

文章编号: 1001-0920(2006)12-1349-05

## $\delta$ 算子下的网络控制系统最优控制方法

纪志成, 赵维一, 谢林柏

(江南大学 控制科学与工程研究中心, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 研究网络控制系统的随机最优控制问题, 提出了针对随机时延的网络控制系统最优控制律和二次型性能指标极小的控制律设计方案. 在  $\delta$  算子域内应用动态规划理论, 设计网络控制系统的最优状态反馈和输出反馈控制律, 得到的线性二次型高斯控制器可对系统中的随机长时延进行动态补偿. 最后通过实例仿真验证了上述最优控制方案的可行性和有效性.

**关键词:** 网络控制系统;  $\delta$  算子; 随机时延; 线性二次型高斯控制; 动态规划

**中图分类号:** TP 29 **文献标识码:** A

## Optimal Control of Networked Control System Using $\delta$ Operator

J I Zh i-cheng, Z H A O W ei-y i, X I E L in-bo

(Research Center of Control Science and Engineering, Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China Correspondent: J I Zh i-cheng, E-mail: zcji@sytu.edu.cn)

**Abstract:** The stochastic control problem of networked control systems is studied. An optimal control law with the minimum performance cost criteria is proposed for networked control systems subject to random time delays in the communication networks. The state feedback and output feedback control laws for the networked control system in  $\delta$  operator domain are designed by using a dynamic programming approach. The derived optimal LQG controller can be used as a delay-compensator for networked control systems with long time delays. Finally a numerical example is given to illustrate the validity and efficiency of the proposed controller.

**Key words:** Networked control system;  $\delta$  operator; Random delay; LQG control; Dynamic programming

### 1 引言

以网络作为信息传输通道的闭环反馈控制系统称为网络控制系统(NCS)<sup>[1,2]</sup>. 网络的引入使得系统的设计与分析有别于传统的控制系统, 其特点是反馈控制系统中的控制回路通过网络信道连接而形成闭环. 网络控制系统不可避免地存在的网络时延是系统性能下降和系统不稳定的主要原因<sup>[3]</sup>. 因此, 网络控制系统的主要工作之一在于如何设计反馈控制器来使系统稳定.

为消除网络控制系统中数据传输时延给控制品质带来的不良影响, 文献[4]提出在控制器和执行器的接收端设置缓冲区的方法, 将NCS中的随机时延转化为确定性时延; 文献[5]利用NCS的确定性模

型, 设计了NCS的状态观测器. 上述方法不足之处是确定性的控制方法将人为地加大时延, 忽略系统中实际存在的不确定性时延, 从而带来系统分析和设计上的保守性.

Nilsson等<sup>[6,7]</sup>利用随机最优控制理论解决了LQG最优状态反馈的控制问题, 并针对随机短时延设计了网络控制系统的最优状态反馈和输出反馈控制律, 但该方法假定网络时延小于一个采样周期, 从而使所得结果具有一定的局限性; Lincorn等<sup>[8]</sup>研究了网络时延大于一个采样周期情况下NCS的最优控制问题; Hu等<sup>[9]</sup>在长时延下当系统指数均方稳定时, 研究了NCS的完全状态、部分状态及其输出反馈控制.

收稿日期: 2006-02-21; 修回日期: 2006-06-01.

基金项目: 江苏省高技术研究计划(工业)项目(BG2005014).

作者简介: 纪志成(1959-), 男, 杭州人, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、网络化控制等研究; 赵维一(1981-), 男, 江苏无锡人, 硕士, 从事网络化控制系统的研究.

随着宽带通信和数字通信技术的发展, 高速采样过程在控制系统中的应用也越来越多. 当系统的采样频率较高时, 传统的  $z$  变换不可避免地存在下述缺陷: 当采样周期  $h \rightarrow 0$  时, 离散系统的极点位于 1 附近, 容易导致不稳定的状况<sup>[10]</sup>. 改善这一问题可采用增量差分算子 ( $\delta$  算子) 来代替传统的移位算子. 自 Middleton 等出版关于  $\delta$  算子的专著<sup>[10]</sup> 以来, 由  $\delta$  算子描述的离散系统和采样数据系统受到了广泛关注<sup>[11, 12]</sup>.

本文针对具有随机时延的网络控制系统, 提出一种 LQG 最优控制方案, 在  $\delta$  域内应用动态规划理论, 研究 NCS 的 LQG 最优控制方法, 并设计了随机长时延情形下的动态补偿算法

## 2 网络控制系统的数学模型

### 2.1 网络控制系统的离散模型

在网络控制系统中, 由于实际的诱导时延是随机的, 网络控制系统通常归结为一种随机系统. 本文针对网络控制系统中存在的时延, 采用随机时延模型进行建模, 利用 LQG 最优控制方法分别设计状态和输出反馈控制律, 用于补偿和性能分析. 系统结构如图 1 所示<sup>[7]</sup>.

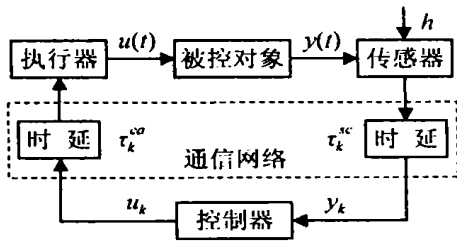


图 1 随机时延下的网络控制系统模型

设连续线性时不变被控对象的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t), \\ y(t) = Cx(t) + v(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^r; A, B, C$  为适当维数的矩阵;  $w(t)$  和  $v(t)$  为零均值白噪声向量, 满足  $E(w(t)w^T(s)) = R_1 \delta(t-s) > 0, E(v(t)v^T(s)) = R_2 \delta(t-s) > 0, E(w(t)v^T(s)) = 0$

记  $\tau_{sc}, \tau_c, \tau_{ca}$  分别为传感器到控制器的延迟、计算延迟和控制器到执行器的延迟. 其中  $\tau_c$  可以嵌入到  $\tau_{ca}$  中去考虑, 假设有下式成立:

$$\tau_{sc}^c + \tau_{ca}^c < Zh. \quad (2)$$

其中  $Z$  为正整数, 当  $Z = 1$  时属于短时延情形, 当  $Z > 1$  时属于长时延情形

在图 2 中, 定义  $t_i^{\text{act}}$  为执行器触发时刻, 在  $[t_i^{\text{act}}, t_{i+1}^{\text{act}}]$  内的控制输入为  $u_i$ , 并定义  $[t_k, t_{k+1}]$  上执行器第  $i$  次触发的控制器输入为  $u_{i|k}$ . 于是  $I_0$  表示  $t_k$  时刻

后第 1 个控制输入信号序列, 设在  $[t_k, t_{k+1}]$  区间相应地有  $q_k$  个控制输入

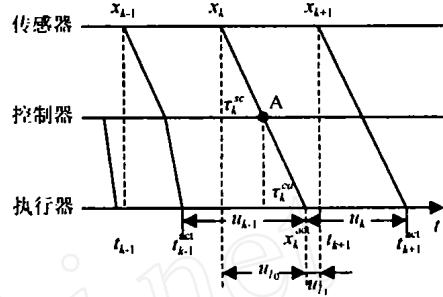


图 2 控制器和执行器为事件驱动的信号传输  
根据系统采样过程, 将被控对象 (1) 在采样区间  $[kh, (k+1)h]$  进行积分<sup>[13]</sup>, 可得

$$x_{k+1} = e^{A_h} x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\mathcal{B}_w u_{i|k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\mathcal{B}_w w_k \quad (3)$$

其中

$$t_k^0 = t_k, t_k^1 = t_{k+1}^{\text{act}}, \dots, t_k^{q_k} = t_{k+1}^{\text{sc}}, t_k^{q_k+1} = t_{k+1}$$

令

$$\Phi(\alpha, \beta, i) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times ip} & \int_{\alpha}^{\beta} e^{As} ds B & \mathbf{0}_{m \times (Z-i)p} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} = e^{A_h}, \tilde{B}_w = \int_0^h e^{As} ds B_w,$$

$$\tilde{\tau}_k = \{ \tau_k^{\text{sc}} - z, \tau_k^{\text{ca}} - z, \dots, \tau_k^{\text{sc}}, \tau_k^{\text{ca}} \},$$

$$\tilde{\Gamma}(\tilde{\tau}_k) = \int_{I_i}^{q_k} \Phi(t_{k+1} - t_k^{i+1}, t_{k+1} - t_k^i, I_i + Z - k).$$

可得网络控制系统的离散时间模型

$$x_{k+1} = \tilde{A} x_k + \tilde{\Gamma}(\tilde{\tau}_k) \begin{bmatrix} u_{k-z} \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} + \tilde{B}_w w_k \quad (4)$$

### 2.2 $\delta$ 算子下的系统差分变换

对系统 (4) 采用增量式差分运算, 可得  $\delta$  域下的离散时间模型

$$\delta x_{k+1} = \frac{x_{k+1} - x_k}{h} = A^* x_k + \Gamma(\tilde{\tau}_k) \begin{bmatrix} u_{k-z} \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} + B_w^* w_k \quad (5)$$

其中

$$A^* = \frac{1}{h} (\tilde{A} - I), \Gamma(\tilde{\tau}_k) = \frac{1}{h} \tilde{\Gamma}(\tilde{\tau}_k), B_w^* = \frac{1}{h} \tilde{B}_w.$$

引入向量  $v_k = [u_{k-z+1}^T \dots u_{k-1}^T]^T$ , 代入系统 (5), 并整理成

$$\delta x_{k+1} = \begin{bmatrix} A^* & \Gamma_Z(\tau_k) & \Gamma_a(\tau_k) \\ \Gamma_0(\tau_k) & I & B_w^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k - z \\ v_k \end{bmatrix} + \Gamma_0(\tau_k)u_k + B_w^*w_k \quad (6)$$

其中:  $\Gamma_Z \in R^{m \times p}$ ,  $\Gamma_a \in R^{m \times (Z-1)p}$ ,  $\Gamma_0 \in R^{m \times p}$ .

可见, 在  $\delta$  算子的差分变换下, 离散系统的系数矩阵都是依赖于时延  $\tau_k$ , 并且图 2 中 A 点的控制律可由当前状态  $x_k$ , 前一次控制输入  $u_{k-1}$  和时延  $\tau_k^c$  共同描述

### 3 网络控制系统的 LQG 最优控制

考虑如下离散时间的 LQG 性能指标函数:

$$J = E \left\{ h \sum_{k=0}^N \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} + x_{N+1}^T Q_f x_{N+1} \right\} \quad (7)$$

其中:  $Q_f$  是半正定实对称矩阵,  $R$  是正定对称阵

#### 3.1 随机最优状态反馈控制

**定理 1** 考虑系统(1)和(6), 当系统状态完全可得到时, 使性能指标函数(7) 极小的控制律由下式给出:

$$u_k = K_k(\tau_k^c) \begin{bmatrix} x_k \\ hu_{k-1} \\ hv_k \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中: 反馈增益阵  $K_k$  为

$$K_k(\tau_k^c, \dots, \tau_{k-Z+1}^c) = (R + \tilde{P}_{k+1}^{22})^{-1} \{ [S^T \quad 0 \quad 0] + \tilde{P}_{k+1}^{21} \}; \quad (9)$$

对称分块半正定阵  $\tilde{P}_{k+1}$  为

$$\tilde{P}_{k+1}(\tau_k^c, \dots, \tau_{k-Z+1}^c) = \frac{1}{h} \int_{\tau_k^c, \dots, \tau_{k-Z+1}^c} E \{ G^T(\tau_k) P_{k+1} G(\tau_k) | \tau_k^c, \dots, \tau_{k-Z+1}^c \}, \quad (10)$$

其中  $\tilde{P}_k^{ij}$  的上标表示  $\tilde{P}_k(\tau_k^c, \dots, \tau_{k-Z+1}^c)$  中第  $(i, j)$  分块矩阵,  $i, j = 1, 2, \dots$ ; 增广矩阵系数  $G(\tau_k)$  为

$$G(\tau_k) = \begin{bmatrix} hA^* + I & \Gamma_N & \Gamma_a & h\Gamma_0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & hI \end{bmatrix},$$

$P_k$  是  $\delta$  算子下黎卡提方程的对称半正定解, 满足迭代方程

$$P_k(\tau_{k-1}^c, \dots, \tau_{k-Z+1}^c) = hE \{ \tilde{Q} + \tilde{P}_{k+1}^{11} - K_k(R + \tilde{P}_{k+1}^{22})K_k \}, \quad (11)$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_{N+1} = \begin{bmatrix} Q_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

**证明** 由于  $\delta$  域下的离散系统(6) 状态方程中同时含有  $u_{k-1}$  和  $v_k$ , 为此引入增广状态向量

$$z_{k+1} = \begin{bmatrix} x_k \\ hu_{k-Z+1} \\ \vdots \\ hu_k \end{bmatrix} = G(\tau_k) \begin{bmatrix} z_k \\ u_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w^* \\ 0 \end{bmatrix} w_k,$$

可得

$$G(\tau_k) = \begin{bmatrix} hA^* + I & \Gamma_N & \Gamma_a & h\Gamma_0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & hI \end{bmatrix}.$$

性能指标函数在  $N$  时刻分为两部分: 受最优控制输入  $u_N$  影响的  $J_b$  和不受影响的  $J_a$ , 即  $J = J_a + J_b$  其中

$$J_a = E \left\{ h \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \right\},$$

$$J_b = E \left\{ h \begin{bmatrix} x_N \\ u_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_N \\ u_N \end{bmatrix} + x_{N+1}^T Q_f x_{N+1} \right\}.$$

将式(12) 代入, 得

$$\tilde{J}_b = E \left\{ h \begin{bmatrix} x_N \\ u_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_N \\ u_N \end{bmatrix} + z_{N+1}^T P_{N+1} z_{N+1} \right\} = V_N(z_N, \tau_{N-1}^c, \dots, \tau_{N-Z+1}^c).$$

根据动态规划原理, 要使  $u_N$  为第  $N$  段的最优控制输入,  $V_N$  必须最小化 由此得到动态规划方程

$$V_N^*(z_N, \tau_{N-1}^c, \dots, \tau_{N-Z+1}^c) = E \min_{u_N} \left\{ h \begin{bmatrix} x_N \\ u_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_N \\ u_N \end{bmatrix} + z_{N+1}^T P_{N+1} z_{N+1} \right\} + \text{tr} B_w^{*T} P_{N+1}^1 B_w^* R_1.$$

应用  $\delta$  域下式(5) 来消去  $N+1$  项, 得

$$V_N^*(z_N, \tau_{N-1}^c, \dots, \tau_{N-Z+1}^c) = h E \min_{\tau_N^c, u_N} \left\{ \begin{bmatrix} x_N \\ u_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_N \\ u_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_N \\ u_N \end{bmatrix}^T \tilde{P}_{N+1} \begin{bmatrix} z_N \\ u_N \end{bmatrix} \right\} + \text{tr} B_w^{*T} P_{N+1}^1 B_w^* R_1.$$

其中

$$\tilde{P}_{k+1}(\tau_k^c, \dots, \tau_{k-Z+1}^c) = \frac{1}{h} \int_{\tau_k^c, \dots, \tau_{k-Z+1}^c} E \{ G^T(\tau_k) P_{k+1} G(\tau_k) | \tau_k^c, \dots, \tau_{k-Z+1}^c \},$$

$$R_1 = \int_0^h e^{A(h-s)} R e^{A^T(h-s)} ds$$

使得受最优控制输入  $u_N$  影响的  $V_N^*$  达到最小值 整理  $V_N^*$  后得

$$V_N^* = h E \min_{\tau_N^c, u_N} \left\{ z_N^T \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \tilde{P}_{N+1}^{11} \right\} z_N + z_N^T ([S^T \quad 0 \quad 0] + \tilde{P}_{N+1}^{12}) u_N + u_N^T ([S^T \quad 0 \quad 0] +$$

$$\widehat{P}_{N+1}^{21} z_N + (R + \widehat{P}_{N+1}^{22}) u_N \} + \text{tr} B_w^* P_{N+1}^{11} B_w^* R_L$$

这里有

$$P_N(\overline{w}_{N-1}, \dots, \overline{w}_{N-z+1}) = hE \left\{ \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \widehat{P}_{N+1}^{11} - ([S^T \ 0 \ 0] + \widehat{P}_{N+1}^{21}) (R + \widehat{P}_{N+1}^{22})^{-1} ([S^T \ 0 \ 0] + \widehat{P}_{N+1}^{12}) \right\} + \text{tr} B_w^* P_{N+1}^{11} B_w^* R_L \quad (13)$$

因为  $P_{N+1}$  为半正定对称阵,  $\widehat{P}_{N+1}$  为对称阵,  $R > 0$ , 可得  $(hR + \widehat{P}_{N+1}^{22})$  为正定对称, 所以有

$$V_N^* = hE \min_{\overline{w}^c} \{ (R + \widehat{P}_{N+1}^{22})^{-1} ([S^T \ 0 \ 0] + \widehat{P}_{N+1}^{21}) z_N + u_N \}^T (R + \widehat{P}_{N+1}^{22}) \{ (R + \widehat{P}_{N+1}^{22})^{-1} \times ([S^T \ 0 \ 0] + \widehat{P}_{N+1}^{21}) z_N + u_N \} + z_N^T P_N z_N + \text{tr} B_w^* P_{N+1}^{11} B_w^* R_L \quad (14)$$

由此可得

$$u_N = K_N(\overline{w}_{N-1}, \dots, \overline{w}_{N-z+1}) z_N, \\ K_N(\overline{w}_{N-1}, \dots, \overline{w}_{N-z+1}) = (R + \widehat{P}_{N+1}^{22})^{-1} ([S^T \ 0 \ 0] + \widehat{P}_{N+1}^{21})$$

将此最优解代回式(14), 可得最优代价值

$$V_N^* = z_N^T P_N(\overline{w}_{N-1}, \dots, \overline{w}_{N-z+1}) z_N + \text{tr} B_w^* P_{N+1}^{11} B_w^* R_L$$

类似于最优  $u_N$  的推导, 第  $N-1$  段的最优控制策略  $u_{N-1}$  满足的动态规划方程为

$$V_{N-1}^* = \min_{\overline{w}_{N-1}} E \left\{ h \begin{bmatrix} x_{N-1} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N-1} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} + z_{N-1}^T P_N z_{N-1} \right\}$$

满足  $V_{N-1}^*$  最小化的  $u_{N-1}$  为

$$u_{N-1} = K_{N-1}(\overline{w}_{N-1}, \dots, \overline{w}_{N-z}) z_{N-1}$$

依次类推, 可得到第  $k$  段的最优状态反馈控制律(8)和(9).

### 3.2 最优输出反馈控制

在实际的网络控制系统中, 要得到系统的完全状态信息往往是很困难的, 只能利用已有输出数据构建状态估计器. 在不完全状态信息的情况下, 利用控制节点存储到  $k$  时刻为止的所有控制器输出和接收到的传感器输出信号来估计状态向量

**定理 2** 对于  $\delta$  域下的系统(6), 设  $x$  的估计值为  $\hat{x}$ ,  $k$  时刻的观测误差为  $e_k = x_k - \hat{x}_{k|k-1}$ , 则满足状态估计误差的协方差  $E\{e_k^T e_k | Y_k\}$  最小的最优状态观测器为

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \overline{L}_k (y_k - C \hat{x}_{k|k-1}), \quad (15)$$

$$\hat{\delta x}_{k+1} = A^* \hat{x}_k + \Gamma(\tau_k) \begin{bmatrix} u_k - z \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} + L_k (y_k - C \hat{x}_{k|k-1}). \quad (16)$$

其中

$$\hat{x}_{0|0} = E\{x_0\}, \\ \delta P_{k+1} = A^* P_k A^{*T} - R_1 - A^* P_k C^T (C P_k C^T + R_2)^{-1} C P_k A^*, \\ P_0 = R_0 = E\{x_0 x_0^T\}, \\ L_k = - A^* P_k C^T (C P_k C^T + R_2)^{-1}, \\ \overline{L}_k = - P_k C^T (C P_k C^T + R_2)^{-1}.$$

**证明** 若已知从  $0, \dots, k-1$  时刻输出的  $y_0, \dots, y_{k-1}$ , 则用这些数据来估计  $k$  时刻的状态  $x_k$ . 设一步状态估计为  $\hat{x}_{k|k-1}$ , 当得到  $k$  时刻的输出值  $y_k$  时, 根据线性无偏差最小方差估计准则, 状态的估计修正值为  $\hat{x}_{k|k}$ . 构造如下  $\delta$  算子下的状态观测器:

$$\hat{\delta x}_{k+1} = A^* \hat{x}_k + \Gamma(\tau_k) \begin{bmatrix} u_k - z \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} + L_k (y_k - C \hat{x}_{k|k-1}), \quad (17)$$

由此得到  $k+1$  时刻的观测误差

$$\delta e_{k+1} = \delta \hat{x}_{k+1} - \hat{\delta x}_{k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k} = (A^* - L_k C) e_k + v_k - L_k w_k \quad (18)$$

此时的观测误差协方差  $\Delta P_k / \Delta t$  为

$$\delta P_{k+1} = E\{(\delta e_{k+1} - E\{\delta e_{k+1}\}) \times (\delta e_{k+1} - E\{\delta e_{k+1}\})^T\}. \quad (19)$$

于是, 观测误差均值  $E\{e_{k+1}\}$  可由下式描述:

$$E\{\delta e_{k+1}\} = E\{(A^* - L_k C) e_k + v_k - L_k w_k\} = (A^* - L_k C) E\{e_k\}. \quad (20)$$

初始时刻的误差均值为

$$E\{e_0\} = E\{x_0 - \hat{x}_{0|0}\} = E\{x_0\} - E\{\hat{x}_{0|0}\}. \quad (21)$$

其中假设  $E\{\hat{x}_{0|0}\} = E\{x_0\}$ ,  $E\{e_0\} = 0$ . 于是  $E\{e_k\} = 0, \forall k > 0$ . 误差协方差表示为

$$\delta P_{k+1} = E\{\delta e_{k+1} \delta e_{k+1}^T\}. \quad (22)$$

式(18)代入式(22), 得

$$\delta P_{k+1} = A^* P_k A^{*T} - L_k C P_k A^* - A^* P_k C^T L_k^T + L_k C P_k C^T L_k^T + R_1 + L_k R_2 L_k^T, \quad (23)$$

这里假定  $(C P_k C^T + R_2) > 0$ . 整理后得

$$\delta P_{k+1} = A^* P_k A^{*T} - R_1 - A^* P_k C^T (C P_k C^T + R_2)^{-1} P_k C A^* + (C P_k A^{*T} + (C P_k C^T + R_2) L_k^T)^T (C P_k C^T + R_2)^{-1} (C P_k A^{*T} + (C P_k C^T + R_2) L_k^T). \quad (24)$$

引入任意向量  $\alpha \in R^n$ , 为使二次型  $\alpha^T P_{k+1} \alpha$  极小, 满

足方程  $(CP_k C^T + R_2)L_k^T = -CP_k A^{*T}$  的反馈增益  $L_k$  为

$$L_k = -A^* P_k C^T (CP_k C^T + R_2)^{-1} \quad (25)$$

此时式(24) 变为

$$\delta P_{k+1} = A^* P_k A^{*T} - R_1 - A^* P_k C^T (CP_k C^T + R_2)^{-1} P_k C A^* \quad (26)$$

值得注意的是, 反馈增益  $L_k$  不依赖于时延  $\tau^c$  和  $\tau^a$ . 观测误差为零均值白噪声, 其协方差可由  $P_k|_k = P_k - P_k C^T (CP_k C^T + R_2)^{-1} C P_k$  表示 定理得证

综上所述, 可得  $\delta$  域下的离散 LQG 最优控制律

$$u_k = K_k (\tau_k^c, \dots, \tau_{k-z+1}^c) \begin{bmatrix} x_k \\ hu_{k-z} \\ hv_k \end{bmatrix} \quad (27)$$

它使性能指标(7) 最小 使用增量式差分形式的  $\delta$  算子, 进一步延伸了文献[6, 8] 提出的控制方法

#### 4 仿真示例

考虑如下网络控制下的倒立摆数学模型:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} w, \\ y &= x. \end{aligned}$$

其中  $w$  为零均值白噪声 参数选择如下:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1, S = 0, h = 0.5$$

假设网络诱导时延  $\tau^c$  在  $[0, rh]$  ( $0 < r < 2$ ) 范围内均匀分布, 当  $z = 2$  时, 根据式(7) 可得  $\delta$  域下倒立摆离散状态方程

$$\begin{aligned} \delta x_{k+1} &= [A^* \quad \Gamma_2(\tau_k) \quad \Gamma_a(\tau_k)] \times \\ &\quad \begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-2} \\ u_{k-1} \end{bmatrix} + \Gamma_0(\tau_k) u_k + B_w^* w_k, \\ A^* &= \begin{bmatrix} 0 & 0.49 & 4 & 0 & 0.983 & 6 \\ 0 & 1.96 & 7 & - & 0 & 0.49 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_w^* &= \begin{bmatrix} 2 & 4.69 & 1 \\ - & 90 & 1.64 & 4 \end{bmatrix}, \Gamma_2(\tau_k) = 0, \\ \Gamma_a(\tau_k) &= \frac{1}{0.5} \int_{t_{k+1}^c}^{t_k^c} e^{As} ds, \\ \Gamma_0(\tau_k) &= \frac{1}{0.5} \int_{t_{k+1}^c}^{t_k^c} e^{As} ds. \end{aligned}$$

仿真利用 Matlab symbolic math toolbox 求取最优控制器, 信号时延变化范围随  $r$  取值而变化 在  $x_0 = [1 \ 0]^T$  的初始状态值下, 系统性能指标函数如图 3 所示

图 3 中实线是本文提出的 LQG 控制器, 虚线是忽略时延的线性二次型控制器 从图中可见, 在  $r < 1.1$  时,  $\delta$  算子下的 LQG 控制器性能指标略高于—

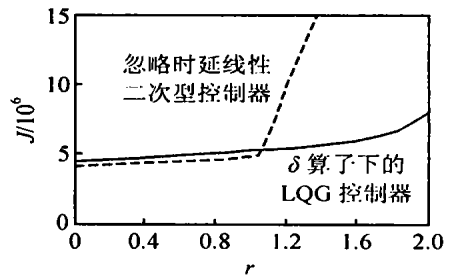


图 3 长时延 NCS 中性能指标函数值比较

般的线性二次型控制器 这是因为在时延很小的情况下, 线性二次型控制器忽略了通信时延 但是随着时延不断增大, 特别是在时延接近于两个采样周期大小时, 只有本文的 LQG 控制器保持了较低的性能消耗 这说明在长时延情形下, 本文提出的基于  $\delta$  算子的 LQG 最优控制器具有良好的控制性能和鲁棒性

#### 5 结 论

本文针对网络控制系统中存在的随机时延, 采用有限时域的增量式差分算子取代传统的移位算子来离散化系统, 将包含时延参数的当前状态量和前—时刻的控制信号组成增广向量, 并进行闭环反馈控制律的设计 通过恰当地选取状态、控制加权矩阵和过程、测量噪声矩阵, 在  $\delta$  域内应用动态规划理论设计离散 LQG 控制器, 对随机长时延进行动态补偿 实例仿真表明, 本文基于  $\delta$  算子的 LQG 最优控制方法在随机长时延情形下是一种满意的控制策略

#### 参考文献 (References)

- [1] Zhang W, Branicky M S, Philips S M. Stability of Networked Control Systems [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, 21 (1): 84-99
- [2] Walsh G C, Ye H. Scheduling of Networked Control Systems [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, 21 (1): 57-65
- [3] Cervin A, Henriksson D, Lincoln B, et al. How Does Control Timing Affect Performance [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2003, 23 (3), 16-30
- [4] Luck R, Ray A. An Observer-based compensator for Distributed Delays [J]. *Automatica*, 1990, 26 (5): 903-908
- [5] 于之训, 蒋平, 陈辉堂, 等. 具有传输时延的网络控制系统中状态观测器的设计 [J]. *信息与控制*, 2000, 15 (3): 125-130  
(Yu Z X, Jiang P, Chen H T, et al. Design of Status Observer for Network Control System with Transfer Delay [J]. *Information and Control*, 2000, 15 (3): 125-130)

(下转第 1359 页)

## 5 结 论

本文给出了一类观测时滞系统的  $H$  输出反馈问题有解的充要条件. 借助于 Krein 空间方法和重组新息分析方法, 将时滞  $H$  问题转化为无时滞的  $H_2$  估计问题. 由于连续系统的新息 Gramians 矩阵是对角矩阵, 观测时滞系统  $H$  输出反馈问题的推导过程要比离散系统简洁.

## 参考文献(References)

- [1] Smith O J M. Closer Control of Loops with Dead-time [J]. *Chemical Engineering Progress*, 1957, 53(5): 217-219
- [2] Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, et al. State Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H$  Control Problems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(8): 831-847.
- [3] Tadmor G.  $H$  Control in Systems with a Single Input Delay [A]. *Proc of 1995 American Control Conf [C]*. Seattle, 1995: 321-325
- [4] Khargonekar P P, Nagpal K M, Poolla K R.  $H$  Control with Transients [J]. *SIAM J of Control Optimization*, 1991, 29(6): 1373-1393
- [5] Fridman E, Shaked U. Finite Horizon  $H$  State-feedback Control of Continuous-time Systems with State Delays [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(12): 2406-2411.
- [6] Fridman E, Shaked U. A Descriptor System Approach to  $H$  Control of Linear Time-delay Systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(2): 253-270
- [7] Pila A W, Shaked U, Souza C E. Robust Control of Linear Time Delayed Systems [A]. *Proc of 35th Conf on Decision and Control [C]*. Japan, 1996: 1368-1369
- [8] Nagpal K M, Ravi R.  $H$  Control and Estimation Problems with Delayed Measurements: State-space Solutions [J]. *SIAM J of Control Optimization*, 1997, 35(4): 1217-1243
- [9] Shaked U, Souza C E.  $H$  Control of Linear Systems with Delayed Measurements [A]. *Proc of 1999 IEEE Int Conf on Control and Applications [C]*. Hawaii, 1999: 22-27.
- [10] Zhang H, Zhang D, Xie L.  $H$  Fixed-lag Smoothing and Prediction for Linear Continuous-time Systems [A]. *Proc of 2003 American Control Conf [C]*. Colorado, 2003: 4201-4206
- [11] Zhang H, Xie L, Soh Y. A Unified Approach to Linear Estimation for Discrete-time Systems — Part II:  $H$  Estimation [A]. *Proc of 40th IEEE Conf on Decision and Control [C]*. Florida, 2001: 2923-2928
- [12] Hassibi B, Sayed A H, Kailath T. *Indefinite-quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to  $H_2$  and  $H$  Theories* [M]. New York: SIAM, 1998
- [6] Nilsson J, Bernhardsson B. Stochastic Analysis and Control of Real-time Systems with Random Time Delays [J]. *Automatica*, 1998, 34(1): 57-64
- [7] Nilsson J. *Real-time Control Systems with Delays* [D]. Sweden: Lund Institute of Technology, 1998
- [8] Lincoln B, Bernhardsson B. Optimal Control over Networks with Long Random Delays [A]. *Proc of the Int Symp on Mathematical Theory of Networks and Systems [C]*. Perpignan, 2000: 84-90
- [9] Hu S S, Zhu Q X. Stochastic Optimal Control and Analysis of Stability of Networked Control Systems with Long Time Delays [J]. *Automatica*, 2003, 39(11): 1877-1884
- [10] Middleton R H, Goodwin G C. *Digital Control and Estimation — A Unified Approach* [M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1990
- [11] Zhang D, Wu J, Yang C. Robust Stabilization and Robust  $H$  Control for the Delta Operator Systems via State Feedback [J]. *Control Theory and Applications*, 2001, 18(5): 732-736
- [12] Li H G, Zhu X D, Wang P S. Optimal Control Law of Robot Based on Delta Operator in Visual Servoing [A]. *Proc of 2004 Int Conf on Machine Learning and Cybernetics [C]*. Shanghai, 2004, 1: 533-537.
- [13] Astrom K J, Wittenmark B. *Computer Controlled System: Theory and Design* [M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1997.

(上接第 1353 页)