第21卷 第12期 控 制 与 决 策 2006年12月
Vol 21 No. 12 Control and Decision Dec 2006

文章编号: 1001-0920(2006)12-1354-06

连续系统观测时滞的H∞控制

刘 梅[1,2], 张焕水[3], 段广仁[1], 王 伟[2]
(1. 哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术中心, 哈尔滨 150001; 2. 哈尔滨工业大学 深圳研究生院, 广东 深圳 518055; 3. 山东大学 控制科学与工程学院, 济南 250061)

摘 要: 研究一类连续系统观测时滞的H_∞控制问题. 基于Krein空间的重组新息分析方法, 给出了观测时滞系统H_∞输出反馈控制问题的解存在的充要条件. H_∞输出反馈控制器依赖于一个倒向Riccati方程和一个正向Riccati方程的解. 与传统的方法相比, 重组新息分析方法不需要增广系统的维数, 从而减少了计算量. 仿真例子验证了该方法的有效性.

关键词: 连续系统; 新息分析; 时滞观测; H_∞控制
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

H∞ Control for Continuous-time Systems with Delayed Measurement

LIU Mei[1,2], *ZHANG Huan-shui*[3], *DUAN Guang-ren*[1], *WANG Wei*[2]
(1. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 2. Shenzhen Graduate School, Harbin Institute of Technology, Shenzhen 518055, China; 3. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China. Correspondent: LIU Mei, E-mail: mayliu@hit.edu.cn)

Abstract: The H_∞ control problem for continuous-time systems with delayed measurement is studied. Based on the reorganized innovation analysis approach, a sufficient and necessary condition for the existence of the solution of the H_∞ measurement feedback control problem is derived. An H_∞ measurement feedback controller is designed by the solution of a backward Riccati equation and a forward Riccati equation. Compared with the system augmentation approach, this approach dose not require system augmentation and significantly reduces computational cost. A simulation example verifies the effectiveness of the proposed approach.

Key words: Continuous-time system; Innovation analysis; Delayed measurement; H_∞ control

1 引 言

在许多实际的控制问题中(例如过程控制), 传感器延时、长管道运输等都会造成观测时滞. 观测时滞是人们在过程控制中考虑的重点问题之一. 时滞的存在, 往往使得系统性能指标下降, 甚至造成系统不稳定. 最初, 人们利用Smith预估器[1]来处理观测时滞问题, 但是这种方法对于模型的不确定性和扰动非常敏感. 因此人们一直在不断地改进研究方法.

近年来, H_∞方法[2]在时滞系统的应用已成为研究的热点, 并且取得了大量的研究成果[3~7]. 需要指出的是, 有关观测时滞系统的H_∞控制的文献却很少. 文献[8]给出了满足H_∞性能指标的观测时滞问题解存在的充要条件, 但是时滞的引入将造成控制器存在的条件和控制器形式比较复杂, 不易计算. 文献[9]从频域的角度研究了一类定常系统观测时滞的H_∞控制问题.

本文考虑一类时变系统观测时滞的H_∞控制问题, 采用文献[10,11]提出的新方法 —— 重组新息

收稿日期: 2005-09-26; **修回日期**: 2005-11-18.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60174017); 国家杰出青年基金项目(69925308).
作者简介: 刘梅(1976—), 女, 黑龙江讷河人, 博士生, 从事时滞系统控制等研究; 张焕水(1963—), 男, 山东莱芜人, 教授, 博士生导师, 从事最优估计、鲁棒滤波与控制等研究.

分析方法, 给出了输出反馈条件下观测时滞H_∞控制问题有解的充要条件. 最后通过仿真例子验证了所提出方法的有效性.

2　问题描述和预备知识

考虑如下连续观测时滞系统:

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G_1(t)w(t) + G_2(t)u(t), \tag{1}$$

$$y(t) = H(t)x(t) + v(t), \tag{2}$$

$$z_{t-h}(t) = M(t-h)x(t-h) + v_z(t), \tag{3}$$

$$s(t) = L(t)x(t). \tag{4}$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}^r$, $w(t) \in \mathbf{R}^l$, $y(t) \in \mathbf{R}^m$, $z_{t-h}(t) \in \mathbf{R}^p$ 和 $s(t) \in \mathbf{R}^q$ 分别为状态、控制输入、过程噪声、瞬时输出、时滞观测和所要调解的信号; $v(t) \in \mathbf{R}^m$ 和 $v_z(t) \in \mathbf{R}^p$ 为观测噪声; $F(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$, $H(t)$, $M(t-h)$ 和 $L(t)$ 均为已知阶矩阵. 本文用 h 表示时滞且 $h > 0$, $*$ 表示矩阵或向量的转置.

本文所要研究的问题可描述为: 给定连续系统 (1)～(4) 和一个正数 γ, 求取一个 H_∞ 输出反馈控制器

$$u(t) = \mathbf{F}\{y(s), 0 \le s \le t; z_{s-h}(s), h \le s \le t\},$$

使得

$$\sup_{x(0),w(\cdot)} A/B < \gamma^2 \tag{5}$$

成立. 其中

$$A = x^*(T)P^c(T)x(T) + \int_0^T u^*(t)u(t)\mathrm{d}t + \int_0^T s^*(t)s(t)\mathrm{d}t,$$

$$B = x^*(0)\Pi_0^{-1}x(0) + \int_0^T w^*(t)w(t)\mathrm{d}t + \int_0^T v^*(t)v(t)\mathrm{d}t + \int_0^T v_z^*(t)v_z(t)\mathrm{d}t.$$

矩阵 Π_0 和 $P^c(T)$ 为给定的正定(或半正定) 权矩阵.

由文献[12] 知, 式(5) 可化为如下二次型:

$$J(T) = x^*(0)\Pi_0^{-1}x(0) + \int_0^T v^*(t)v(t)\mathrm{d}t + \int_0^T v_z^*(t)v_z(t)\mathrm{d}t - \gamma^{-2}\Big[x^*(T)P^c(T)x(T) + \int_0^T \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t + \int_0^T s^*(t)s(t)\mathrm{d}t\Big] > 0. \tag{6}$$

令

$$\tilde{J}(T) = x^*(T)P^c(T)x(T) + \int_0^T \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t + \int_0^T s^*(t)s(t)\mathrm{d}t$$

利用文献[12] 的结果, $\tilde{J}(T)$ 可表示为

$$\tilde{J}(T) = x^*(0)P^c(0)x(0) + \int_0^T \begin{bmatrix} u(t) - \hat{u}(t) \\ w(t) - \hat{w}(t) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_l \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u(t) - \hat{u}(t) \\ w(t) - \hat{w}(t) \end{bmatrix} \mathrm{d}t \tag{7}$$

其中

$$\begin{bmatrix} \hat{u}(\cdot) \\ \hat{w}(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_u(t) \\ K_w(t) \end{bmatrix} x(t) = -\begin{bmatrix} G_2^*(t)P^c(t) \\ -\gamma^{-2}G_1^*(t)P^c(t) \end{bmatrix} x(t). \tag{8}$$

$P^c(t)$ 为如下倒向 Riccati 方程的唯一解:

$$\dot{P}^c(t) = F^*(t)P^c(t) + P^c(t)F(t) + H^*(t)H(t) - P^c(t)G_2(t)G_2^*(t)P^c(t) + \gamma^{-2}P^c(t)G_1(t)G_1^*(t)P^c(t). \tag{9}$$

式(7) 代入式(6), 得

$$J(T) = x^*(0)[\Pi_0^{-1} - \gamma^{-2}P^c(0)]x(0) + \int_0^T (w(t) - \hat{w}(t))^*(w(t) - \hat{w}(t))\mathrm{d}t + \int_0^T \begin{bmatrix} u(t) + G_2^*(t)P^c(t)x(t) \\ y(t) - H(t)x(t) \\ z_{t-h}(t) - M(t-h)x(t-h) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\gamma^{-2}I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) + G_2^*(t)P^c(t)x(t) \\ y(t) - H(t)x(t) \\ z_{t-h}(t) - M(t-h)x(t-h) \end{bmatrix} \mathrm{d}t \tag{10}$$

其中 $z_{t-h}(t) = M(t-h) = 0, 0 \le t < h$.

通过上面的分析和文献[12] 知, H_∞ 输出反馈问题可等价于: 对于变量 $x(0)$ 和 $w(\cdot)$, 不定二次型 $J(T)$ 有最小值 $J_m(T)$, 且能求取一个控制器 $u(t)$, 使得 $J_m(T) > 0$.

3　主要结果

注意到式(10) 中含有时滞项 $z_{t-h}(t)$, 利用重组新息分析方法重组时滞观测, 将时滞问题转化为无时滞问题. 首先将问题转化到 Krein 空间, 然后进行观测重组.

3.1　Krein 空间模型

令

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \le t < h; \\ \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}, & t \ge h. \end{cases}$$

$$y_c(t)=\begin{cases}y(t),\ 0\le t<h;\\ \begin{bmatrix}y(t)\\ z_{t-h}(t)\end{bmatrix},\ t\ge h.\end{cases}$$

式(10) 中不定二次型 $J(T)$ 可表示为

$$\begin{aligned}&J(T)=\\&x^*(0)(\Pi_0^{-1}-\gamma^2P^c(0))x(0)+\\&\int_0^T(w(t)-\hat{w}(t))^*(w(t)-\hat{w}(t))\mathrm{d}t+\\&\int_0^T\begin{bmatrix}u(t)-\bar{K}_u(t)\bar{x}(t)\\ y_c(t)-\bar{H}(t)\bar{x}(t)\end{bmatrix}^*R_w(t)\times\\&\begin{bmatrix}u(t)-\bar{K}_u(t)\bar{x}(t)\\ y_c(t)-\bar{H}(t)\bar{x}(t)\end{bmatrix}\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{11}$$

其中

$$\bar{H}(t)=\begin{cases}H(t),\ 0\le t<h;\\ \begin{bmatrix}H(t)&0\\0&M(t-h)\end{bmatrix},\ t\ge h.\end{cases}$$

$$\bar{K}_u(t)=\begin{cases}K_u(t),\ 0\le t<h;\\ [K_u(t)\quad 0],\ t\ge h.\end{cases}$$

$$R_w(t)=\begin{cases}\begin{bmatrix}-\gamma^2I_r&0\\0&I_m\end{bmatrix},\ 0\le t<h;\\ \begin{bmatrix}-\gamma^2I_r&0&0\\0&I_m&0\\0&0&I_p\end{bmatrix},\ t\ge h.\end{cases}$$

此时, 系统(1)～(4) 在 t 时刻的观测为

$$y_c(t)=\left\{\begin{matrix}y(t)\\ \begin{bmatrix}y(t)\\ z_{t-h}(t)\end{bmatrix}\end{matrix}\right.=$$

$$\begin{cases}H(t)x(t)+v_c(t),\ 0\le t<h;\\ \begin{bmatrix}H(t)&0\\0&M(t-h)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\x(t-h)\end{bmatrix}+v_c(t),\\ t\ge h.\end{cases}$$

当 $0\le t<h$ 时, $v_c(t)=v(t)$; 当 $t\ge h$ 时, $v_c(t)=\mathrm{col}\{v(t),v_z(t)\}$.

由式(11) 中不定二次型 $J(T)$ 可得 Krein 空间模型

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=(F(t)+\gamma^2G_1(t)G_1^*(t)P^c(t))\mathbf{x}(t)+ G_1(t)(\mathbf{w}(t)-\hat{\mathbf{w}}(t))+G_2(t)\mathbf{u}(t),\tag{12}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}_c(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{K}_u(t)\\ \bar{H}(t)\end{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}(t)+\bar{\mathbf{v}}_c(t).\tag{13}$$

其中 $\mathbf{x},\mathbf{w},\mathbf{u}$ 和 $\bar{\mathbf{v}}_c=\mathrm{col}\{\mathbf{v}_u,\mathbf{v}_c\}$ 为 Krein 空间变量(用黑体表示), 且满足

$$\left\langle\begin{bmatrix}\mathbf{x}(0)\\ \mathbf{w}(t)-\hat{\mathbf{w}}(t)\\ \bar{\mathbf{v}}_c(t)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{x}(0)\\ \mathbf{w}(r)-\hat{\mathbf{w}}(r)\\ \bar{\mathbf{v}}_c(r)\end{bmatrix}\right\rangle=$$

$$\begin{bmatrix}(\Pi_0^{-1}-\gamma^2P_0^c)^{-1}&0\\0&\begin{bmatrix}I_l&0\\0&Q_{\bar{v}_c}\end{bmatrix}\delta_{tr}\end{bmatrix}.$$

观测噪声 $\bar{\mathbf{v}}_c$ 的协方差阵 $Q_{\bar{v}_c}=\mathrm{diag}\{Q_{v_u},Q_{v_c}\}$. 当 $0\le t<h$ 时, $Q_{\bar{v}_c}=\mathrm{diag}\{-\gamma^2I_r,I_m\}$; 当 $t\ge h$ 时, $Q_{\bar{v}_c}=\mathrm{diag}\{-\gamma^2I_r,I_m,I_p\}$.

3.2 重组新息序列

由文献[10,11]的讨论知, 二次型 $J(T)$ 的最小值为

$$\begin{aligned}J_m(T)=\int_0^T&\begin{bmatrix}u(t)-\bar{K}_u(t)\hat{\bar{x}}(t|t)\\ y_c(t)-\bar{H}(t)\hat{\bar{x}}(t|t)\end{bmatrix}^*R_w(t)\times\\&\begin{bmatrix}u(t)-\bar{K}_u(t)\hat{\bar{x}}(t|t)\\ y_c(t)-\bar{H}(t)\hat{\bar{x}}(t|t)\end{bmatrix}\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{14}$$

其中: $R_w(t)$ 为观测 $\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}_c(t)\end{bmatrix}$ 的新息协方差矩阵, 估计值为

$$\hat{\bar{x}}(t|t)=\begin{cases}\hat{x}(t|t),\ 0\le t<h;\\ \begin{bmatrix}\hat{x}(t|t)\\ \hat{x}(t-h|t)\end{bmatrix},\ t\ge h.\end{cases}$$

其中 $\hat{x}(t|t)$ 和 $\hat{x}(t-h|t)$ 可由状态 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{x}(t-h)$ 在如下线性空间上的投影求得:

$$\mathbf{L}\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{u}(s)\\ \mathbf{y}_c(s)\end{bmatrix},\ 0\le s\le t\right\}.\tag{15}$$

对于变量 $x(0)$ 和 $w(\cdot)$, 二次型 $J(T)$ 的最小值 $J_m(T)$ 存在, 当且仅当 Krein 空间的投影 $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$ 和 $\hat{\mathbf{x}}(t-h|t)$ 存在. 此时, 求取二次型最小值问题可转化为求取 Krein 空间的投影 $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$ 和 $\hat{\mathbf{x}}(t-h|t)$.

式(15) 中的线性空间可以重组为

$$\mathbf{L}\begin{cases}\begin{bmatrix}\mathbf{u}(s)\\ \mathbf{y}_f(s)\end{bmatrix},\ 0\le s\le t-h;\\ \begin{bmatrix}\mathbf{u}(s)\\ \mathbf{y}(s)\end{bmatrix},\ t-h\le s\le t\end{cases}\tag{16}$$

其中

$$\mathbf{y}_f(s)=\begin{bmatrix}\mathbf{y}(s)\\ \mathbf{z}_s(s+h)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H(s)\\ M(s)\end{bmatrix}\mathbf{x}(s)+\mathbf{v}_f(s),$$

$$\mathbf{v}_f(s)=\begin{bmatrix}\mathbf{v}(s)\\ \mathbf{v}_z(s+h)\end{bmatrix}.$$

观测噪声 $\mathbf{v}_f(s)$ 的协方差阵为

$$Q_{v_f}(s)=\mathrm{diag}\{Q_v(s),Q_{v_z}(s)\}=\mathrm{diag}\{I_m,I_p\}.$$

为了计算最优估计值 $\hat{x}(t|t)$, 给出重组后的新息序列

$$W(s,t) = \begin{bmatrix} u(s) \\ y(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{u}(s|s,t) \\ \hat{y}(s|s,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_u(s) \\ H(s) \end{bmatrix} e(s,t) + \begin{bmatrix} v_u(s) \\ v(s) \end{bmatrix}, s < t,$$

$$W(s,s) = \begin{bmatrix} u(s) \\ y_f(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(s|s,s) \\ \hat{y}_f(s|s,s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_u(s) \\ H(s) \\ M(s) \end{bmatrix} e(s,s) + \begin{bmatrix} v_u(s) \\ v_f(s) \end{bmatrix}.$$

其中: $e(s,t) = x(t) - \hat{x}(t|s,t)$, $e(s,s) = x(s) - \hat{x}(s|s,s)$, $s < t$. 令估计值 $\hat{x}(t|s,t)$ $(t \geq s)$ 为状态 $x(t)$ 在如下线性空间上的投影:

$$\mathbf{L}\left\{\begin{bmatrix} u(r) \\ y_f(r) \end{bmatrix}, 0 \leq r \leq s; \begin{bmatrix} u(r) \\ y(r) \end{bmatrix}, s \leq r \leq t\right\}.$$

新息序列 $\{W(\cdot,\cdot)\}$ 构成如下线性空间:

$$\mathbf{L}\left\{\begin{array}{l} W(s,s), 0 \leq s \leq t-h; \\ W(s,t), t-h \leq s \leq t \end{array}\right. \qquad (17)$$

可以证得式(15)～(17)中的线性空间均等价. 新息序列的协方差阵为

$$Q_w(s,t) = \begin{cases} \mathrm{diag}\{Q_{v_u}(t), Q_v(t)\}, t > s; \\ \mathrm{diag}\{Q_{v_u}(t), Q_{v_f}(t)\}, t = s. \end{cases}$$

3.3 协方差矩阵和最优估计值

本节利用得到的新息 $W(\cdot,\cdot)$ 来计算最优估计值. 令 $\mathbf{P}^r_{t-h,s} = \langle x(r), e(t-h,s)\rangle (r,s \geq t-h)$ 为状态 $x(r)$ 和状态估计误差 $e(t-h,s)$ 的协方差阵, 则有如下结果:

引理 1 令 $\phi(s) = F(s) + \gamma^{2} G_1(s) \times G_1^*(s) P^c(s)$. 协方差 $\mathbf{P}^r_{t-h,s}(s, r \geq t-h)$ 可分以下 3 种情况计算:

1) 当 $s = r = t-h$ 时, 协方差阵 $\mathbf{P}^s_{s,s}$ 满足 Riccati 微分方程

$$d\mathbf{P}^s_{s,s}/ds = \phi(s)\mathbf{P}^s_{s,s} + \mathbf{P}^s_{s,s}\phi(s) + G_1(t)G_1^*(t) - \gamma^2 G_2(t)G_2^*(t) - \mathbf{P}^s_{s,s}(-\gamma^2 K_u^*(s)K_u(s) + H^*(s)H(s) + M^*(s)M(s))\mathbf{P}^s_{s,s},$$

$$\mathbf{P}^0_{0,0} = \Pi_0^{-1}; \qquad (18)$$

2) 当 $s = r > t-h$ 时, 协方差阵 $\mathbf{P}^s_{t-h,s}$ 满足

$$\partial\mathbf{P}^s_{t-h,s}/\partial s = \phi(s)\mathbf{P}^s_{t-h,s} + \mathbf{P}^s_{t-h,s}\phi(s) + G_1(t)G_1^*(t) - \gamma^2 G_2(s)G_2^*(s) - \mathbf{P}^s_{t-h,s}(-\gamma^2 K_u^*(s)K_u(s) + M^*(s)M(s))\mathbf{P}^s_{t-h,s}, \qquad (19)$$

其中协方差阵的初值 $\mathbf{P}^{t-h}_{t-h,t-h}$ 可由式(18)求得;

3) 当 $s > r = t-h$ 时, 协方差阵 $\mathbf{P}^{t-h}_{t-h,s}$ 满足

$$\partial\mathbf{P}^{t-h}_{t-h,s}/\partial s = \mathbf{P}^{t-h}_{t-h,s}A^*(t-h,s), \qquad (20)$$

其中协方差阵的初值 $\mathbf{P}^{t-h}_{t-h,t-h}$ 可由式(18)求得, 且

$$A(t-h,s) = \phi(s)\{I_n - \mathbf{P}^s_{t-h,s}(-\gamma^2 K_u^*(s)K_u(s) + M^*(s)M(s)\}.$$

证明参见文献[10].

如下定理给出了如何求取最优估计值 $\hat{x}(t|t)$:

定理 1 考虑系统(12)和(13), 最优估计值为

$$\hat{x}(t|t) = \begin{cases} \hat{x}(t|t), 0 \leq t < h; \\ \begin{bmatrix} \hat{x}(t|t) \\ \hat{x}(t-h|t) \end{bmatrix}, t \geq h. \end{cases}$$

其中 $\hat{x}(t-h|t) = \hat{x}(t-h|t-h,t)$ 和 $\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-h,t)$ 可计算如下:

$$\hat{x}(t-h|t-h,t) = \hat{x}(t-h|t-h,t-h) + \int_{t-h}^{t}\mathbf{P}^{t-h}_{t-h,s}B_1(s)ds, \qquad (21)$$

$$\hat{x}(s|t-h,s) = \Phi(s,t-h)\hat{x}(t-h|t-h,t-h) + \int_{t-h}^{s}\Phi(s,\tau)\mathbf{P}^{\tau}_{t-h,\tau}B_2(\tau)d\tau, t-h \leq s \leq t \qquad (22)$$

其中

$$\dot{\Phi}(s,t-h) = \phi(s)\Phi(s,t-h),$$

$$B_1(s) = -\gamma^2 K_u^*(s)u(s) + H^*(s)y(s) + (\gamma^2 K_u^*(s)K_u(s) - H^*(s)H(s))\hat{x}(s|t-h,s),$$

$$B_2(s) = -\gamma^2 K_u^*(s)u(s) + M^*(s)z_s(s+h) + (\gamma^2 K_u^*(s)K_u(s) - M^*(s)M(s))\hat{x}(s|t-h,s).$$

式中 $\phi(s)$ 同引理 1, 矩阵 $\mathbf{P}^s_{t-h,s}$ 和 $\mathbf{P}^{t-h}_{t-h,s}$ 分别由式(19)和式(20)给出. 初始条件 $\hat{x}(t-h|t-h,t-h)$ 满足

$$\hat{x}(t|t,t) = \Phi(t,0)\hat{x}(0|0,0) + \int_0^t\Phi(t,\tau)\mathbf{P}^{\tau}_{\tau,\tau}B_1(\tau)d\tau \qquad (23)$$

其中矩阵 $\mathbf{P}^t_{t,t}$ 满足式(18).

证明 当 $h > 0$ 时, 状态估计值 $\hat{x}(t-h|t-h,t)$ 为新息 $\{W(s,s), 0 \leq s \leq t-h; W(t-h,s), t-h < s \leq t\}$ 的线性最小均方差估计, 因此可得

$$\hat{x}(t-h|t-h,t) =$$

$$\int \langle x(t), W(s,s)\rangle \begin{bmatrix} Q_{v_u}(t) & 0 \\ 0 & Q_{v_f}(t) \end{bmatrix}^{-1} W(s,s)\,\mathrm{d}s.$$

其中$\langle x(t), W(s,s)\rangle = \mathbf{P}^{t}_{s,t}\begin{bmatrix} K_u(s) \\ H(s) \end{bmatrix}^{*}$. 由新息定理可得

$$\hat{x}(t-h \mid t-h, t) =$$

$$\hat{x}(t-h \mid t-h, t-h) + \int_{h} \mathbf{P}^{t-h}_{t-h,s}\begin{bmatrix} K_u(t) \\ H(t) \end{bmatrix}^{*} \times$$

$$\begin{bmatrix} Q_{v_u}(s) & 0 \\ 0 & Q_{v}(s) \end{bmatrix}^{-1} \left\{\begin{bmatrix} u(s) \\ y(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_u(s) \\ H(s) \end{bmatrix} \times \right.$$

$$\left. \hat{x}(s \mid t-h, s)\right\}\mathrm{d}s$$

其中协方差阵$\mathbf{P}^{t-h}_{t-h,s}$满足式(20), 上式经整理可得式(21). 类似地, 状态估计值$\hat{x}(s \mid t-h, s)$为新息$\{W(r,r), 0 \le r \le t-h; W(t-h, r), t-h < r \le s\}$的线性最小均方差估计, 可得

$$\hat{x}(s \mid t-h, s) =$$

$$\int^{h} \langle x(s), W(r,r)\rangle Q^{-1}_{v_f}(r) W(r,r)\,\mathrm{d}r +$$

$$\int_{h} \langle x(s), W(t-h, r)\rangle Q^{-1}_{v}(r) W(t-h, r)\,\mathrm{d}r.$$

上面方程两边对s求导, 得

$$\mathrm{d}\hat{x}(s \mid t-h, s)/\mathrm{d}s =$$

$$\Phi(s)\hat{x}(s \mid t-h, s) + \mathbf{P}^{s}_{t-h,s}\begin{bmatrix} K_u(s) \\ H(s) \end{bmatrix}^{*} \times$$

$$\begin{bmatrix} Q_{v_u}(s) & 0 \\ 0 & Q_{v}(s) \end{bmatrix}^{-1} \left\{\begin{bmatrix} u(s) \\ y(s) \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} K_u(s) \\ H(s) \end{bmatrix} \hat{x}(s \mid t-h, s)\right\}.$$

其中$\mathbf{P}^{s}_{t-h,s}$满足式(19), 上式经整理可得式(22). 式(23) 中初值$\hat{x}(t-h \mid t-h, t-h)$由Kalman 滤波给出. □

3.4 H_∞控制问题的解

下面给出本文的主要结果.

定理 2 给出状态空间模型(1)～(4). 对于任意正数γ, 存在一个H_∞输出反馈控制器$u(t) = \mathbf{F}\{y(s), 0 \le s \le t; z_{s-h}(s), h \le s \le t\}$, 使得性能指标(5) 成立. 其充要条件为: 当$t-h \le s \le t$且$0 \le t \le T$时, 矩阵$\mathbf{P}^{s}_{t-h,s}$和$\mathbf{P}^{t-h}_{t-h,s}$有界, 且初始条件为$P^{c}(T)$的倒向Riccati微分方程(9) 有唯一解$P^{c}(t)$. 此时得到的中心控制器为

$$u(t) = K_u(t)\hat{x}(t \mid t-h, t). \tag{24}$$

其中: $\hat{x}(t \mid t-h, t)$由定理2计算, 矩阵$K_u(t)$满足式(8).

证明 1) 已知观测时滞的H_∞输出反馈问题等价于: 对于变量$\{x(0), w(0), \cdots, w(N)\}$, 二次型$J(T)$有最小值$J_m(T)$且$J_m(T) > 0$. 二次型$J(T)$有最小值$J_m(T)$问题等价于Krein 空间的投影$\hat{x}(t \mid t)$和$\hat{x}(t-h \mid t)$存在. 而Krein 空间投影$\hat{x}(t \mid t)$和$\hat{x}(t-h \mid t)$存在的充要条件为: 对于$t-h \le s \le t$且$0 \le t \le T$, 矩阵$\mathbf{P}^{s}_{t-h,s}$和$\mathbf{P}^{t-h}_{t-h,s}$有界.

2) 已知式(14) 中二次型的最小值$J_m(T)$, 可表示为

$$J_m(T) =$$

$$\int^{T} [-\gamma^2 (u(t) - \bar{K}_u(t)\hat{x}(t \mid t))^{*} (u(t) -$$

$$\bar{K}_u(t)\hat{x}(t \mid t)) + (y_c(t) - \bar{H}(t)\hat{x}(t \mid t))^{*} (y_c(t) -$$

$$\bar{H}(t)\hat{x}(t \mid t))]\,\mathrm{d}t.$$

如果$J_m(T) > 0$成立, 则取

$$u(t) = K_u(t)\hat{x}(t \mid t-h, t) =$$

$$-G_2(t)P^{c}(t)\hat{x}(t \mid t-h, t).$$

其中: $P^{c}(t)$为式(9) 中Riccati 微分方程的唯一解, 最优估计值$\hat{x}(t \mid t-h, t)$可由定理1求得. 此时的控制器$u(t)$称为中心控制器. □

4 数值例子

考虑系统(1)～(4), 系统参数为

$$F = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}.$$

取

$$\gamma = 0.8, h = 10, P^{c}(T) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T = 100.$$

仿真结果如图1所示. 其中横坐标为时间t, 纵坐标为性能指标(5) 中A/B的值. 从图中可以看出, 利用时滞观测对状态进行估计并引入控制中, 能使系统很好地满足H_∞性能指标的要求, 不超过给定的γ值.

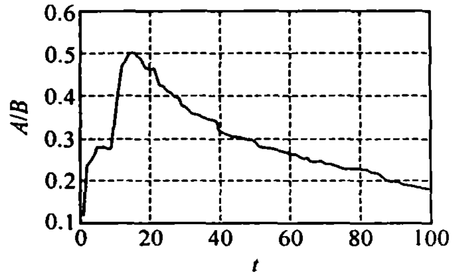

图 1 比值A/B随时间t变化

5　结　　论

本文给出了一类观测时滞系统的H_∞输出反馈问题有解的充要条件. 借助于 Krein 空间方法和重组新息分析方法, 将时滞H_∞问题转化为无时滞的H_2估计问题. 由于连续系统的新息 Gramians 矩阵是对角矩阵, 观测时滞系统H_∞输出反馈问题的推导过程要比离散系统简洁.

参考文献(References)

[1] Smith O J M. Closer Control of Loops with Dead-time [J]. *Chemical Engineering Progress*, 1957, 53(5): 217-219.

[2] Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, et al. State Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(8): 831-847.

[3] Tadmor G. H_∞ Control in Systems with a Single Input Delay [A]. *Proc of* 1995 *American Control Conf* [C]. Seattle, 1995: 321-325.

[4] Khargonoker P P, Nagpal K M, Poolla K R. H_∞ Control with Transients [J]. *SIAM J of Control Optimization*, 1991, 29(6): 1373-1393.

[5] Fridman E, Shaked U. Finite Horizon H_∞ State-feedback Control of Continuous-time Systems with State Delays [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(12): 2406-2411.

[6] Fridman E, Shaked U. A Descriptor System Approach to H_∞ Control of Linear Time-delay Systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(2): 253-270.

[7] Pila A W, Shaked U, Souza C E. Robust Control of Linear Time Delayed Systems [A]. *Proc of* 35*th Conf on Decision and Control* [C]. Japan, 1996: 1368-1369.

[8] Nagpal K M, Ravi R. H_∞ Control and Estimation Problems with Delayed Measurements: State-space Solutions [J]. *SIAM J of Control Optimization*, 1997, 35(4): 1217-1243.

[9] Shaked U, Souza C E. H_∞ Control of Linear Systems with Delayed Measurements [A]. *Proc of* 1999 *IEEE Int Conf on Control and Applications* [C]. Hawaii, 1999: 22-27.

[10] Zhang H, Zhang D, Xie L. H_∞ Fixed-lag Smoothing and Prediction for Linear Continuous-time Systems [A]. *Proc of* 2003 *American Control Conf* [C]. Colorada, 2003: 4201-4206.

[11] Zhang H, Xie L, Soh Y. A Unified Approach to Linear Estimation for Discrete-time Systems — Part Ⅱ: H_∞ Estimation [A]. *Proc of* 40*th IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Florida, 2001: 2923-2928.

[12] Hassibi B, Sayed A H, Kailath T. *Indefinite-quadratic Estimation and Control: An United Approach to H_2 and H_∞ Theories* [M]. New York: SIAM, 1998.

(上接第 1353 页)

[6] Nilsson J, Bernhardsson B. Stochastic Analysis and Control of Real-time Systems with Random Time Delays [J]. *Automatica*, 1998, 34(1): 57-64.

[7] Nilsson J. *Real-time Control Systems with Delays* [D]. Sweden: Lund Institute of Technology, 1998.

[8] Lincoln B, Bernhardsson B. Optimal Control over Networks with Long Random Delays [A]. *Proc of the Int Symp on Mathematical Theory of Networks and Systems* [C]. Perpignan, 2000: 84-90.

[9] Hu S S, Zhu Q X. Stochastic Optimal Control and Analysis of Stability of Networked Control Systems with Long Time Delays [J]. *Automatica*, 2003, 39(11): 1877-1884.

[10] Middleton R H, Goodwin G C. *Digital Control and Estimation — An Unified Approach* [M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1990.

[11] Zhang D, Wu J, Yang C. Robust Stabilization and Robust H_∞ Control for the Delta Operator Systems via State Feedback [J]. *Control Theory and Applications*, 2001, 18(5): 732-736.

[12] Li H G, Zhu X D, Wang P S. Optimal Control Law of Robot Based on Delta Operator in Visual Servoing [A]. *Proc of* 2004 *Int Conf on Machine Learning and Cybernetics* [C]. Shanghai, 2004, 1: 533-537.

[13] Astrom K J, Wittenmark B. *Computer Controlled System: Theory and Design* [M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1997.