第 21 卷 第 2 期　　控 制 与 决 策　　2006 年 2 月
Vol 21 No. 2　　Control and Decision　　Feb. 2006

文章编号: 1001-0920(2006)02-0197-04

# 一类线性切换系统 H∞状态反馈控制: LMI 方法

付主木, 费树岷, 龙 飞
(东南大学 自动化研究所, 南京 210096)

**摘　要**: 研究一类由任意有限多个线性子系统组成的切换系统的 $H_\infty$状态反馈控制问题. 利用 Lyapunov 函数方法, 给出由线性矩阵不等式(LMI)表示的控制器存在的充分条件, 并设计了相应的子控制器和切换策略. 最后给出一个数值仿真实例, 证明了所得结论的有效性.

**关键词**: 混杂系统; 线性切换系统; $H_\infty$状态反馈控制; 线性矩阵不等式
**中图分类号**: TP273　　**文献标识码**: A

# H∞ State Feedback Control for a Class of Switched Linear Systems: An LMI Approach

*FU Zhu-mu, FEI Shu-min, LONG Fei*
(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China. Correspondent: FU Zhu-mu, E-mail: fzm1974@163.com)

**Abstract**: $H_\infty$ state feedback control problem is investigated for a class of switched linear systems. Based on Lyapunov function techniques, a sufficient condition for the existence of sub-controllers that is expressed by linear matrix inequalities (LMI) is presented. Sub-controllers and switching strategy are designed. A simulation example is given to illustrate the validity of the results.

**Key words**: Hybrid systems; Switched linear systems; $H_\infty$ state feedback control; LMI

## 1 引　言

混杂动态系统是指包含连续时间动态和离散事件动态并相互作用的复杂系统, 主要用于对复杂大系统的描述、分析和控制. 切换系统是一类模型简单且研究较多的混杂动态系统, 一般由一族子系统和描述它们之间联系的切换策略组成. 切换系统已广泛应用于实际工程, 例如汽车变速系统、智能交通管理系统、柔性制造系统、电力系统网络切换等.

切换系统本质上是一种复杂的时变非线性系统, 即使在两个简单的线性系统之间进行切换, 由于切换策略不同, 也会产生完全不同的动态特性[1]. 例如, 两个不稳定的子系统通过适当的切换, 可以构成一个稳定的系统, 而两个稳定的子系统如果切换不当, 则将导致整个系统不稳定. 目前对切换系统的研究已有不少结果[1~6], 主要集中在系统的稳定性和能控、能观测性分析, 切换规则的设计, 系统在一定条件下的切换镇定等方面.

$H_\infty$ 控制理论的发展使其成为现代控制理论研究中的重要方向之一, $H_\infty$ 性能也成为一项重要的系统性能指标[7]. Doyle 等发表了著名的 DGKF 论文[8], 证明了 $H_\infty$ 设计问题的解可通过解两个适当的代数 Riccati 方程而得到, 标志着 $H_\infty$ 控制理论的成熟. $H_\infty$ 控制理论的发展和解法的完善, 使其在切换系统上的应用成为可能.

与切换系统稳定性结果和 $H_\infty$ 控制理论成果相比, 有关切换系统的 $H_\infty$ 控制问题的研究还很少. 最近文献[9] 利用单 Lyapunov 函数方法, 得到了一类线性切换系统具有 $H_\infty$ 扰动衰减度二次稳定的充分

**收稿日期**: 2004-12-10; **修回日期**: 2005-03-10.
**基金项目**: 高等学校博士学科点科研基金项目(20030286013); 江苏省自然科学基金项目(BK2003405).
**作者简介**: 付主木(1974—), 男, 湖北仙桃人, 博士生, 从事切换系统、$H_\infty$控制等研究; 费树岷(1961—), 男, 安徽宣城人, 教授, 博士生导师, 从事混杂系统、非线性系统控制等研究.

条件, 其研究重点放在由两个子系统组成的线性切换系统上. 本文利用Lyapunov函数与线性矩阵不等式相结合的方法, 给出一类由任意有限多个子系统构成的切换系统的 $H_\infty$ 状态反馈控制器, 以及切换策略的存在条件和设计方法, 并以仿真实例验证了所得结论的可行性.

## 2 问题描述和预备知识

考虑如下线性切换系统:

$$\Sigma:\begin{cases} \dot{x} = A_{\sigma(t)}x + B_{1\sigma(t)}\omega + B_{2\sigma(t)}u, \\ z = C_{\sigma(t)}x + D_{\sigma(t)}u. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态, $u \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入, $\omega \in \mathbf{R}^p$ 且 $\omega \in L_2[0,\infty)$ 为外部扰动, $z \in \mathbf{R}^q$ 为受控输出; $\sigma: [0,\infty) \to \mathrm{N} = \{1,2,\cdots,N\}$ 为分段常值函数, $\sigma(t)$ 的每次变化代表一次切换; $A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_i, D_i (i \in \mathrm{N})$ 为系统相应维数的常矩阵.

显然, 系统(1) 是由下述 $N$ 个线性子系统在切换策略 $\sigma(t)$ 作用下生成的.

$$\Sigma_i:\begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_{1i}\omega + B_{2i}u, \\ z = C_i x + D_i u, \ i \in \mathrm{N}. \end{cases} \quad (2)$$

本文的控制目标是对于给定的正数 $\gamma$, 设计系统(1) 中每个子系统(2) 的线性状态反馈控制器 $u = K_i x\ (i \in \mathrm{N})$ 和切换策略 $\sigma(t)$, 使得闭环系统

$$\Sigma_i':\begin{cases} \dot{x} = (A_i + B_{2i}K_i)x + B_{1i}\omega, \\ z = (C_i + D_iK_i)x, \ i \in \mathrm{N}. \end{cases} \quad (3)$$

满足如下 $H_\infty$ 性能:

1) 当初态 $x(0) = 0$ 时, 对于 $\forall T > 0$, $\forall \omega \in L_2[0,T]$, $\int_0^T z^{\mathrm{T}} z \mathrm{d}t \leq \gamma^2 \int_0^T \omega^{\mathrm{T}}\omega \mathrm{d}t$ 成立;

2) 当外部干扰 $\omega \equiv 0$ 时, 闭环系统的零点是渐近稳定的.

## 3 主要结果

为论述方便, 引入如下引理:

**引理 1**(Schur 补引理)[10] 对于给定的对称阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^{\mathrm{T}} & S_{22} \end{bmatrix}$, 其中 $S_{11}$ 和 $S_{22}$ 是方阵, 以下3个条件是等价的:

1) $S < 0$;

2) $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^{\mathrm{T}} S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;

3) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^{\mathrm{T}} < 0$.

**引理 2**[11] 对于适当维数的矩阵 $X$ 和 $Y$, 有

$$X^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}X \leq \alpha X^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{\alpha}Y^{\mathrm{T}}Y, \ \forall \alpha > 0.$$

对于式(1) 描述的切换系统的 $H_\infty$ 状态反馈控制, 有如下结果:

**定理 1** 若存在正定阵 $X$, 矩阵 $W$, 标量 $\alpha_i \geq 0 (\forall i \in \mathrm{N})$, 且 $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$, 常数 $\gamma > 0$, 满足下述条件:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}X + \bar{B}_2 W + (\bar{A}X + \bar{B}_2 W)^{\mathrm{T}} & \bar{B}_1 & (\bar{C}X + \bar{D}W)^{\mathrm{T}} \\ \bar{B}_1^{\mathrm{T}} & -\gamma I & 0 \\ \bar{C}X + \bar{D}W & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (4)$$

其中

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i,$$
$$\bar{B}_1 = [\sqrt{\alpha_1}B_{11}, \cdots, \sqrt{\alpha_N}B_{1N}],$$
$$\bar{B}_2 = [\alpha_1 B_{21}, \alpha_2 B_{22}, \cdots, \alpha_N B_{2N}],$$
$$\bar{C} = [\sqrt{\alpha_1}C_1^{\mathrm{T}}, \cdots, \sqrt{\alpha_N}C_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$
$$\bar{D} = \mathrm{diag}\{\sqrt{\alpha_1}D_1, \cdots, \sqrt{\alpha_N}D_N\},$$
$$W = [W_1^{\mathrm{T}}, W_2^{\mathrm{T}}, \cdots, W_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}.$$

则存在子控制器和切换策略, 使系统(1) 满足 $H_\infty$ 性能 1) 和 2). 相应的子控制器为

$$\Gamma_i: u = K_i x, K_i = W_i X^{-1}. \quad (5)$$

切换策略可选取

$$\sigma(t) = \arg\min_{i \in \mathrm{N}}\{x^{\mathrm{T}}((A_i + B_{2i}K_i)^{\mathrm{T}}Y + Y(A_i + B_{2i}K_i) + \gamma^{-2}YB_{1i}B_{1i}^{\mathrm{T}}Y + (C_i + D_iK_i)^{\mathrm{T}}(C_i + D_iK_i))x\}, \quad (6)$$

其中 $Y = \gamma X^{-1}$.

**注 1** 1) 定理1中的条件表明, 通过切换策略, 整个状态空间上每个点都有适当的子系统和子控制器, 使闭环系统满足 $H_\infty$ 性能, 并不要求每个子系统在整个状态空间上都满足 $H_\infty$ 性能, 甚至也不要求每个子系统稳定;

2) 系统(1) 的直输通道矩阵(即从输入到输出的通道矩阵) 并不受是否列满秩的约束;

3) 所得条件只是充分条件, 而非必要条件.

**证明** 1) 假设 $x(0) = 0, X, W, \alpha_i$ 和 $\gamma$ 满足定理1条件. 将式(4) 分别左乘和右乘 $\mathrm{diag}\{P, I, I\}$, 令 $X = P^{-1}$. 由式(5) $W = KX\ (K = [K_1^{\mathrm{T}}, K_2^{\mathrm{T}}, \cdots, K_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}})$ 得到

$$\begin{bmatrix} P(\bar{A} + \bar{B}_2 K) + (\bar{A} + \bar{B}_2 K)^{\mathrm{T}}P & P\bar{B}_1 & (\bar{C} + \bar{D}K)^{\mathrm{T}} \\ \bar{B}_1^{\mathrm{T}}P & -\gamma I & 0 \\ \bar{C} + \bar{D}K & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (7)$$

将式(7) 分别左乘和右乘 $\mathrm{diag}\{\gamma^{1/2}I, \gamma^{1/2}I, \gamma^{1/2}I\}$, 并记 $Y = \gamma P$, 得

$$\begin{bmatrix} Y(\bar{A}+\bar{B}_2K)+(\bar{A}+\bar{B}_2K)^{\mathrm{T}}Y & Y\bar{B}_1 & (\bar{C}+\bar{D}K)^{\mathrm{T}} \\ \bar{B}_1^{\mathrm{T}}Y & -\gamma^2 I & 0 \\ \bar{C}+\bar{D}K & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{8}$$

根据引理 1, 由式(8) 得

$$Y(\bar{A}+\bar{B}_2K)+(\bar{A}+\bar{B}_2K)^{\mathrm{T}}Y+\gamma^{-2}Y\bar{B}_1\bar{B}_1^{\mathrm{T}}Y+(\bar{C}+\bar{D}K)^{\mathrm{T}}(\bar{C}+\bar{D}K)<0. \tag{9}$$

将式(4) 中 $\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{C}, \bar{D}$ 所满足的条件代入式(9), 整理得

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(Y(A_i+B_{2i}K_i)+(A_i+B_{2i}K_i)^{\mathrm{T}}Y+\gamma^{-2}YB_{1i}B_{1i}^{\mathrm{T}}Y+(C_i+D_iK_i)^{\mathrm{T}}(C_i+D_iK_i))<0.$$

即对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(x^{\mathrm{T}}(Y(A_i+B_{2i}K_i)+(A_i+B_{2i}K_i)^{\mathrm{T}}Y+\gamma^{-2}YB_{1i}B_{1i}^{\mathrm{T}}Y+(C_i+D_iK_i)^{\mathrm{T}}(C_i+D_iK_i))x)<0. \tag{10}$$

由式(10) 和切换方案(6) 可知, 对于 $\forall t \geq 0$, 有

$$x^{\mathrm{T}}(Y(A_{\sigma(t)}+B_{2\sigma(t)}K_{\sigma(t)})+(A_{\sigma(t)}+B_{2\sigma(t)}K_{\sigma(t)})^{\mathrm{T}}Y+\gamma^{-2}YB_{1\sigma(t)}B_{1\sigma(t)}^{\mathrm{T}}Y+(C_{\sigma(t)}+D_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)})^{\mathrm{T}}(C_{\sigma(t)}+D_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)}))x<0. \tag{11}$$

取闭环系统的 Lyapunov 函数 $V(x) = x^{\mathrm{T}}Yx$, 则 $V(x)$ 沿着系统(3) 的导数为

$$\dot{V}(x)=x^{\mathrm{T}}(Y(A_{\sigma(t)}+B_{2\sigma(t)}K_{\sigma(t)})+(A_{\sigma(t)}+B_{2\sigma(t)}K_{\sigma(t)})^{\mathrm{T}}Y)x+x^{\mathrm{T}}YB_{1\sigma(t)}\omega+\omega^{\mathrm{T}}B_{1\sigma(t)}^{\mathrm{T}}Yx. \tag{12}$$

由引理 2 有

$$x^{\mathrm{T}}YB_{1\sigma(t)}\omega+\omega^{\mathrm{T}}B_{1\sigma(t)}^{\mathrm{T}}Yx \leq \gamma^{-2}x^{\mathrm{T}}YB_{1\sigma(t)}B_{1\sigma(t)}^{\mathrm{T}}Yx+\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}\omega$$

代入式(12) 并整理得

$$\dot{V}(x) \leq x^{\mathrm{T}}(Y(A_{\sigma(t)}+B_{2\sigma(t)}K_{\sigma(t)})+(A_{\sigma(t)}+B_{2\sigma(t)}K_{\sigma(t)})^{\mathrm{T}}Y+\gamma^{-2}YB_{1\sigma(t)}B_{1\sigma(t)}^{\mathrm{T}}Y)x+\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}\omega \tag{13}$$

对任意给定的 $T > 0$, 在零初始状态条件下, 考虑

$$J_T=\int_0^T(z^{\mathrm{T}}z-\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}\omega)\mathrm{d}t=\int_0^T(z^{\mathrm{T}}z-\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}\omega+\dot{V}(x))\mathrm{d}t-V(x(T)). \tag{14}$$

将系统(3) 代入, 由式(11) 和(13) 整理得

$$J_T \leq \int_0^T x^{\mathrm{T}}[Y(A_{\sigma(t)}+B_{2\sigma(t)}K_{\sigma(t)})+(A_{\sigma(t)}+B_{2\sigma(t)}K_{\sigma(t)})^{\mathrm{T}}Y+\gamma^{-2}YB_{1\sigma(t)}B_{1\sigma(t)}^{\mathrm{T}}Y+(C_{\sigma(t)}+D_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)})^{\mathrm{T}}(C_{\sigma(t)}+D_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)})]x\mathrm{d}t \leq 0. \tag{15}$$

即对于 $\forall T > 0, \forall \omega \in L_2[0, T]$, 有 $\int_0^T z^{\mathrm{T}}z\mathrm{d}t \leq \gamma^2\int_0^T\omega^{\mathrm{T}}\omega\mathrm{d}t$.

2) 假设外部干扰 $\omega \equiv 0$. 由条件(4) 和(5), 切换方案(6) 和式(11), 以及 $YB_{1\sigma(t)}B_{1\sigma(t)}^{\mathrm{T}}Y$, $(C_{\sigma(t)}+D_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)})^{\mathrm{T}}(C_{\sigma(t)}+D_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)})$ 均为非负定阵, 仍取 Lyapunov 函数 $V(x) = x^{\mathrm{T}}Yx$, 沿系统(3) 的导数仍为式(12). 注意到扰动 $\omega \equiv 0$, 重写为

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)=&x^{\mathrm{T}}(Y(A_{\sigma(t)}+B_{2\sigma(t)}K_{\sigma(t)})+(A_{\sigma(t)}+B_{2\sigma(t)}K_{\sigma(t)})^{\mathrm{T}}Y)x \leq \\ &x^{\mathrm{T}}(Y(A_{\sigma(t)}+B_{2\sigma(t)}K_{\sigma(t)})+(A_{\sigma(t)}+B_{2\sigma(t)}K_{\sigma(t)})^{\mathrm{T}}Y+\gamma^{-2}YB_{1\sigma(t)}B_{1\sigma(t)}^{\mathrm{T}}Y+ \\ &(C_{\sigma(t)}+D_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)})^{\mathrm{T}}(C_{\sigma(t)}+D_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)}))x<0.\end{aligned}$$

由 Lyapunov 稳定性理论知, 当外部干扰 $\omega \equiv 0$ 时, 闭环系统在零点是渐近稳定的. □

根据定理 1, 可将求解式(1) 所描述的线性切换系统的 $H_\infty$ 状态反馈控制问题转化为以下等价问题:

$$\min \lambda;$$

s.t. 1) $\lambda > 0$; 2) $\alpha_i \geq 0$;

3) $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i = 1$; 4) $X > 0$;

5) $$\begin{bmatrix} \bar{A}X+\bar{B}_2W+(\bar{A}X+\bar{B}_2W)^{\mathrm{T}} & \bar{B}_1 & (\bar{C}X+\bar{D}W)^{\mathrm{T}} \\ \bar{B}_1^{\mathrm{T}} & -\gamma I & 0 \\ \bar{C}X+\bar{D}W & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < -\lambda I.$$

上述优化问题的约束条件 5) 是关于变量 $W$, $X$ 和 $\alpha_i$ 的非线性不等式, 求解比较困难. 但若 $\alpha_i$ 已知, 则约束条件 5) 是关于变量 $W$ 和 $X$ 的线性矩阵不等式, 有成熟的软件包(如 MATLAB 中 LMI 工具箱等) 可以求解. 在求解式(1) 所描述的切换系统的 $H_\infty$ 控制问题时, 并不一定要对上述优化问题解得最优的 $\lambda$, 只要求 $\lambda, W, X, \alpha_i$ 满足约束 1)～5) 即可. 为便于计算, 可先随机产生满足约束 2) 和 3) 的 $\alpha_i$, 将其代入约束 5), 解 LMI 问题即可.

## 4　仿真算例

考虑由两个不稳定子系统组成的切换系统(2), $i \in \{1, 2\}$, 参数如下:

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\3 & -1 & 1\\0 & 2 & 0\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\1 & 0 & 9\\0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$C_1 = [-1 \quad 2 \quad 1],$$
$$C_2 = [2 \quad 1 \quad 1],$$
$$B_{11} = [0.3 \quad -0.1 \quad -1]^T,$$
$$B_{12} = [1 \quad -1 \quad -2]^T,$$
$$B_{21} = [-1 \quad 0 \quad 0.1]^T,$$
$$B_{22} = [-2 \quad 0.8 \quad 1]^T,$$
$$D_1 = 0, D_2 = 1.$$

取 $\alpha_1 = 0.891\,3$, $\alpha_2 = 0.108\,7$, $H_\infty$ 指标 $\gamma = 1$.

使用本文方法得到两个子控制器矩阵分别为

$$K_1 = [30.982\,1 \quad 70.256\,8 \quad 67.550\,1],$$
$$K_2 = [-4.277\,3 \quad -9.509\,5 \quad -8.652\,7].$$

设初始状态 $x(0) = [1 \quad -2 \quad 3]^T$, 采用上述方法仿真得到的系统状态如图 1 所示.

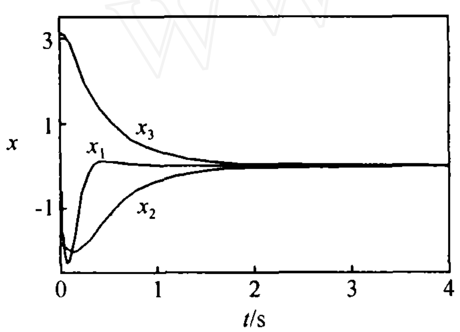


图 1 切换系统的状态响应曲线

由图 1 可以看出, 由两个不稳定子系统组成的切换系统, 在本文设计的子控制器和切换策略作用下, 经过很短时间便进入稳定状态, 从而验证了所研究方法的正确性和有效性.

## 5 结 语

本文利用 Lyapunov 函数方法, 研究一类线性切换系统的 $H_\infty$ 状态反馈控制器存在的充分条件. 文中设计了相应的子控制器和切换策略, 将该类线性切换系统的 $H_\infty$ 状态反馈控制问题转化为一个等价的由线性矩阵不等式表示的优化问题, 通过仿真实例证明了该方法的有效性. 本文得到的研究结果是一个充分条件, 可以用来设计子控制器和切换策略; 但由于不是必要条件, 无法给出切换系统 $H_\infty$ 控制的所有可行解. 有关切换系统 $H_\infty$ 控制器存在的充分必要条件尚待进一步研究.

## 参考文献(References)

[1] Liberzon D, Morse A S. Basic Problems in Stability and Design of Switched Systems[J]. *Control Systems Magazine*, 1999, 19(5): 59-70.

[2] Agrachev A A, Liberzon D. Lie-algebraic Stability Criteria for Switched Systems[J]. *SIAM J Control Optimize*, 2001, 40(1): 253-269.

[3] Sun Z, Ge S S, Lee T H. Controllability and Reachability Criteria for Switched Linear Systems[J]. *Automatica*, 2002, 38(5): 775-786.

[4] Shorten R N, Narendra K S, Mason O. A Result on Common Quadratic Lyapunov Functions[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(1): 618-621.

[5] Xie G, Wang L. Controllability and Stabilizability for Switched Linear Systems[J]. *Systems and Control Letters*, 2003, 48(2): 135-155.

[6] Sun Z. A Robust Stabilizing Law for Switched Linear Systems[J]. *Int J of Control*, 2004, 77(4): 389-398.

[7] 申铁龙. *$H_\infty$ 控制理论及应用*[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.
(Shen T L. *$H_\infty$ Control Theory and Application* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996.)

[8] Doyle J, Glover K, Khargonekar P, et al. State-space Solution to Standard $H_\infty$ and $H_2$ Control Problem[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(8): 831-842.

[9] 聂宏, 赵军. 一类线性切换系统具有 $H_\infty$ 性能指标的二次稳定[J]. *控制理论与应用*, 2004, 21(2): 189-194.
(Nie H, Zhao J. Quadratic Stability with $H_\infty$-infinity Performance for a Class of Switched Linear Systems [J]. *Control Theory and Applications*, 2004, 21(2): 189-194.)

[10] 刘永清, 唐功友. *大型动力系统的理论与应用: 滞后、稳定与控制*[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1992.
(Liu Y Q, Tang G Y. *Theory and Application of Large-scale Dynamic Systems: Delay, Stability and Control* [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1992.)

[11] Petersen I R, Hollot C V. A Riccati Equation Approach to the Stabilization of Uncertain Linear Systems[J]. *Automatica*, 1986, 22(4): 397-411.