

文章编号: 1001-0920(2006)02-0171-04

一种多属性决策问题的分类方法研究

孙昭旭^a, 韩敏^b, 邱菀华^a

(北京航空航天大学 a 经济管理学院, b 理学院, 北京 100083)

摘要: 针对多属性决策的分类问题, 基于方案间的赋值级别高于关系, 提出一种多属性决策分类法。首先描述了多属性决策的分类问题; 然后通过方案间赋值的级别高于关系和线性规划模型, 得到一种符合决策者偏好的多属性决策分类方法, 从而对方案进行归类。该方法克服了使用传统的 ELECTRE III 方法时, 定义的有序方案对之间的赋值级别高于关系导出属性权重的困难, 并将否决因素考虑进来。最后通过一个数值例子说明了该方法的有效性。

关键词: 多属性决策; 分类; 赋值级别高于关系; 线性规划

中图分类号: C934 **文献标识码:** A

Classification Approach for Multicriteria Decision Making Problem

SUN Zhao-xu^a, HAN Min^b, QIU Wan-hua^a

(a School of Economic and Management, b School of Science, Beihang University, Beijing 100083, China Correspondent: SUN Zhao-xu, E-mail: sunzhaoxu@163.com)

Abstract: Aiming at the multicriteria classification analysis problem, a classification analysis method is proposed based on the valued outranking relations. The multicriteria classification problem is introduced. Then utilizing the valued outranking relations and linear programming, the classification approach corresponding to the decision maker's preference for multicriteria decision making is constructed. This approach overcomes the difficulty of inducing the criteria weight while using the valued outranking relation defined by the traditional ELECTRE III and refers to the veto threshold. The approach is illustrated by a numerical example.

Key words: Multicriteria decision making; Classification; Valued outranking relation; Linear programming

1 引言

多属性决策问题是指: 根据有限方案集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 中的每个方案 a_i 在属性集 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 下的评价值 $x_{ij} = (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$, 以及决策者的偏好, 选取最优的方案或对方案集 A 中的方案按照优劣进行排序^[1]。

解决多属性决策问题的方法主要有两类^[2]: 一类是多属性效用函数方法; 另一类是以 ELECTRE 为代表的级别高于关系方法。其中 ELECTRE 方法又分为 ELECTRE I ~ ELECTRE V 方法, 级别高于关系是这类方法的核心。

以上述两类方法为基础的多属性决策的分类方法是一种有效且实用的多属性决策方法。分类方法是将方案集中的各个方案依据决策者的偏好以及方案在各个属性下的评价值, 指派到预先设定的类 C_1, C_2, \dots, C_q 中的某一类, 从而对方案进行优劣排序。其中 $C_1 > C_2 > \dots > C_q$ 。对于 $\forall a_i \in C_i, a_j \in C_j, i < j$, 有 $a_i > a_j$ 。文献[3, 4]综述了利用分类方法进行多属性决策的一般原理和方法, 并阐述了多属性决策的分类方法与聚类方法的联系和区别; 文献[5]利用分类方法解决了金融领域中的信贷评估问题; 文献[6]利用 PROMETHEE 方法定义的赋值级别

收稿日期: 2004-12-24; 修回日期: 2005-03-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(70372011)。

作者简介: 孙昭旭(1978—), 男, 山东淄博人, 博士生, 从事管理决策分析等研究; 邱菀华(1946—), 女, 江西临川人, 教授, 博士生导师, 从事管理决策分析、项目管理等研究。

高于关系,得到一种多属性决策的分类方法

本文假设已知决策者关于各个属性的严格优于门槛值、无差异门槛值和否决门槛值,而未知的是关于各个属性的权重。以预先设定的类 C_1, C_2, \dots, C_q 中的方案以及方案在各个属性下的评价值为基础,利用改进的 ELECTRE III 方法定义的方案之间的赋值级别高于关系,通过求解线性规划模型得到决策者关于各个属性的权重值,建立了基于改进的 ELECTRE III 方法的分类模型。该方法克服了文献 [6] 利用 PROMETHEE 方法进行分类时,没有考虑决策者关于各个属性的否决门槛值的缺陷,并且避开了利用 ELECTRE III 方法定义的有序方案对之间的赋值级别高于关系导出属性权重时,需要求解非线性规划问题的困难

2 赋值的级别高于关系^[7]

Roy 提出的 ELECTRE III 方法构造的是一种赋值的级别高于关系。不妨设属性 $c_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 为效益型指标, $q_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 是方案之间在属性 j 上的无差异门槛值, p_j 表示属性 j 上的严格优于门槛值, v_j 表示属性 j 上的否决门槛值, $g_j(a_i)$ 为方案 a_i 在属性 c_j 下的评价值。赋值的级别高于关系是通过下面和谐性指数和不和谐性指数构造的:

1) 和谐性指数 $C(a_i, a_k)$ 定义为

$$C(a_i, a_k) = \sum_{j=1}^n \omega_j c_j(a_i, a_k). \quad (1)$$

其中

$$c_j(a_i, a_k) = \begin{cases} 0, & g_j(a_i) - g_j(a_k) < q_j; \\ 1, & g_j(a_i) - g_j(a_k) > p_j; \\ (g_j(a_i) - g_j(a_k) - q_j) / (p_j - q_j), & \text{其他}; \end{cases} \quad (2)$$

ω_j 为第 j 个属性的属性权重, $C(a_i, a_k)$ 表示支持“ a_i 级别高于 a_k ”这一论断的测度

2) 不和谐性指数 $d_j(a_i, a_k)$ 定义为

$$d_j(a_i, a_k) = \begin{cases} 0, & g_j(a_k) - g_j(a_i) < -q_j; \\ 1, & g_j(a_k) - g_j(a_i) > v_j; \\ (g_j(a_k) - g_j(a_i) + q_j) / (v_j - q_j), & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

其中 $d_j(a_i, a_k)$ 表示“拒绝 a_i 级别高于 a_k ”这一论断的测度

3) 赋值的级别高于关系 $S(a_i, a_k)$ 定义为

$$S(a_i, a_k) = C(a_i, a_k) - \sum_{j=1}^n N D_j(a_i, a_k), \quad (4)$$

其中

$$N D_j(a_i, a_k) = \min \left[1, \frac{1 - d_j(a_i, a_k)}{1 - C(a_i, a_k)} \right]. \quad (5)$$

$S(a_i, a_k)$ 表示“ a_i 在总体上级别高于 a_k ”这一论断支

持程度的测度

3 构造改进的 ELECTRE III 方法

由式(4)可以看出,由于 $N D_j(a_i, a_k)$ 的表达式中含有 $C(a_i, a_k)$,从而含有未知的决策者关于各个属性的权重值 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 。在利用已知的类 C_1, C_2, \dots, C_q 中的方案以及在各个属性下的评价值,建立线性规划模型求解决策者关于各个属性的权重值时,无法判断 $1 - d_j(a_i, a_k)$ 与 $1 - C(a_i, a_k)$ 之间的大小关系,从而不能获得 $N D_j(a_i, a_k)$ 的值

为克服上述困难,本文对传统的 ELECTRE III 方法进行改进,将 $N D_j(a_i, a_k)$ 表达式中 $C(a_i, a_k)$ 用常数 α_j 代替,构造相应的 $\tilde{N} D_j(a_i, a_k)$ 。为使 $S(a_i, a_k)$ 与 $\tilde{S}(a_i, a_k)$ ($\tilde{S}(a_i, a_k)$ 为改进的 ELECTRE III 方法定义的有序方案对之间的赋值级别高于关系)充分接近,需要 $N D_j(a_i, a_k)$ 与 $\tilde{N} D_j(a_i, a_k)$ 的差异充分小。构造差异函数^[8]

$$f(C(a_i, a_k), g_j(a_k), \alpha_j) =$$

$$\left| N D_j(a_i, a_k) - \tilde{N} D_j(a_i, a_k) \right|,$$

并通过下面的优化模型:

$$\begin{aligned} \text{Min} \int_{\alpha_j \in [0,1]} & \int_{0.5}^{g_j(a_i) + v_j} f(C(a_i, a_k), g_j(a_k), \\ & \alpha_j) dC(a_i, a_k) dg_j(a_k) \end{aligned} \quad (6)$$

求解 α_j , 得出 $\alpha_j = 0.75$

4 分类模型的构造

本文构造的分类模型是利用 m 个参照方案及其分类,以及它们在各个属性上的评价值构造的。参照方案集中的每个方案被决策者指派到 q 个有序类 $C_1 > C_2 > \dots > C_q$ 中的一类

参照方案可以通过以下两类方法得到: 1) 决策者过去进行的决策; 2) 有限方案集 A 的某个子集,决策者能清晰准确地对该子集中的方案进行归类。利用参照方案的信息(方案的归类以及在各个属性上的评价值),能导出决策者关于各个属性的权重,并且确定分类规则。因此参照方案可以看成训练样本。本文首先构造基于改进的 ELECTRE III 方法的两分类模型,然后将两分类模型扩展到多分类模型

4.1 基于改进的 ELECTRE III 方法的两分类模型

本节暂且认为属性权重已知,在下节中利用训练样本导出属性权重值,然后利用本节的方法对方案进行分类

设待分类的方案为 $a_k, C_1 = (a_1^1, a_2^1, \dots, a_{m_1}^1) > C_2 = (a_1^2, a_2^2, \dots, a_{m_2}^2)$, 利用改进的 ELECTRE III 计算 $\tilde{S}(a_i^1, a_k)$ ($i = 1, 2, \dots, m_1$) 和 $\tilde{S}(a_k, a_i^2)$ ($i = 1, 2, \dots, m_2$)。定义方案 a_k 的分类指标值

$$f_k = \frac{1}{m_2} f_k^+ - \frac{1}{m_1} f_k^- = \frac{1}{m_2} \sum_{i=1}^{m_2} \tilde{S}(a_k, a_i^2) - \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{m_1} \tilde{S}(a_i^1, a_k). \quad (7)$$

其中: f_k^+ 表示方案 a_k 对于 C_2 中所有参照方案的级别高于程度, f_k^- 表示 C_1 中所有参照方案对于方案 a_k 的级别高于程度, 权重 $1/m_2$ 和 $1/m_1$ 是根据 C_2 和 C_1 中参照方案的个数确定的. 利用该权重可以消除因 C_2 和 C_1 中参照方案个数的较大差异造成对 f_k 取值的影响

由于 $0 \leq \tilde{S}(a_i, a_k) \leq 1$, 则有 $-1 \leq f_k \leq 1$, 即 $f_k \in [-1, 1]$

若 $f_k = -1$, 则表明 $f_k^+ = 0, f_k^- = m_1$, 即 $\tilde{S}(a_k, a_i^2) = 0, i = 1, 2, \dots, m_2$, 且 $\tilde{S}(a_i^1, a_k) = 1, i = 1, 2, \dots, m_1$. 由此表明方案 a_k 不能以任何值级别高于 C_2 中的参照方案, 且 C_1 中的所有参照方案都严格级别高于方案 a_k .

若 $f_k = 1$, 则可进行同样的分析. 表明方案 a_k 严格级别高于 C_2 中的所有参照方案, 且方案 a_k 不能以任何值级别高于 C_1 中的参照方案.

若 $f_k = 0$, 则表明方案 a_k 在某种意义上介于 C_1 与 C_2 之间.

在得到各个待分类方案的分类指标值 f_k 后, 可按如下分类规则进行分类:

$$\begin{cases} f_k > b \Rightarrow a_k \in C_1, \\ f_k < b \Rightarrow a_k \in C_2 \end{cases} \quad (8)$$

由上述分类规则可以得到如下结论: 若方案 a 在属性上都优于方案 b , 即 $g_j(a) \geq g_j(b), j = 1, 2, \dots, n$, 则 $\tilde{S}(a, a_i^2) \geq \tilde{S}(b, a_i^2), \tilde{S}(a_i^1, a) \leq \tilde{S}(a_i^1, b)$, 即 $f_a^+ \geq f_b^+, f_a^- \leq f_b^-$, 从而得到 $f_a \geq f_b$. 因此利用上述分类规则, 在将两个具有明显优劣关系的方案进行分类时, 不可能出现 $a \in C_2, b \in C_1$, 从而 $b > a$ 的情况发生. 若 $g_j(a) = g_j(b), j = 1, 2, \dots, n$, 则 $f_a = f_b$. 因此分类规则也不会把相同的两个方案分到不同的类中.

4.2 关于属性权重及分类规则中 b 的确定^[9]

如上文所述, 假设已知决策者关于各个属性的严格优于门槛值、无差异门槛值和否决门槛值, 以及类 C_1 和 C_2 中的方案及其在各个属性下的评价值. 利用线性规划模型来导出决策者关于各个属性的权重及分类规则中 b 的值, 从而利用 4.1 节中的方法对方案进行分类, 则有

$$\begin{aligned} \min E &= \frac{1}{m_1} \sum_{a_i \in C_1} e_i + \frac{1}{m_2} \sum_{a_i \in C_2} e_i, \\ \text{s.t. } & f_i + e_i > b, a_i \in C_1; \\ & f_i - e_i < b, a_i \in C_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_i &\geq 0, \omega \geq 0; \\ &\sum_{i=1}^n \omega = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

4.3 基于改进的 ELECTRE III 方法的多分类模型

与两分类模型的构造方法类似, 多分类模型首先计算待分类方案 a_k 的 f_{kr}^+ 和 f_{kr}^- , 即

$$\begin{aligned} f_{kr}^+ &= \sum_{j=r+1}^n \sum_{i=1}^{j_m} \tilde{S}(a_k, a_i^j), \\ f_{kr}^- &= \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{j_m} \tilde{S}(a_i^j, a_k). \end{aligned}$$

其中 j_m 表示类 C_j 中的方案数. 多分类的分类指标值为

$$f_{kr} = \frac{1}{m_{r+1}^q} f_{kr}^+ - \frac{1}{m_1^r} f_{kr}^-.$$

其中: m_{r+1}^q 为类 C_{r+1}, \dots, C_q 中方案总数, m_1^r 为类 C_1, \dots, C_r 中方案总数; f_{kr} 表示方案 a_k 级别高于 C_{r+1}, \dots, C_q 中所有方案的程度与 C_1, \dots, C_r 中所有方案级别高于方案 a_k 的程度之间的差异. 与两分类的分类规则类似, 多分类的分类规则可以定义如下:

$$\begin{aligned} f_{k1} > b_1 &\Rightarrow a_k \in C_1, \\ b_2 < f_{k1} &\Rightarrow a_k \in C_2, \\ &\vdots \\ b_{q-1} < f_{k1} &\Rightarrow a_k \in C_{q-1}, \\ f_{k1} < b_{q-1} &\Rightarrow a_k \in C_q. \end{aligned} \quad (10)$$

依据上面的分类规则, 可得到类似于两分类模型中关于求解属性权重及 b 值的线性规划模型, 与两分类不同之处在于, 类似于 $f_i + e_i > b$ 的约束共有 m_{r+1}^q 个, 类似于 $f_i - e_i < b$ 的约束共有 m_1^r 个.

5 数值例子

下面通过一个简单的两分类例子, 说明如何将本文的分类方法应用于多属性决策. 例子数据如表 1 所示.

表 1 数值例子的数据

方案编号	属性 1(g_1)	属性 2(g_2)	所属类
1	1.57	1.62	1
2	0.74	1.80	1
3	0.62	1.94	1
4	-1.19	0.13	2
5	-1.06	0.66	2
6	1.47	-1.17	2

已知属性 1 与属性 2 严格优于门槛值、无差异门槛值和否决门槛值都相同, 即 $p_1 = p_2 = 1, q_1 = q_2 = 0.5, v_1 = v_2 = 1.2$. 按照式 (7) 和式 (9) 计算的结果如表 2 所示.

利用线性规划模型得到 $\omega = 0.45, \omega = 0.55$.

表2 数值计算结果

方案 编号	4	5	6	f^+	1	2	3	f^-	f
1	1	1	0.61	2.61	0	0.12	0.22	0.34	0.757
2	1	1	0.55	2.55	0.45	0	0.1	0.55	0.667
3	1	1	0.55	2.55	0.45	0.08	0	0.53	0.673
4	0	0	0.55	0.55	1	1	1	3	-0.816
5	0.46	0	0.55	1.01	1	1	1	3	-0.663
6	0.45	0.45	0	0.9	0.61	0.55	0.55	1.71	-0.27

由表2可以看出,归类于1的方案分类指标值都大于0,归类于2的方案分类指标值都小于0,故可取 $b=0$

6 结 论

本文给出一种基于改进的ELECTRE III的多属性决策分类方法。该方法以参照方案的分类作为训练样本,利用改进的ELECTRE III方法定义的有序方案对之间的赋值级别高于关系,通过线性规划模型得到符合决策者偏好的分类规则,从而对方案进行归类。这种方法克服了使用传统的ELECTRE III方法定义的有序方案对之间的赋值级别高于关系导出分类规则的困难。与其他分类方法相比,该方法将否决门限值考虑进来,从而能够更加客观、准确地对方案进行优劣分类。

参考文献(References)

- [1] 陈珏. 决策分析[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
(Chen T. *Decision Making Analysis*[M]. Beijing: Science Press, 1987.)
- [2] Roy B. *Multicriteria Methodology for Decision Aiding* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996
- [3] Doumpos M. *Multicriteria Decision Aid Classification Methods*[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002
- [4] Zopounidis C. Multicriteria Classification and Sorting Methods: A Literature Review [J]. *European J of Operational Research*, 2002, 138(2): 229-246
- [5] Zopounidis C, Doumpos M. A Preference Disaggregation Decision Support System for Financial Classification Problems [J]. *European J of Operational Research*, 2001, 130(2): 137-148
- [6] Michael Doumpos. A Multicriteria Classification Approach Based on Pairwise Comparisons [J]. *European J of Operational Research*, 2004, 158(2): 378-389
- [7] Roy B. The Outranking Approach and the Foundations of ELECTRE Methods [J]. *Theory and Decision*, 1991, 31(2): 49-73
- [8] Mousseau V. Valued Outranking Relation in ELECTRE III Providing Manageable Disaggregation Procedures [J]. *European J of Operational Research*, 2004, 158(3): 528-547
- [9] Jacquet Lagreze. Preference Disaggregation: Twenty Years of MCDA Experience [J]. *European J of Operational Research*, 2001, 130(2): 233-245
- [8] Fischer M, Jahn H, Teich T. Optimizing the Selection of Partners in Production Networks [J]. *Robotics and Computer-integrated Manufacturing*, 2004, 20(6): 593-601
- [9] Hoffner Y, Field S, Grefen P, et al. Contract-driven Creation and Operation of Virtual Enterprises [J]. *Computer Networks*, 2001, 37(2): 111-136
- [10] 裴菁, 汪定伟. 策略联盟中带有协同因子的伙伴挑选模型 [J]. *控制与决策*, 2001, 16(增): 709-712
(Pei J, Wang D W. A Partner Selection Model with Compatible Factor of Dynamic Alliances [J]. *Control and Decision*, 2001, 16(S): 709-712)
- [11] 李帅, 郭亚军, 易平涛, 等. 基于模糊群决策的虚拟企业合作伙伴选择 [J]. *东北大学学报*, 2004, 25(3): 295-298
(Li S, Guo Y J, Yi P T, et al. Partner Selection Based on Fuzzy Group Decision Making for Virtual Enterprise Formation [J]. *J of Northeastern University*, 2004, 25(3): 295-298)
- [12] 汪定伟, 容启量, 叶伟雄. 企业动态结盟中的伙伴挑选模型及其软计算方法 [J]. *中国科学(E 辑)*, 2002, 32(6): 825-830
(Wang D W, Rong Q L, Ye W X. Partner Selection Model and Soft Computing Algorithm for Dynamic Alliance [J]. *Science in China (Series E)*, 2002, 32(6): 825-830)
- [13] Mitchell M. *An Introduction to Genetic Algorithms* [M]. London: The MIT Press, 1996
- [14] 杨松林. *工程模糊论方法及其应用* [M]. 北京: 国防工业出版社, 1996
(Yang S L. *Fuzzy Theory Method and Its Application in Engineering* [M]. Beijing: Defense Industry Publishing House, 1996)

(上接第170页)