 采用Stop和Play算子表示的Prandtl-Ishlinskii回滞模型描述回滞特性, 该模型便于实现控制器的设计. 考虑带有未知回滞驱动且以状态空间形式表示的连续时间线性动态系统, 给出了模型参考自适应控制设计方案. 控制策略保证闭环系统的全局稳定性和期望的跟踪精度, 有效地抑制回滞产生的不精确和振荡现象. 数值仿真结果表明了控制算法的有效性.

关键词: 模型参考自适应控制; 回滞; 鲁棒控制

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Model Reference Adaptive Control of Continuous-time Hysteresis System s

FENG Ying¹, HU Yue-ming¹, SU Chun-yi²

(1. College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China; 2. Department of Mechanical Engineering, Concordia University, Montreal QC H3G 1M8, Canada. Correspondent: FENG Ying, Email: zhdfengying@zuaa.zju.edu.cn)

Abstract: The Prandtl-Ishlinskii model expressed by play and stop operators is used to describe the unknown hysteresis, which is convenient for controller design. For the continuous-time linear dynamic control systems in state space form preceded by the unknown hysteresis, a model reference adaptive control approach is proposed. This adaptive control law ensures global stability of the closed-loop system and the tracking with a desired precision. The undesirable inaccuracies and oscillations caused by the unknown hysteresis can be mitigated effectively. The effectiveness of the proposed method is demonstrated through a simulation example.

Key words: Model reference adaptive control; Hysteresis; Robust control

1 引言

随着各种精密加工和生产设备等对控制精度和速度的不断提高, 以压电陶瓷等功能材料为核心的先进传感和驱动技术以及由此产生的回滞现象, 成为一个新的研究方向. 回滞现象广泛存在于物理系统和生产设备, 它描述了各类系统中输入与输出之间的一种特殊性质^[1]: 对于相同的输入 $x(t)$, 输出 $f(t)$ 可以为多值, 即输出 $f(t)$ 从某初始时刻 (t_*) 开始, 不仅依赖于输入 $x(t)$ ($t > t_*$), 而且依赖于系统以前的状态. 回滞现象的不可积性, 严重影响了实际系统的性能, 并可能引起系统振荡, 造成系统不稳

定. 回滞对非线性系统性能的影响以及消除回滞的控制策略, 已引起国内外控制界的高度重视.

为了削弱回滞对系统的影响, 传统的控制策略是建立逆回滞模型^[2], 但这种策略对模型参数的依赖性较强, 使得在实际应用中受到限制. 另外, 逆回滞的建立依赖于系统回滞特性和未知参数的变化, 使其在特定情况下很难分析系统的稳定性. 回滞模型既要实现回滞特性的精确表征, 又要便于控制设计和实时应用. 目前描述回滞的模型主要有 Preisach 模型、E-J 模型、Duhem 模型、Prandtl-Ishlinskii 模型 (简称 P-I 模型) 等^[1, 3~5], 其应用场合各

收稿日期: 2005-10-13; 修回日期: 2006-02-10

基金项目: 国家自然科学基金项目 (60374016); 广东省自然科学基金项目 (020848).

作者简介: 冯颖 (1978-), 女, 山东潍坊人, 博士生, 从事回滞非线性系统控制的研究; 胡跃明 (1960-), 男, 安徽绩溪人, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制、智能控制等研究.

不相同

本文考虑一类带回滞驱动连续线性系统, 根据参考模型的匹配条件, 采用 P-I 模型表征回滞系统, 其优势在于应用 Stop 算子和 Play 算子表征回滞特性, 将鲁棒自适应控制策略与回滞模型相结合^[6], 实现模型参考自适应控制器的设计, 解决了系统稳定性分析和证明等问题。仿真结果表明, 这种控制方法能有效削弱回滞的影响, 并可保证期望的跟踪精度。

2 回滞模型

本文采用 P-I 模型^[5]来表示回滞非线性。P-I 模型是 Preisach 模型的一个子集, 由 Stop 算子和 Play 算子组成。首先介绍 P-I 模型中用到的两个基本算子。

2.1 Stop 算子和 Play 算子^[4,5]

第 1 个算子是阈值为 r 的 Stop 算子, 可表示为 $w(t) = E_r[v](t)$ 。当应力 w 小于阈值 r 时, 应变 v 和应力 w 之间满足 Hooke 定律。一旦应力达到了阈值 r , 随着 v 的增加, w 保持为常数。反之, 当应变小于阈值 r 时, 其弹力特性会马上恢复。

设 $C_m[0, t_E]$ 为分段单调连续的泛函空间, 任意输入 $v(t) \in C_m[0, t_E]$ 。对于分段单调的输入 v , Stop 算子的输入-输出特性可表示为以下解析形式:

$$\begin{cases} w(0) = e_r(v(0)), \\ w(t) = e_r(v(t) - v(t_i) + w(t_i)), \\ t_i < t < t_{i+1}, 0 \leq i \leq N-1. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $e_r(v) = \min(r, \max(-r, v))$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_E$ 为 $[0, t_E]$ 的一个分割, 输入 v 在每个 $[t_i, t_{i+1}]$ 内单调。Stop 算子的主要特性由阈值参数 r 所决定, 其值的大小决定了算子在 (v, w) 平面回滞区域的高度。

另一个基本回滞非线性算子是 Play 算子 $w(t) = F_r[v](t)$ 。类似于 Stop 算子, 对于任意给定的输入 $v(t) \in C_m[0, t_E]$, 带阈值 r 的 Play 算子 F_r 定义为

$$\begin{cases} w(0) = f_r(v(0), 0), \\ w(t) = f_r(v(t), w(t_i)), t_i < t < t_{i+1}, \\ 0 \leq i \leq N-1. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $f_r(v, w) = \max(v - r, \min((v + r), w))$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_E$ 为 $[0, t_E]$ 的一个分割, 输入 v 在每个 $[t_i, t_{i+1}]$ 内单调。

根据式(1)和(2)的定义, 易证 Play 算子 F_r 是 Stop 算子 E_r 的补, 即对于任意分段单调函数 v , 当任意 $r > 0$ 时, 两个算子满足如下关系:

$$E_r[v](t) + F_r[v](t) = v(t). \quad (3)$$

2.2 P-I 模型^[5]

类似于 Preisach 模型, P-I 模型定义为

$$w(t) = \int_0^R p(r) E_r[v](t) dr \quad (4)$$

其中: E_r 是 Stop 算子; $p(r)$ 是其密度函数, 满足 $p(r) \geq 0, \int_0^R p(r) dr < \infty$; 密度函数 $p(r)$ 可通过实验辨识得到。

利用该定义的回滞方程, 实现从 $C[t_0, \infty)$ 到 $C[t_0, \infty)$ 的算子变换, 即由 Lipschitz 连续输入得到 Lipschitz 连续输出。当 $r \rightarrow 0$ 时, 密度函数 $p(r) \rightarrow 0$ 。

由于 Play 算子 F_r 是 Stop 算子 E_r 的补, P-I 模型又可表示为

$$w(t) = p_0 v(t) - \int_0^R p(r) F_r[v](t) dr \quad (5)$$

其中 $p_0 = \int_0^R p(r) dr$ 为常数, 其值的大小依赖于密度函数。

本文将回滞输出 $w(t)$ 表示为

$$w(t) = p_0 v(t) - d[v](t), \quad (6)$$

其中

$$d[v](t) = \int_0^R p(r) F_r[v](t) dr$$

3 问题与假设

考虑如下带回滞驱动连续线性系统, 其规范形为

$$\dot{X}_p(t) = A_p X_p(t) + B w(t). \quad (7)$$

其中 $w(t)$ 作为系统输入, 即系统模型可表示为

$$\dot{X}_p(t) = A_p X_p(t) + B(p_0 v(t) - d[v](t)). \quad (8)$$

其中: v 为回滞输入, w 为回滞输出。

设计的控制目标是让式(7)中的 $X_p(t)$ 跟踪下式中的参考信号 $X_m(t)$, 即

$$\dot{X}_m(t) = A_m X_m(t) + B r(t). \quad (9)$$

其中: $r(t)$ 为期望的输入轨迹, A_m 为 $R^{n \times n}$ 中的渐近稳定矩阵, 并满足

$$\det(sI - A_m) = R_m(s) = (s + k)R(s), k > 0,$$

其中 $R(s)$ 为 Hurwitz 多项式。

系统(7)和参考系统(9)满足以下假设条件:

假设 1 $A_p \in R^{n \times n}$ 为未知矩阵, $B \in R^n$ 已知, 存在未知向量 $\alpha \in R^n$, 其中 (A_p, B) 可控, 且满足

$$A_p + B \alpha^T = A_m. \quad (10)$$

假设 2 存在已知常数 $p_{0 \min}$ 和 $p_{0 \max}$, 满足 $p_0 > p_{0 \min}$; 对于任意 $r \in [0, R]$, 满足 $p(r) \leq p_{0 \max}$ 。

4 控制器设计

为了便于控制器的设计, 将矢量方程化简为标量误差形式。引入如下引理, 其证明参见文献[7]。

引理 1 设

$$\dot{X} = AX + bv,$$

$$a(s) = \det(sI - A) = (s + k)R(s).$$

其中: A 渐近稳定, (A, b) 可控, a(s) 为其特征多项式, k > 0 则:

1) 存在 h 使得

$$h^T(sI - A)^{-1}b = \frac{1}{s + k} \quad (11)$$

2) 若 x = h^TX, 则:

$$x \text{ L } \Rightarrow X \text{ L};$$

若 $\lim_i x(t) = 0$, 则

$$\lim_i X(t) = 0$$

定义被控系统和参考模型之间的误差 E = X_p - X_m. 通过式(7), (8) 和(10) 可得

$$\dot{E} = A_m E + B(w(t) - r - \alpha^T X_p). \quad (12)$$

根据引理 1, 可将矢量方程转化为标量误差形式, 即存在 h 使得

$$h^T(sI - A_m)^{-1}B = \frac{1}{s + k} \quad (13)$$

于是, 标量误差可定义为

$$e_c = h^T E. \quad (14)$$

对式(12) 作 Laplace 变换, 可得

$$E(s) = (sI - A_m)^{-1}B(w(s) - r(s) - \alpha^T X_r(s)).$$

两边同时乘以 h^T, 并应用式(13) 和(14), 可得

$$e_c(s) = \frac{1}{s + k}(w(s) - r(s) - \alpha^T X_p(s)).$$

当初值为 0 时, 式(12) 可变换为

$$\dot{e}_c = -k e_c + (w(t) - r - \alpha^T X_p).$$

对误差 e_c 取其调整误差

$$e_\epsilon = e_c - \epsilon \text{sat}(e_c/\epsilon).$$

其中: ϵ 为任意正常数, sat(•) 为饱和函数, 定义为

$$\text{sat}(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 1; \\ z, & -1 < z < 1; \\ -1, & z \leq -1. \end{cases}$$

根据假设 1 可知, A_p ∈ R^{n×n} 未知, B ∈ Rⁿ 已知, 其中(A_p, B) 可控 根据式(10) 的匹配条件(其中矢量 α ∈ Rⁿ 未知) 可以在线估计.

设计自适应控制律, 定义如下变量:

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta, \quad \tilde{\phi} = \hat{\phi} - \phi$$

$$\tilde{p}(t, r) = \hat{p}(t, r) - p(r), \quad r \in [0, R]$$

其中: $\theta \triangleq \alpha^T p_0^{-1}$, $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计值, $\phi \in p_0^{-1}$, $\hat{\phi}$ 为 φ 的估计值, $\hat{p}(t, r)$ 为回滞密度函数 p(r) 的估计值

设

$$B(v(t)) \triangleq \int_0^R \frac{p(r)}{p_{0\min}} |F_r[v](t)| dr,$$

其估计值 $\hat{B}(t)$ 定义为

$$\hat{B}(v(t)) \triangleq \int_0^R \frac{\hat{p}(t, r)}{p_{0\min}} |F_r[v](t)| dr.$$

则其误差为

$$\tilde{B}(t) = \int_0^R \frac{1}{p_{0\min}} (\hat{p}(t, r) - p(r)) |F_r[v](t)| dr.$$

根据被控系统和参考模型, 采用如下控制律和自适应律:

$$v(t) = \hat{\phi} + \hat{\theta}^T X_p + v_h(t). \quad (15)$$

其中

$$v_h(t) = -\text{sat}(e_c/\epsilon) \hat{B}(t), \quad (16)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\lambda e_c X_p, \quad \dot{\hat{\phi}} = -\eta e_c, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}(t, r) = \text{Proj}[\hat{p}(t, r), q \frac{|F_r[v](t)|}{p_{0\min}} |e_c|]. \quad (18)$$

Proj(•, •) 为投影算子, 定义为

$$\text{Proj}[\hat{p}(t, r), q \frac{|F_r[v](t)|}{p_{0\min}} |e_c|] = \begin{cases} 0, & \hat{p}(t, r) = p_{\max}, \\ q \frac{|F_r[v](t)|}{p_{0\min}} |e_c|, & 0 < \hat{p}(t, r) < p_{\max}. \end{cases} \quad (19)$$

定理 1 对于带有回滞驱动(5) 的连续线性系统(7), 在假设 1 和 2 的基础上, 采用控制律(15) 及自适应律(17) 和(18), 可以实现:

- 1) 状态矢量有界;
- 2) 当 t → ∞ 时, 调整精度 ε 使状态矢量 X_p(t) 收敛到 X_m(t).

证明 定义如下 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \frac{1}{2} [\frac{1}{p_0} e_c^2 + \frac{1}{\lambda} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} + \frac{1}{\eta} \tilde{\phi}^T \tilde{\phi} + \int_0^R \frac{1}{q} \tilde{p}^2(t, r) dr] \quad (20)$$

当 |e_c| = ε 时, e_c = 0; 当 |e_c| < ε 时, 对于所有的 e_c, 函数 V 的导数 \dot{V} 满足

$$\dot{V}(t) = 0, \quad |e_c| < \epsilon \quad (21)$$

当 |e_c| > ε 时, 满足 e_cε = e_cε̇ 于是

$$\dot{V}(t) = -\frac{k}{p_0} e_c e_c + \frac{e_c}{p_0} (p_{0v}(t) - d[v](t) - r - \alpha^T X_p) + \frac{1}{\lambda} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} + \frac{1}{\eta} \tilde{\phi}^T \dot{\tilde{\phi}} + \int_0^R \frac{1}{q} \tilde{p}(t, r) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}(t, r) dr.$$

将控制律(15) 和自适应律(17) 代入, 化简可得

$$\dot{V}(t) = -\frac{k}{p_0} e_c e_c + e_c v_h(t) - \frac{e_c}{p_0} d[v](t) + \int_0^R \frac{1}{q} \tilde{p}(t, r) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p}(t, r) dr.$$

根据控制器设计, 可得



$$e_{\epsilon v_h}(t) - \frac{\epsilon \epsilon}{p_0} d[v](t) - \frac{|e_{\epsilon}|}{p_{0 \min}} \int_0^R \tilde{p}(t, r) |F_r[v](t)| dr$$

根据式(19), 可知 $\tilde{p}(t, r) \hat{=}$ 0 若 r 是 $R_{\max} \subset [0, R]$ 的子集, 满足 $R_{\max} = \{r: p(t, r) = p_{\max}\}$, 根据自适应律(18)和(19), 可得

$$\text{Proj}(\hat{p}(t, r), q \frac{|F_r[v](t)|}{p_{0 \min}} |e_{\epsilon}|) = 0$$

使得

$$\frac{1}{q} \int_0^R \tilde{p}(t, r) \text{Proj}(\hat{p}(t, r), q \frac{|F_r[v](t)|}{p_{0 \min}} |e_{\epsilon}|) dr - \frac{|e_{\epsilon}|}{p_{0 \min}} \int_0^R \tilde{p}(t, r) |F_r[v](t)| dr = 0$$

若 $r \in R_{\max}^c$ (R_{\max}^c 是 R_{\max} 在 $[0, R]$ 中的补集), 且 $0 < p(t, r) < p_{\max}$, 根据自适应律(19)可得

$$\text{Proj}(\hat{p}(t, r), q \frac{|F_r[v](t)|}{p_{0 \min}} |e_{\epsilon}|) = q \frac{|F_r[v](t)|}{p_{0 \min}} |e_{\epsilon}|$$

使得

$$\frac{1}{q} \int_0^R \tilde{p}(t, r) \text{Proj}(\hat{p}(t, r), q \frac{|F_r[v](t)|}{p_{0 \min}} |e_{\epsilon}|) dr - \frac{|e_{\epsilon}|}{p_{0 \min}} \int_0^R \tilde{p}(t, r) |F_r[v](t)| dr = 0$$

根据以上分析, 可得

$$\dot{V}(t) = -\frac{k}{p_0} e_{\epsilon}^2 \quad (22)$$

从方程(20)~(22)可知误差 e_{ϵ} 收敛到 0 根据 e_{ϵ} 的定义, 可得 $e_c(t)$ 有界且收敛到 $\epsilon_{\text{sat}}(e_c/\epsilon)$. 即若 $X(0)$ 有界, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, $X(t)$ 有界, 且以误差为 ϵ 实现跟踪参考模型 X_m .

值得注意的是, 此控制策略在实际应用中, 状态变量应为可取的, 即为可估计或可测的

5 仿真实例

采用文献[6]中的实际仿真系统模型, 总惯量为 $0.07 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的 0.54 m 长的柔性转轴, 其阻尼比为 0.05 , 顶端的一阶振动形状为 -2.91 . 仅考虑一阶振动和刚性运动, 在此情况下, 4 个状态变量可以直接测得. 实际上, 只需测量轴的速度和转轴顶端一次固有频率振动信号即可. 设系统模型为 $\dot{X}_p = A_p X_p + B w(t)$, $y = C X_p$, 其中 $w(t)$ 为回滞驱动的输出. 应用 Beam 理论^[8] 可得

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4.840 & -6.96 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0.07} & 0 & \frac{2}{0.07} \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \ 54 \ 0 \ -2.91 \ 0]$$

该系统可测且可观. 考虑对闭环系统进行极点配置为稳定参考模型. 其动态模型的极点为 $[-3.48 + 6.948i, -3.48 - 6.948i, 0, 0]$, 零点为 $[-21.90, 22.61]$, 其增益为 -75.43 . 设期望的极点为 $[-2, -20, -25 + 40i, -25 - 40i]$, 则相应的参考系统模型 A_m 和 α 为

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -18.4 & -10.5 & 783.2 & -27.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -36.8 & -21 & -3273.6 & -61.5 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = [-1.28 \ -0.74 \ 54.83 \ -1.91].$$

根据引理 1, 可得

$$h = [0.65 \ 0.05 \ 3.94 \ 0.02].$$

采用自适应律(15)~(19), 设 $q = 0.35, \lambda = 4.4, \eta = 0.46, \epsilon = 0.03$

在此仿真模型中, $w(t)$ 为用 P-I 模型表示的回滞输出, 密度函数为 $p(r) = a e^{-b(r-\sigma)^2}$. 设 $a = 0.5, b = 0.00105, \sigma = 2$. 仅为方便, 选取 $R = 100$ 作为积分上限. 根据回滞密度函数, 可得

$$p_0 = \int_0^{100} p(r) dr = 4.4039.$$

设参考输入信号为 $r(t) = 5.5 \sin(2.5t)$, 系统的初始状态为 $X_{p0} = [1.0 \ 0.2 \ 0 \ 1]^T, X_{m0} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, 其仿真结果见图 1 和图 2

图 1 为系统与参考模型输出之间的跟踪误差,

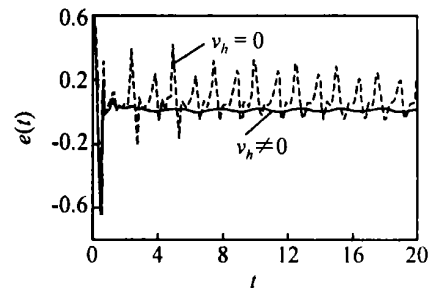


图 1 系统与参考模型输出之间的跟踪误差

$v_h = 0$ 和不带控制项 $v_h = 0$

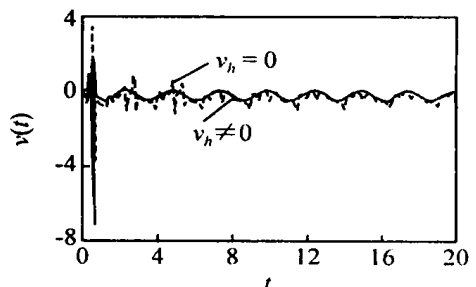


图 2 系统控制输入 $v_h = 0$ 和不带控制项 $v_h = 0$

图2为系统控制输入,由图可以看出回滞对系统的影响。本文设计的控制器能有效抑制回滞的影响,并保证期望的跟踪效果。

6 结 语

在实际应用中,由于回滞的存在,使得物理系统的控制性能受到影响。本文针对带有回滞驱动连续线性系统,提出一种鲁棒自适应控制策略,其控制器的设计保证了闭环系统的全局稳定性,并有效抑制了回滞的影响,保证了理想的跟踪精度。仿真结果证明了控制算法的正确性和有效性。

参考文献(References)

- [1] Mayergoyz I D. *Mathematical Models of Hysteresis* [M]. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [2] Tao G, Kokotovic P V. Adaptive Control of Plants with Unknown Hysteresis[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(2): 200-212.
- [3] KrasnoselM A, PokrovskiiA V. *System with Hysteresis* [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [4] Augusto Visintin. *Differential Models of Hysteresis* [M]. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [5] Martin Brokate, Jurgen Sprekels. *Hysteresis and Phase Transitions* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [6] Wang X S, Hong H, Su C Y. Model Reference Adaptive Control of Continuous-time Systems with an Unknown Input Dead-zone[A]. *IEEE Proc on Control Theory and Applications* [C]. Houston, 2003: 261-266.
- [7] Annaswamy A M, Skantze F P, Loh A P. Adaptive Control of Continuous Time System with Convex/Concave Parameterization[J]. *Automatica*, 1998, 34(1): 33-49.
- [8] Cannon R H, Schmitz E J. Initial Experiments on the Endpoint Control of a Flexible One-link Robot[J]. *Int J of Robotics Research*, 1984, 3(3): 325-338.
- [4] Sai Kolli, Gerald W Evans. A Multiple Objective Integer Programming Approach for Planning Franchise Expansion [J]. *Computers and Industrial Engineering*, 1999, 37(3): 543-561.
- [5] Kiran Karande, John R Lombard. Location Strategies of Broad-line Retailers: An Empirical Investigation [J]. *J of Business Research*, 2005, 58(5): 687-695.
- [6] Joaquin A Pacheco, Silvia Casado. Solving Two Location Models with Few Facilities by Using a Hybrid Heuristic: A Real Health Resources Case [J]. *Computers and Operations Research*, 2005, 32(12): 3075-3091.
- [7] Balram Avittathur, Janat Shah, Omprakash K Gupta. Distribution Centre Location Modelling for Differential Sales Tax Structure [J]. *European J of Operational Research*, 2005, 162(1): 191-205.
- [8] 侯丽敏, 郭毅. 连锁便利店商圈特性的实证研究 [J]. *上海财经大学学报*, 2004, 6(4): 16-22.
- (Hou L M, Guo Y. An Empirical Research on the Features of Trade Area of Chain Convenience Store [J]. *J of Shanghai University of Finance and Economics*, 2004, 6(4): 16-22.)
- [9] Zimmermann H J. Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1978, 1(1): 45-55.
- [10] Lee E S, Li R J. Fuzzy Multiple Objective Programming and Compromise Programming with Pareto Optimum [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 53(3): 275-288.
- [11] Guu S M, Wu Y K. Two-phase Approach for Solving the Fuzzy Linear Programming Problems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, 107(2): 191-195.

(上接第1401页)