

文章编号: 1001-0920(2006)02-0193-04

## 加速度约束条件下的非完整移动机器人运动控制

曹洋<sup>1</sup>, 方帅<sup>2</sup>, 徐心和<sup>3</sup>

(1. 中国科学技术大学 自动化系, 合肥 230027; 2 合肥工业大学 计算机与信息学院, 合肥 230009; 3 东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004)

**摘要:** 将移动机器人的运动规划与跟踪控制问题合并在一起, 对加速度约束条件下的非完整移动机器人运动控制问题进行研究. 提出基于贝塞尔曲线的路径规划方法, 以满足机器人的非完整约束. 在考虑所受加速度约束的条件下, 通过规划机器人状态时间轨线的方法实现了时间最优的轨迹规划. 基于控制李亚普诺夫函数推导出了轨迹跟踪的控制律. 仿真实验结果表明所提出的算法是有效的.

**关键词:** 移动机器人; 非完整约束; 路径规划; 轨迹规划; 轨迹跟踪

**中图分类号:** TP242      **文献标识码:** A

## Motion Control of Nonholonomic Mobile Robot under Acceleration Constraints

CAO Yang<sup>1</sup>, FANG Shuai<sup>2</sup>, XU X in-he<sup>3</sup>

(1. Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China; 2 School of Computer and Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 3 College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China Correspondent: CAO Yang, E-mail: forrest@ustc.edu.cn)

**Abstract:** Motion control of nonholonomic mobile robot under acceleration limits is discussed. Motion planning and trajectory tracking are incorporated. The planned path is presented as Bezier curve that can be proved to satisfy the nonholonomic constraints. Under the acceleration constraints, the trajectory realized by planning the time law of robot's state is optimized in the sense of minimum time. Finally, the control law of trajectory tracking is presented based on a control Lyapunov function. The simulation results prove the effectiveness of the proposed methods.

**Key words:** Mobile robot; Nonholonomic constraints; Path planning; Trajectory generation; Trajectory tracking

### 1 引言

轮式移动机器人(WMR)以其灵活性和大范围活动能力,在国防和工业生产中具有广泛的应用前景和商业价值,其运动控制问题受到了学者们的广泛关注<sup>[1,2]</sup>.轮式移动机器人运动控制问题,可描述为控制机器人沿着一条预先规划的轨迹,从某一初始位姿运动到达目标位姿.这一问题包含两方面内容:运动规划和跟踪控制.

相关文献一般是对这两个子问题单独进行讨论,如文献[3~5]分别采用时间、能量和路径长度作为性能指标,用于移动机器人最优路径规划问题的

求解;文献[6~8]对非完整移动机器人的跟踪控制问题进行研究.在实际应用中,将这两个子问题分开解决,通常会出现效率不高、跟踪失败等问题.这主要是因为运动规划时没有考虑机器人所受的外界约束条件,导致机器人在某些时刻无法达到给定的输入,从而无法实现有效的轨迹跟踪.

本文针对上述问题,将轮式移动机器人的运动规划与轨迹跟踪问题合并在一起,认为运动规划是轨迹跟踪的基础,目的是为轨迹跟踪提供控制目标.文中推导了机器人在运动过程中所受约束的数学模型;为使规划的路径能够满足所受约束,提出采用三

收稿日期: 2004-12-31; 修回日期: 2005-04-20

作者简介: 曹洋(1980—),男,辽宁盘锦人,博士后,从事智能机器人、机器人运动控制的研究;徐心和(1940—),男,河北山海关人,教授,博士生导师,从事智能机器人、模式识别等研究.

阶贝塞尔曲线进行路径规划, 以满足非完整约束, 并给出了加速度约束条件下时间最优的轨迹规划方法; 针对移动机器人的轨迹跟踪问题, 在建立误差系统模型的基础上, 介绍了基于控制李亚普诺夫函数 (CLF) 的轨迹跟踪控制律的推导过程 本文算法已应用于仿真机器人足球比赛, 取得了较好的效果

## 2 机器人及所受约束的数学模型

本文研究的对象是一类双轮驱动的机器人小车 这类机器人的运动学模型可描述为

$$\dot{x} = v \cos \theta, \dot{y} = v \sin \theta, \dot{\theta} = \omega \quad (1)$$

其中  $v$  和  $\omega$  是机器人中心的线速度和角速度.

假设车轮与地面之间没有打滑, 则机器人所受的非完整约束为

$$x \sin \theta - y \cos \theta = 0 \quad (2)$$

其中  $x, y$  和  $\theta$  分别是机器人的中心位置和朝向.

为简化问题, 忽略机器人的动力学内容, 则机器人在运动过程中只受到车轮与地面之间摩擦力的作用 这一摩擦力与机器人的重力  $m g$  和摩擦系数  $\mu$  有关, 可表示为  $F_{\text{fric}} = \mu \times m g$ .

在机器人的运动过程中, 如果其加速度超过某个最大值, 就会发生车轮打滑的现象, 从而导致机器人偏离预定轨迹 加速度的最大值为

$$a_{\text{max}} = F_{\text{fric}}/m = \mu g. \quad (3)$$

机器人的加速度可正交分解为线加速度  $a_{\text{tan}}$  和角加速度  $a_{\text{rad}}$  其中线加速度  $a_{\text{tan}}$  是线速度  $v$  关于时间的微分, 它的朝向与规划路径在接触点  $(x_r, y_r)$  的切线方向相同 由式(1)和(2)可知

$$a_{\text{tan}} = \dot{v} = \dot{x}_r \cos \theta + \dot{y}_r \sin \theta \quad (4)$$

机器人角加速度的方向正交于线加速度的方向, 可表示为

$$a_{\text{rad}} = v \times \omega = (\dot{x}_r \cos \theta + \dot{y}_r \sin \theta) \hat{\theta} \quad (5)$$

结合式(5)和(8), 可得出机器人加速度约束的数学表达式

$$a = \sqrt{a_{\text{tan}}^2 + a_{\text{rad}}^2} \leq a_{\text{max}} \quad (6)$$

此外, 机器人还受其速度约束条件的限制, 其数学表达式为

$$V < V_{\text{max}}, \omega < \omega_{\text{max}} \quad (7)$$

## 3 基于贝塞尔曲线的路径规划

### 3.1 路径规划中的非完整约束

本文的研究对象为双轮小车, 它是一类典型的非完整系统 对于此类系统的研究, 通常是将其系统模型转化成某种规范形式来进行 链式系统则是最常用的一种规范形式 使用如下坐标变换和输入转换:

$$\xi_1 = x, \xi_2 = \tan \theta, \xi_3 = y; \quad (8)$$

$$v = v_1 \sec \theta, \omega = u_2 \cos^2 \theta \quad (9)$$

可将机器人运动学模型(1)转化成如下链式系统的形式:

$$\dot{\xi}_1 = u_1, \dot{\xi}_2 = u_2, \dot{\xi}_3 = \xi_2 u_1, \quad (10)$$

其所受的非完整约束为  $\xi_3 = \xi_2 \xi_1$ .

此时, 机器人的路径规划问题可描述为寻找曲线函数  $y = f(x)$ , 使其满足如下端点条件:

$$\begin{cases} f(x(t_0)) = y(t_0), \\ df(x(t_0))/dx = \tan(\theta(t_0)); \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} f(x(t_f)) = y(t_f), \\ df(x(t_f))/dx = \tan(\theta(t_f)). \end{cases} \quad (12)$$

其中:  $x(t_0)$  是起始点,  $x(t_f)$  是终止点

### 3.2 贝塞尔曲线

为满足式(11)和(12)的路径规划的端点条件, 本文选用贝塞尔曲线<sup>[9]</sup>进行路径规划 假设已知初始点位置  $P_s(x_1, y_1)$ , 初始速度  $V_s$  (朝向角为  $\alpha_1$ ), 目标点位置  $p_d(x_4, y_4)$  和末端速度  $V_d$  (朝向角为  $\alpha_2$ ), 则连接  $p_s$  和  $p_d$  两点的三阶贝塞尔曲线方程为

$$\begin{cases} x = x_1(1-u)^3 + 3x_2(1-u)^2u + 3x_3(1-u)u^2 + x_4u^3, \\ y = y_1(1-u)^3 + 3y_2(1-u)^2u + 3y_3(1-u)u^2 + y_4u^3; \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \lambda v_s \cos \alpha_1, \\ y_2 = y_1 + \lambda v_s \sin \alpha_1; \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} x_3 = x_4 - \lambda v_d \cos \alpha_2, \\ y_3 = y_4 - \lambda v_d \sin \alpha_2 \end{cases} \quad (15)$$

其中:  $\lambda$  为正系数,  $u$  的取值范围为  $[0, 1]$

将式(13)~(15)代入式(11)和(12), 易证采用该方法进行路径规划, 满足式(11)和(12)的端点条件, 即该路径是满足非完整约束的

## 4 轨迹规划与轨迹跟踪

### 4.1 时间最优的轨迹规划

机器人的路径和轨迹是两个不同的概念, 路径是一条静态的几何轨线, 而轨迹则是以时间为参数的轨线 一旦运动的轨迹确定, 机器人运动的时间也就确定 因此, 移动机器人的轨迹规划问题要比路径规划问题复杂, 除要规划一条状态的几何轨线外, 还要规划一条状态的时间轨线  $u = u(t)$ .

本文所讨论的轨迹规划是在离散空间下进行的, 因此时间轨线  $u$  可设计为

$$u = k/T_{\text{opt}}, k = 0, 1, \dots, T_{\text{opt}} \quad (16)$$

其中  $T_{\text{opt}}$  是机器人完成轨迹跟踪所需的最小周期数

于是, 轨迹规划问题便可转化为一个时间的最

优化问题 考虑到规划的轨迹还应足够平滑以满足机器人容易跟踪的需要, 因此提出如下代价函数:

$$J = w T_{opt} + \frac{1}{T_{opt} u=0} \delta(u). \quad (17)$$

其中:  $w$  是加权系数,  $\delta$  是轨迹的曲率, 可按式(17)求解:

$$\delta(u) = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t} y(u)\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} x(u)\right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} x(u)\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} y(u)\right)}{\left(\frac{\partial}{\partial t} x(u)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t} y(u)\right)^2}. \quad (18)$$

利用式(14)和(15)中的系数  $\lambda$  作为设计变量, 式(6)作为加速度约束条件, 通过求解有约束最优化问题  $\min_{\lambda} J = J(\lambda)$ , 即可得到所规划的轨迹

### 4.2 轨迹跟踪

移动机器人轨迹跟踪问题通常可等价地转化为对一参考小车的跟随问题<sup>[9]</sup>. 参考小车模型为  $\dot{q}_r = s(q_r)\Psi_r$ , 其中  $q_r = [x_r, y_r, \theta]^T$ ,  $\Psi_r = [v_r, \omega]^T$ .

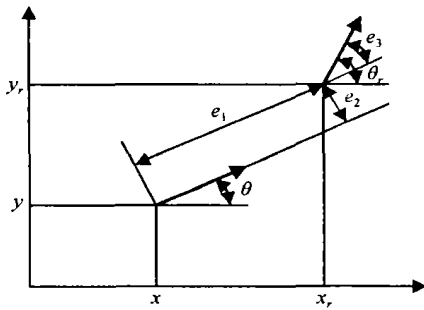


图 1 轨迹跟踪问题误差系统模型

构建如图 1 所示的误差系统, 则轨迹跟踪误差动态方程为

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \cos e_3 - v + e_2 \omega \\ v_r \sin e_3 - e_1 \omega \\ \omega - \dot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

此时, 控制目标为设计一速度控制律  $\Psi(t) = [v(t), \omega(t)]^T$ , 令  $t \rightarrow \infty, e \rightarrow 0$ .

本文采用控制 Lyapunov 函数来设计轨迹跟踪控制律 构造正定函数

$$V = \frac{k_1}{2} (e_1^2 + e_2^2) + 1 - \cos e_3, k_1 > 0 \quad (20)$$

设计反馈控制律

$$\Psi = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \cos e_3 + k_2 e_1 \\ \omega + k_1 e_2 v_r + k_3 \sin e_3 \end{bmatrix}, \quad k_1, k_2, k_3 > 0 \quad (21)$$

对式(20)求时间导数, 并代入式(21)可得

$$\dot{V} = -k_1 k_2 e_1^2 - k_3 \sin^2 e_3 \leq 0 \quad (22)$$

由此得到一个弱 CLF ( $\dot{V}$  不严格小于零). 由文献

[10] 知, 根据弱 CLF 设计的反馈控制律(21), 可保证系统渐近收敛于稳定平衡点  $e = 0$

### 5 实验结果

为检验本文算法的有效性, 分别在 Matlab 和仿真机器人足球比赛平台 Simuot 上进行仿真实验. 规划的轨迹起始为 (0, 0, 0), 规划初速度为 0 cm/s, 目标位姿为 (10, 20, 0), 规划末速度为 200 cm/s 机器人的初始位姿为 (1, 1,  $\pi/6$ ), 线速度最大值为 200 cm/s, 角速度最大值为 50 rad/s, 加速度最大值为 0.2 m/s<sup>2</sup>.

仅考虑速度约束, 在 Matlab 下得到一条基于贝塞尔曲线的时间最优轨迹, 如图 2 所示, 其中实线为规划的轨迹, 虚线为轨迹跟踪的效果. 这只是理想状态下的仿真结果.

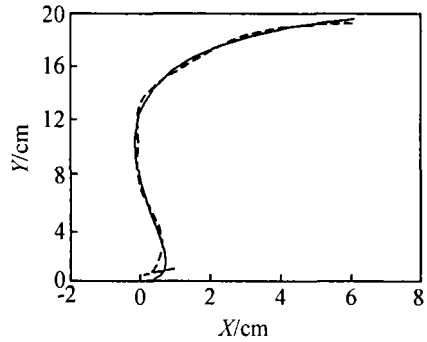


图 2 不考虑加速度约束的轨迹跟踪

机器人的实际加速度如图 3 所示, 其中曲线 ① 为理想状态下的加速度轨线, 曲线 ② 为加速度约束条件下采用传统算法的加速度轨线, 曲线 ③ 为加速度约束条件下采用本文算法的加速度轨线. 由曲线 ① 可以看出, 此时要求机器人的加速度能够达到一个很大的值, 这在实际中是很难实现的

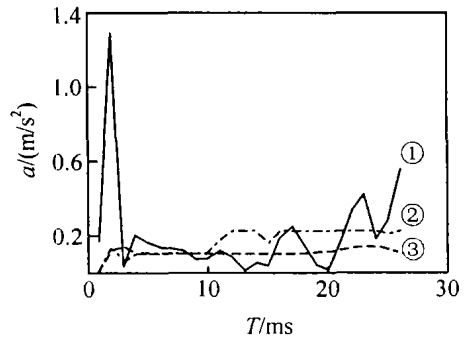


图 3 机器人的实际加速度

在 Simuot 平台上对该轨迹进行跟踪实验, 结果如图 4 所示. 可以看出机器人无法按预定轨迹前进, 这是由于受加速度约束的限制, 机器人不能达到给定的速度

应用本文方法对轨迹进行重新规划, 规划的轨

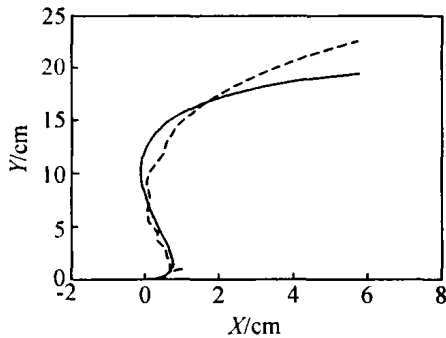


图4 考虑加速度约束的轨迹跟踪

迹和机器人的实际跟踪效果如图5所示。此时机器人能够沿着预定轨迹前进,且由曲线可以看出,机器人的加速度始终满足其约束条件。

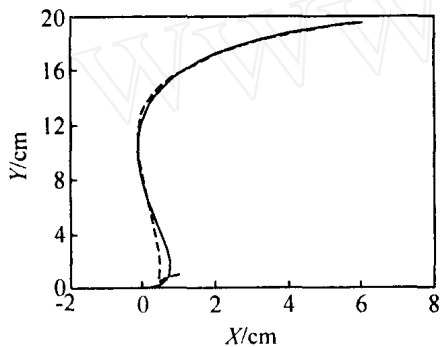


图5 加速度约束下时间最优轨迹跟踪

## 6 结 语

本文将移动机器人的运动规划与跟踪控制问题相结合,提出一种加速度约束条件下的非完整移动机器人的运动控制算法。利用贝塞尔曲线进行路径规划,使路径上各点均能满足非完整约束。通过对机器人状态时间轨线的规划,得到了加速度约束条件下的时间最优轨迹,并基于控制李亚普诺夫函数推导出了轨迹跟踪律。仿真试验结果表明,本文方法能够保证机器人在最短时间内由起始点移动到目标点,且在运动过程中始终满足加速度约束。

本文的研究是针对双轮驱动的移动机器人进行的,但所得结论同样适用于其他类型的非完整移动机器人。不过由于机器人运动学模型的不同,其链式

系统的表现形式也不同,故所规划的路径满足非完整约束的端点条件也会发生变化。此时需要根据端点条件的变化选取不同阶次和形式的贝塞尔曲线。

## 参考文献 (References)

- [1] Kortenkamp D, Bonasso R P, Murphy R. *Artificial Intelligence and Mobile Robots* [M]. Massachusetts: The MIT Press, 1998.
- [2] Salichs M A, Moreno L. Navigation of Mobile Robots: Open Questions [J]. *Robotica*, 2000, 18(3): 227-234.
- [3] Lepetic M, Klancar G, Skrjanc I, et al. Time Optimal Path Planning Considering Acceleration Limits, Robotics and Autonomous System [J]. 2003, 45(3-4): 199-210.
- [4] Zheng S, Reif J. On Energy-minimizing Paths on Terrains for a Mobile Robot [A]. *IEEE Int Conf on Robotics and Automation* [C]. Taipei: IEEE Computer Society, 2003: 3782-3788.
- [5] Chettibi T, Lehtihet H E, Haddad M. Minimum Cost Trajectory Planning for Industrial Robots [J]. *European J of Mechanics*, 2004, 23(4): 703-715.
- [6] Pourbogh rat F, Karlsson M P. Adaptive Control of Dynamic Mobile Robots with Nonholonomic Constraints [J]. *Computers and Electrical Engineering*, 2002, 28(4): 241-253.
- [7] Sun S L. Designing Approach on Trajectory Tracking Control of Mobile Robot [J]. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, 2005, 21(1): 81-85.
- [8] 李世华, 田玉平. 非完整移动机器人的轨迹跟踪控制 [J]. *控制与决策*, 2002, 17(3): 301-305.  
(Li S H, Tian Y P. Trajectory Tracking Control of Nonholonomic Mobile Robots [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(3): 301-305.)
- [9] 朱心雄. *自由曲线曲面造型技术* [M]. 北京: 科学出版社, 2003.  
(Zhu X X. *Free Curve and Surface Modeling* [M]. Beijing: The Scientific Press, 2003.)
- [10] Freeman R A, Primbis J A. Control Lyapunov Functions: New Ideas from an Old Source [A]. *Proc of the 35th IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Kobe: IEEE Society, 1996, 4: 3926-3931.