第21卷 第2期 控 制 与 决 策 2006年2月
Vol 21 No. 2 Control and Decision Feb. 2006

文章编号: 1001-0920(2006)02-0184-05

模糊AHP的权重向量求解方法研究

王 玮, 张玉芝
(海军大连舰艇学院 装备系统与自动化系, 辽宁 大连 116013)

摘 要: 在分析层次分析法(AHP)基本原理及其应用问题的基础上,提出了给定模糊判断矩阵下的模糊数判断矩阵满意水平的概念,建立了给定模糊判断矩阵下的极大化满意水平的模糊数判断矩阵及其权重向量求解模型.研究了用遗传算法求解模型的方法,设计了一种主从编码方式及其自主遗传算法结构.仿真结果表明了该算法的有效性和实用价值.

关键词: 层次分析法; 模糊判断矩阵; 满意水平; 遗传算法
中图分类号: O223 **文献标识码**: A

Method of Obtaining Eigenvector for a Fuzzy AHP

WANG Wei, ZHANG Yu-zhi
(Department of Equipment System and Automation, Dalian Naval Academy, Dalian 116013, China. Correspondent: WANG Wei, E-mail: wangweihy@263.net)

Abstract: A notion of satisfactory level is proposed for fuzzy numerical comparison matrix with the given fuzzy comparison matrix. A model is built to find the optimal fuzzy numerical comparison matrix and its eigenvector for a given fuzzy comparison matrix in order to maximize the satisfatory level subjected to the constraint of consistency. A genetic algorithm is given to obtain the optimal feasibility by means of the chromosome syntax of main-secondary two parts and their self-genetic function. Simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: Analytical hierarchy process(AHP); Fuzzy comparison matrix; Satisfactory level; Genetic algorithm

1 引 言

层次分析法(AHP)是将定性与定量相结合的一种系统分析方法[1],已在经济、军事、管理、社会科学等各个决策领域得到广泛的应用.判断矩阵是AHP法应用的关键,传统的构造方法是用确定的数值来表示.然而由于实际系统比较复杂,人们对系统各要素的相对重要程度无法作出精确判断,只能给出一个判断的范围,于是便产生了不确定AHP问题[2~4].目前,不确定AHP问题的研究已经引起人们的广泛关注[1~7].

在现有的不确定AHP法中,判断矩阵通常以区间形式给出[3,5,6].但在实际应用中,人们对区间内的不同判断数值往往有着不同的主观认识,可能是其中最满意(或最认可)的某个判断数值[2,7].为此,本文在分析AHP法基本原理及其应用的基础上,提出了给定模糊判断矩阵下的模糊数判断矩阵满意水平的概念,建立了给定模糊判断矩阵下的极大化满意水平的模糊数判断矩阵及其权重向量求解模型,并给出了基于遗传算法的模型求解方法,从而为实际多准则决策问题的解决提供了一条新途径.

2 问题提出

任何系统分析都以一定的信息为基础,AHP法的信息基础主要是人们对系统各要素的相对重要性给出的判断.判断矩阵是AHP法工作的出发点,传统的构造方法是用确定的数值来表示[1,8].

定义1 设有n个元素,即$N = \{1, 2, \cdots, n\}$进行两两比较,称$A = (a_{ij})_{n\times n}$为数值判断矩阵,如果满足:

收稿日期: 2004-12-24; **修回日期**: 2005-05-12
基金项目: 国家自然科学基金项目(70571085); 辽宁省自然科学基金项目(20022148).
作者简介: 王玮(1964—),女,山东龙口人,副教授,博士后,从事分布式复杂系统建模与优化、武器装备系统工程等研究; 张玉芝(1965—),女,山东单县人,讲师,从事指挥自动化技术、智能计算方法等研究.

1) $\forall i \in N$, $a_{ii} = 1$;

2) $\forall i, j \in N$, $a_{ij} = 1/a_{ji}$, $1/9 \le a_{ij} \le 9$.

定义 2　如果数值判断矩阵 A 还满足: $\forall i, j, k \in N$, $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$, 则称 A 为完全一致性的数值判断矩阵.

当数值判断矩阵具有完全一致性时, 可以通过解特征值问题 $AW = \lambda_{\max}(A)W$, 求出正规化特征向量 $W = [w_1, w_2, \cdots, w_n]^{\mathrm{T}}$, 从而得到 n 个排序元素的权重向量. 但在 AHP 法的实际应用中, 由于客观事物比较复杂, 人们给出的数值判断矩阵很难满足完全一致性条件, 当数值判断矩阵偏离一致性过大时, 以权重向量计算结果作为决策依据将会出现问题, 因而需要进行数值判断矩阵的一致性检验. Saaty 给出了数值判断矩阵的一致性检验方法[8], 具体步骤如下:

1) 计算数值判断矩阵的一致性指标 $CI = (\lambda_{\max} - n)/(n-1)$;

2) 求平均随机一致性指标 RI (对于 1～9 阶矩阵, 可查表获得 RI);

3) 计算数值判断矩阵的随机一致性比例 $CR = CI/RI$.

当 $CR \le 0.1$ 时, 数值判断矩阵具有满意的一致性; 否则, 需要对数值判断矩阵进行调整, 直至满足. AHP 法只要求判断矩阵具有满意的一致性, 以适应实际应用中的各种复杂系统.

AHP 法应用的关键是构造一个具有满意一致性的数值判断矩阵, 但实际系统通常都比较复杂, 对系统各要素的优劣无法清楚地判断, 构造出来的判断矩阵往往不是确定的数值形式, 而是一些具有主观认识的模糊数. 判断矩阵的一致性程度主要取决于判断者对系统各要素的把握程度, 对各要素优劣认识得越清楚, 一致性程度就越高, 而模糊判断矩阵的一致性条件, 在实际应用中不满足是客观存在的且无法完全消除. 本文的问题是: 如何确定满足一致性条件的模糊数判断矩阵及其权重向量, 使其在给定模糊判断矩阵下的满意水平最大.

3　模型建立

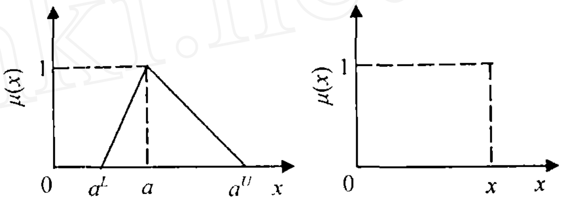
对系统要素进行两两比较判断时, 通常在主观上具有一定的模糊认识. 为了合理描述这种判断方式, 人们利用模糊理论提出了模糊判断矩阵的概念[2].

定义 3　设 $[a^L, a^U]$ 为一个闭区间, 若 $\mu_{\tilde a}(x)$ 为区间数 $x = \{x \mid x \in [a^L, a^U]\}$ 的隶属度, 则称 $\tilde a = \{(x, \mu_{\tilde a}(x)) \mid x \in [a^L, a^U]\}$ 为一个模糊集合; 若 $\mu_{\tilde a}(x)$ 取为

$$\mu_{\tilde a}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a^L}{a - a^L}, & a^L \le x < a; \\ 1, & x = a; \\ \dfrac{a^U - x}{a^U - a}, & a < x \le a^U. \end{cases} \tag{1}$$

则称 $\tilde a = \{(x, \mu_{\tilde a}(x)) \mid x \in [a^L, a, a^U]\}$ 为三角形模糊集合, 简记为 $\tilde a = [a^L, a, a^U]$; 若 $\tilde x \in \tilde a$, 则称 $\tilde x = (x, \mu_{\tilde a}(x))$ 为三角形模糊数.

三角形模糊数如图 1 所示, 当边界点 a^L 和 a^U 相等时, 模糊数成为一个确定数值. 可见, 模糊判断描述具有更一般的理论和实际意义.



(a) 模糊数　　(b) 确定数

图 1　三角形模糊数描述

定义 4　设有 n 个元素, 即 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ 进行两两比较, 若 $\forall i, j \in N$, $[a_{ij}^L, a_{ij}, a_{ij}^U]$ 表示给出的三角形模糊判断, 则称 $\tilde A = (\tilde a_{ij})_{n\times n}$ 为三角形模糊判断矩阵, 如果满足:

1) $\forall i \in N$, $\tilde a_{ii} = 1$;

2) $\forall i, j \in N$, $\tilde a_{ij} = [a_{ij}^L, a_{ij}, a_{ij}^U]$, $1/9 \le a_{ij}^L \le a \le a_{ij}^U \le 9$;

3) $\forall i, j \in N$, $\tilde a_{ij} = 1/a_{ji} = [1/a_{ji}^U, 1/a_{ij}, 1/a_{ji}^L]$.

可见, 模糊判断内的任意模糊数都有着不同的满意度, 构造 n 阶模糊判断矩阵只需对其上(下) 三角元素(共 $n(n-1)/2$ 个) 给出判断即可.

定义 5　设 $\tilde A = (\tilde a_{ij})_{n\times n}$, $\tilde a_{ij} = [a_{ij}^L, a_{ij}, a_{ij}^U]$ 为三角形模糊判断矩阵, 如果 $\forall i, j \in N$, $j > i$, $k = (i-1)n + (j-i)$, $b_k^L = a_{ij}^L$, $b_k = a_{ij}$, $b_k^U = a_{ij}^U$, 则称 $\tilde b_k = [b_k^L, b_k, b_k^U]$ 为给定三角形模糊判断矩阵 $\tilde A$ 的上三角元素.

定义 6　设 $\tilde A = (\tilde a_{ij})_{n\times n}$, $\tilde a_{ij} = [a_{ij}^L, a_{ij}, a_{ij}^U]$ 为三角形模糊判断矩阵, 若 $\forall i, j \in N$, $\tilde x_{ij} = (x_{ij}, \mu_{\tilde a_{ij}}(x_{ij}))$, $\tilde x_{ij} \in \tilde a_{ij}$, 则称 $\gamma = \min\limits_{i,j\in N}(\mu_{\tilde a_{ij}}(x_{ij}))$ 为模糊数判断矩阵 $\tilde X = (\tilde x_{ij})_{n\times n}$ 的满意水平.

定义 7　设决策变量为 $\tilde Y$ 和 γ, 其中 $\tilde Y = [\tilde y_k]_{1\times(n(n-1)/2)}$, $\tilde y_k = (y_k, \mu_{\tilde b_k}(y_k))$ 为满足一致性条件的 n 阶模糊数判断矩阵 $\tilde X = (\tilde x_{ij})_{n\times n}$ ($\tilde x_{ij} \in \tilde a_{ij}$) 的上三角元素, 且 $\forall i, j \in N$, $j > i$, $k = (i-1)n + (j-i)$, $\tilde b_k$ 为给定三角形模糊判断矩阵 $\tilde A = (\tilde a_{ij})_{n\times n}$ 的上三角元素, $\gamma = \min\limits_{k\in[1, n(n-1)/2]}(\mu_{\tilde b_k}(y_k))$ 为 n 阶模糊数判断矩阵 $\tilde X = (\tilde x_{ij})_{n\times n}$ 的满意水平.

于是, 在给定模糊判断矩阵下, 极大化满意水平的模糊数判断矩阵权重向量求解问题可用如下数学模型(M)来描述:

$$F(\gamma, \tilde{y}) = \max \gamma, \tag{2}$$

$$\text{s.t.}\ \mu_{\tilde{b}_k}(y_k) \geq \gamma,$$

$$\forall k \in [1, n(n-1)/2]; \tag{3}$$

$$\tilde{y}_k = \tilde{x}_{ij},\ \forall i, j \in N, j > i,$$

$$k = (i-1)n + (j-i); \tag{4}$$

$$\tilde{X}W = \lambda_{\max}(\tilde{X})W, \tag{5}$$

$$\frac{\lambda_{\max}(\tilde{X}) - n}{(n-1)RI} \leq 0.1; \tag{6}$$

$$\tilde{x}_{ij} = 1/\tilde{x}_{ji},\ \tilde{x}_{ii} = 1,\ \forall i, j \in N; \tag{7}$$

$$\tilde{y}_k \in \tilde{b}_k,\ \gamma \in [0, 1],$$

$$\forall k \in [1, n(n-1)/2]. \tag{8}$$

其中: $N = \{1, 2, \cdots, n\}$, $\tilde{b}_k = [b_k^L, b_k, b_k^U]$ 为给定三角形模糊判断矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times n}$ 的上三角元素, $\tilde{a}_{ij} = [a_{ij}^L, a_{ij}, a_{ij}^U]$, $\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{n\times n}$, $W = [w_1, w_2, \cdots, w_n]^T$.

在模型(M)中, 目标函数(2)表示极大化满意水平; 约束条件(3)表示满意水平定义; 约束条件(4)表示将决策变量转换成相应的模糊数判断矩阵; 约束条件(5)表示模糊数判断矩阵的权重计算; 约束条件(6)表示模糊数判断矩阵的一致性条件; 约束条件(7)表示构成模糊数判断矩阵的约束; 约束条件(8)表示决策变量的取值范围.

由于模型(M)的可行域是非连通的, 无法用一般规划方法进行优化求解, 本文进而研究用遗传算法求解模型的问题[9].

4 模型求解

4.1 染色体编码及其初始化

从求解问题的特点出发, 设计染色体编码为主从式实值编码, 主从关系如图 2 所示. 主从式实值编码的特点是主编码控制从编码的产生范围, 从编码满足主编码的约束条件.

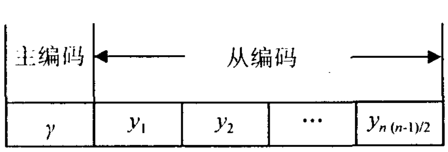


图 2 染色体编码

设染色体 j 的编码表示为 $Z(j) = [\gamma(j), y_1(j), \cdots, y_{n(n-1)/2}(j)]$, 其随机产生过程如下:

1) 随机产生主编码 $\gamma(j) \in [0, 1]$.

2) 设 $\forall i \in [1, n(n-1)/2]$, $[d_i^L(j), d_i^U(j)]$ 表示染色体 j 的从编码取值范围的边界点, 即 $d_i^L = b_i^L + \gamma(j)(b_i - b_i^L)$, $d_i^U = b_i^U + \gamma(j)(b_i^U - b_i)$. 于是, 随机产生从编码 $y_i(j)$ 为

$$y_i(j) = d_i^L(j) + \text{rand}[d_i^U(j) - d_i^L(j)], \tag{9}$$

其中 rand 为[0, 1]之间的随机数.

可见, 随机生成的染色体 $Z(j)$ 完全满足模型(M)中的约束条件(3)和(8).

4.2 适应值函数

约束优化问题的一般处理方法是利用惩罚因子, 将约束条件结合到目标函数中[9]. 因此, 染色体 $Z(j)$ 的适应值函数定义为

$$F(Z(j)) =$$

$$\gamma(j) - \varphi\max\left\{0, \frac{\lambda_{\max}(\tilde{X}(j)) - n}{(n-1)RI} - 0.1\right\}, \tag{10}$$

其中 φ 为惩罚因子, 是一个很大的正数.

4.3 遗传运算

在遗传算法中, 交叉和变异是两种最常用的遗传运算. 对于本文问题, 采用传统的染色体交叉和变异运算方式, 极易产生问题(M)的非可行解. 为此设计了如下主从编码自主遗传的运算方式, 即变异运算只在染色体的主编码上进行变异, 交叉运算只在同类染色体的从编码上进行算术交叉.

定义 8 称具有相同主编码的染色体群为同类染色体.

4.3.1 主编码自主遗传运算

设随机确定的第 k 代变异染色体为 $Z^k(j) = [\gamma^k(j), y_1^k(j), \cdots, y_{n(n-1)/2}^k(j)]$. 在经过主编码的自主变异遗传运算后, 得到一个新的染色体 $Z^{k+1}(j) = [\gamma^{k+1}(j), y_1^{k+1}(j), \cdots, y_{n(n-1)/2}^{k+1}(j)]$. 其中主编码 $\gamma^{k+1}(j) = \text{rand}, \text{rand} \in [0, 1]$, 从编码 $y_i^{k+1}(j) = d_i^L(j) + \text{rand}[d_i^U(j) - d_i^L(j)]$, $d_i^L(j) = b_i^L + \gamma^{k+1}(j)(b_i - b_i^L)$, $d_i^U(j) = b_i^U - \gamma^{k+1}(j)(b_i^U - b_i)$, $[b_i^L, b_i, b_i^U]$ 为给定三角形模糊判断矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a})_{n\times n}$ 的上三角元素.

4.3.2 从编码自主遗传运算

设随机确定的第 k 代交叉染色体为 $Z^k(1) = [\gamma^k(1), y_1^k(1), \cdots, y_{n(n-1)/2}^k(1)]$, 在同类染色体中随机确定的另一个染色体为 $Z^k(2) = [\gamma^k(2), y_1^k(2), \cdots, y_{n(n-1)/2}^k(2)]$. 其中 $\gamma^k(1) = \gamma^k(2)$. 在经过从编码的自主交叉遗传运算后, 得到两个新的染色体 $Z^{k+1}(1) = [\gamma^{k+1}(1), y_1^{k+1}(1), \cdots, y_{n(n-1)/2}^{k+1}(1)]$ 和 $Z^{k+1}(2) = [\gamma^{k+1}(2), y_1^{k+1}(2), \cdots, y_{n(n-1)/2}^{k+1}(2)]$, 其中主编码 $\gamma^{k+1}(1) = \gamma^{k+1}(2) = \gamma^k(1) = \gamma^k(2)$. 即保持原来的不变, 从编码分别为 $y_i^{k+1}(1) = \beta y_i^k(2) + (1-\beta)y_i^k(1)$ 和 $y_i^{k+1}(2) = \beta y_i^k(1) + (1-\beta)y_i^k(2)$, 参数 β 取为 $0 \leq \beta \leq 1$.

4.4 选择策略与停止准则

选择策略采用比例选择与精华模型相结合的运

算方法, 即将最优染色体直接复制进入下一代, 下一代其他染色体采用轮盘选择法来产生. 这样的选择策略可以保证最优个体进入下一代, 同时可使其他染色体有机会进入下一代, 从而避免了染色体因适应值不同而带来的悬殊选择机会.

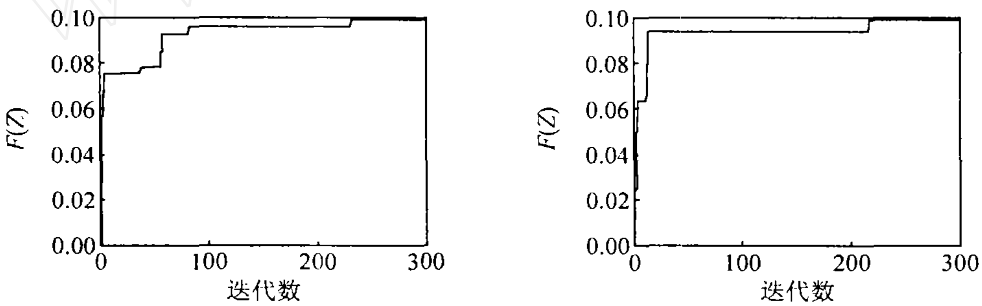
停止准则采用最大迭代数判断法, 即判断迭代的代数是否为要求的代数 Gen, 若是则停止进化, 选择最优染色体作为模型(M) 的最优化解输出.

5　仿真计算

本文提出的遗传算法采用Matlab 实现, 并在 Pentium Ⅳ机上作了大量计算, 都取得了满意结果. 图3～ 图5给出了其中两个仿真算例, GA 参数设定取为种群数M = 30, 迭代总数Gen = 300, 交叉率p_c = 0.6, 变异率p_m = 0.15, 惩罚因子 ϕ = 1 000, 参数 β = 0.4. 比较分析计算结果, 可以看出算法是有效的. 给定的两个模糊判断矩阵分别为

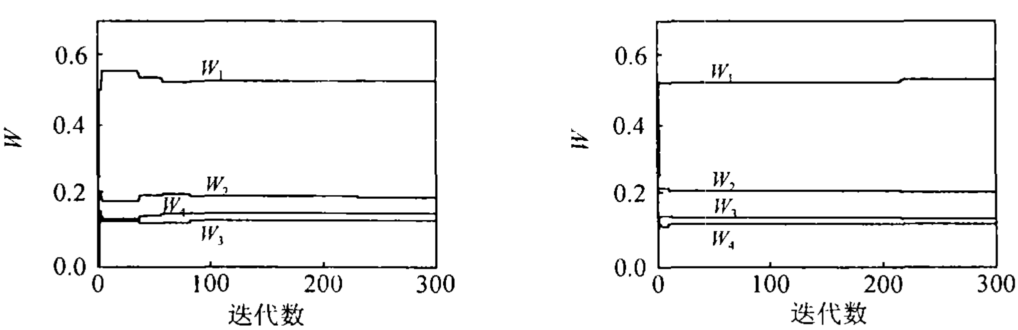
$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} [1,1,1] & [2,3,4] & [3,3.5,5] & [3,4,5] \\ \left[\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right] & [1,1,1] & \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right] & [2,3,5] \\ \left[\frac{1}{5},\frac{1}{3.5},\frac{1}{3}\right] & \left[1,\frac{3}{2},2\right] & [1,1,1] & \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right] \\ \left[\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right] & \left[\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right] & [1,2,3] & [1,1,1] \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} [1,1,1] & [2,3,4] & [3,4,5] & [3,4.5,5] \\ \left[\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right] & [1,1,1] & \left[\frac{1}{2},1,1\right] & [2,4,5] \\ \left[\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right] & [1,1,2] & [1,1,1] & \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right] \\ \left[\frac{1}{5},\frac{1}{4.5},\frac{1}{3}\right] & \left[\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right] & \left[1,\frac{3}{2},3\right] & [1,1,1] \end{bmatrix}.$$



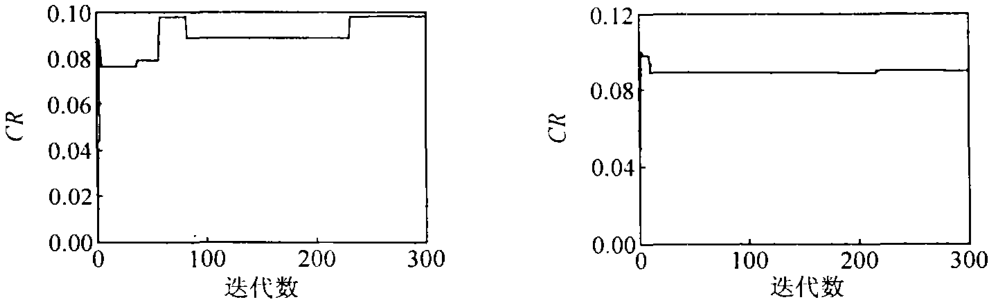
(a)　$\tilde{A}_1$　　(b)　$\tilde{A}_2$

图 3　最优适应值曲线



(a)　$\tilde{A}_1$　　(b)　$\tilde{A}_2$

图 4　权重向量曲线



(a)　$\tilde{A}_1$　　(b)　$\tilde{A}_2$

图 5　随机一致性比例曲线

6 结 论

模糊AHP 的权重向量求解是决策领域中的一个热点研究问题. 本文提出的基于遗传算法的极大化满意水平模糊AHP 的权重向量求解方法, 为解决实际多准则决策问题提供了一条新途径. 该算法结构简洁、运算速度快、运算结果明了、便于决策者参考, 具有较大的实用价值.

参考文献(References)

[1] Saaty T L. Decision Making with the AHP: Why is the Principal Eignvector Necessary[J]. *European J of Operational Research*, 2003, 145(1): 85-91.

[2] Loargoven Van, Pedrycz W. A Fuzzy Extension of Saaty's Priority Theory[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1983, 11(1): 229-241.

[3] Sugihara Kazutomi, Hideo Tanaka. Interval Evaluation in the Analytic Hierarchy Process by Possibility Analysis[J]. *Computational Intelligence*, 2001, 17(3): 567-579.

[4] Xu R N, Zhai X Y. Fuzzy Logarithmic Least Squares Ranking Method in Analytic Hierarchy Process[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 77: 175-190.

[5] 樊治平, 胡国奋. 区间数多属性决策的一种目标规划方法[J]. *管理工程学报*, 2000, 14(4): 50-53.
(Fan Z P, Hu G F. A Goal Programming Method for Multiple Attribute Decision Making with Intervals[J]. *J of Industrial Engineering/Engineering Management*, 2000, 14(4): 50-53.)

[6] 朱建军, 刘士新, 王梦光. 基于遗传算法求解区间数AHP 判断矩阵的权重[J]. *系统工程学报*, 2004, 19(4): 344-393.
(Zhu J J, Liu S X, Wang M G. Estimation of Weight Vectors of Interval Numbers Judgement Matrix in AHP Using Genetic Algorithm[J]. *J of Systems Engineering*, 2004, 19(4): 344-393.)

[7] 沈源, 陈幼平, 丘智明, 等. 一种基于满意度的模糊层次分析评估方法[J]. *中国机械工程*, 1999, 10(7): 769-772.
(Shen Y, Chen Y P, Qiu Z M, et al. A Evaluation Method of Satisfactory-degree-based Fuzzy Analytic Hierarchy Process[J]. *China Mechanical Engineering*, 1999, 10(7): 769-772.)

[8] 谭跃进, 陈英武, 易进先. *系统工程原理*[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2001.
(Tan Y J, Chen Y W, Yi J X. *Theory of System Engineering*[M]. Changsha: University Press of the National Defence Science and Technology, 2001.)

[9] 玄光南, 程润伟. *遗传算法与工程设计*[M]. 汪定伟, 等译. 北京: 科学出版社, 2000.
(Xuan G G, Cheng R W. *Genetic Algorithm and Its Design of Engineering*[M]. Translated by Wang D W, et al. Beijing: Science Press, 2000.)

(上接第 179 页)

[11] Enrique Alba, José M Troya. Analyzing Synchronous and Asynchronous Parallel Distributed Genetic Algorithms[J]. *Future Generation Computer Systems*, 2001, 17(4): 451-465.

[12] 王大明, 毛宗源. 并行遗传算法综述[J]. *暨南大学学报*, 1998, 19(1): 20-25.
(Wang D M, Mao Z Y. Survey for Parallel Genetic Algorithm[J]. *J of Ji'nan University*, 1998, 19(1): 20-25.)

[13] Ioan Cristian Trelea. The Particle Swarm Optimization Algorithm: Convergence Analysis and Parameter Selection[J]. *Information Processing Letters*, 2003, 85(6): 317-325.

[14] 潘正君, 康立山, 陈毓屏. *演化计算*[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998: 66-68.
(Pan Z J, Kang L S, Chen Y P. *Evolutionary Computation* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1998: 66-68.)

(上接第 183 页)

[9] Hill J. *A Software Architecture Supporting Networked Sensors* [D]. Berkeley: University of California at Berkeley, 2000.

[10] Boulis A, Ganeriwal S, Srivastava M B. Aggregation in Sensor Networks: An Energy-accuracy Trade-off Sensor Network Protocols and Applications[A]. *Proc of the First IEEE Int Workshop on Sensor Network Protocols and Applications* [C]. Anchorage, 2003: 128-138.