

文章编号: 1001-0920(2006)03-0339-04

广义离散系统多传感器信息融合 Kalman 滤波器

石莹^{1,2}, 段广仁¹

(1. 哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术研究中心, 哈尔滨 150001; 2 黑龙江大学 自动化系, 哈尔滨 150080)

摘要: 考虑了广义离散随机线性系统的多传感器信息融合状态估计问题。在广义系统无脉冲的假设条件下, 通过等价变换将其转化为正常系统, 应用经典 Kalman 滤波方法, 在线性最小方差信息融合准则下, 提出了按矩阵加权的广义系统多传感器信息融合稳态 Kalman 状态滤波器。仿真结果说明了算法的有效性。

关键词: 广义随机系统; 状态估计; 多传感器信息融合; Kalman 滤波; Riccati 方程

中图分类号: O211.64 **文献标识码:** A

Multi-sensor Information Fusion Steady-state Kalman Filter for Descriptor Discrete-time Systems

SHI Ying^{1,2}, DUAN Guangren¹

(1. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 2 Department of Automation, Heilongjiang University, Harbin 150080, China Correspondent: SHI Ying, E-mail: shiying89@hljtu.edu.cn)

Abstract: The problem of multi-sensor information fusion state estimation for descriptor discrete-time stochastic linear systems is considered. The descriptor system under consideration is subject to the pulse-free hypothesis and is converted into a normal system by an equivalent transformation. Based on classical Kalman filtering method, a multi-sensor information fusion steady-state Kalman filter weighted by matrices is proposed under linear least variance information fusion criterion. Simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: Descriptor stochastic system; State estimation; Multi-sensor information fusion; Kalman filtering; Riccati equation

1 引言

近年来, 多传感器信息融合技术引起了人们的广泛关注^[1-3], 在交通、通讯、遥感测量、目标识别和多目标跟踪等方面都有重要应用^[4]。但有关广义系统的多传感器信息融合状态估计问题的研究还很少见。文献[5, 6]只是对广义系统的状态估计问题进行了研究。

本文针对广义离散随机线性系统, 通过推导状态的滤波误差方差阵, 在线性最小方差信息融合准则下, 提出了按矩阵加权的多传感器稳态 Kalman 滤波器, 给出了递推形式的滤波器。本文算法便于实

时应用, 提高了状态的估计精度。

2 问题描述

考虑广义离散随机线性系统

$$Fx(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t); \quad (1)$$

$$y_i(t) = Hx(t) + \bar{v}_i(t), i = 1, 2, \dots, l \quad (2)$$

其中: t 为离散时间; $x(t) \in R^n$ 为状态, $y_i(t) \in R^m$ 为观测; F, Φ, Γ 和 H 为相应维数的常阵。

假设 1 系统(1)和(2)是无脉冲的, 即对于 $\forall z \in C$ (复数域), $\text{rank } F = \text{deg det}(zF - \Phi)$ 。

假设 2 $w(t) \in R^r$ 和 $\bar{v}_i(t) \in R^m$ 是零均值的白噪声, 方差阵和相关阵各为 Q_w, \bar{Q}_{v_i} 和 S_i , 即

收稿日期: 2005-01-05; 修回日期: 2005-03-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(60374024)。

作者简介: 石莹(1971—), 女, 河北安国人, 讲师, 博士生, 从事 Kalman 滤波、状态估计等研究; 段广仁(1962—), 男, 哈尔滨人, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、广义系统和现代控制理论在航天中的应用等研究。

$$E\left\{\begin{bmatrix} w(t) \\ v_i(t) \end{bmatrix} [w^T(j) \quad v_i^T(j)]\right\} = \begin{bmatrix} Q_w & \bar{S}_i \\ \bar{S}_i^T & Q_{v_i} \end{bmatrix} \delta_{ij} \quad (3)$$

其中: E 为均值号, $\delta_i = 1, \delta_j = 0, t = j$.

假设 3 初始观测时刻 $t_0 = -$.

问题是: 对于系统 (1) 和 (2), 基于观测 $\{y_i(t), y_i(t-1), \dots\}, i = 1, 2, \dots, l$, 求状态 $x(t)$ 的局部稳态 Kalman 滤波器 $\hat{x}_i(t|t)$ 和融合稳态 Kalman 滤波器 $\hat{x}_0(t|t)$.

3 局部稳态最优 Kalman 滤波器

由假设 1 知, 存在非奇异矩阵 N 和 M , 使得^[7]

$$NFM = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, N\Phi M = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix},$$

$$N\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix}, HM = [H_1 \quad H_2] \quad (4)$$

其中: $n_1 = \text{rank}F, n_2 = n - n_1, I_q$ 为 $q \times q$ 的单位阵

令 $x(t) = M \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, 则系统 (1) 和 (2) 转为如下等价子系统:

$$x_1(t+1) = \Phi_1 x_1(t) + \Gamma_1 w(t); \quad (5)$$

$$y_i(t) = H_{1i} x_1(t) + v_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, l; \quad (6)$$

$$x_2(t) = -\Gamma_2 w(t). \quad (7)$$

其中: $x_1(t) \in R^{n_1}, x_2(t) \in R^{n_2}, v_i(t) = \bar{v}_i(t) - H_{2i}\Gamma_2 w(t)$. 由假设 2 知, $v_i(t)$ 是白噪声, 且方差阵 Q_{v_i} 为

$$Q_{v_i} = \bar{Q}_{v_i} + H_{2i}\Gamma_2 Q_w \Gamma_2^T H_{2i}^T - \bar{S}_i^T \Gamma_2^T H_{2i}^T - H_{2i}\Gamma_2 \bar{S}_i \quad (8)$$

$w(t)$ 和 $v_i(t)$ 的相关阵为 $S_i = \bar{S}_i - Q_w \Gamma_2^T H_{2i}^T$. 这里要注意的是, 不同子系统的观测噪声是相关的, 相关阵 $R_{ij} \triangleq E[v_i(t)v_j^T(t)] (i = j, i, j = 1, 2, \dots, l)$ 由下式计算:

$$R_{ij} = H_{2i}\Gamma_2 Q_w \Gamma_2^T H_{2j}^T - H_{2i}\Gamma_2 \bar{S}_j - \bar{S}_i^T \Gamma_2^T H_{2j}^T. \quad (9)$$

这样便将广义系统化成了等价的正常系统 根据 Kalman 滤波理论, 有如下引理:

引理 1^[8,9] 第 i 个子系统 (1), (2) 在假设 2 和假设 3 下有局部稳态 Kalman 滤波器

$$\hat{x}_i(t|t) = M \begin{bmatrix} \hat{x}_{1i}(t|t) \\ \hat{x}_{2i}(t|t) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中 $\hat{x}_{1i}(t|t)$ 由下列算式计算^[8]:

$$\hat{x}_{1i}(t+1|t+1) = \hat{x}_{1i}(t+1|t) + K_{fi}\epsilon(t+1), \quad (11)$$

$$\hat{x}_{1i}(t+1|t) = \bar{\Phi}_i \hat{x}_{1i}(t|t) + J_i y_i(t), \quad (12)$$

$$\epsilon(t) = y_i(t) - H_{1i} \hat{x}_{1i}(t|t-1), \quad (13)$$

$$K_{fi} = \bar{\Sigma}_i H_{1i}^T (H_{1i} \bar{\Sigma}_i H_{1i}^T + Q_{v_i})^{-1}. \quad (14)$$

而 $\bar{\Sigma}_i$ 是如下稳态 Riccati 方程的解:

$$\bar{\Sigma}_i = \bar{\Phi}_i [\bar{\Sigma}_i - \bar{\Sigma}_i H_{1i}^T (H_{1i} \bar{\Sigma}_i H_{1i}^T + Q_{v_i})^{-1} H_{1i} \bar{\Sigma}_i] \bar{\Phi}_i + \Gamma_i (Q_w - S_i Q_{v_i}^{-1} S_i^T) \Gamma_i^T. \quad (15)$$

$\hat{x}_{2i}(t|t)$ 由下列算式计算^[8]:

$$\hat{x}_{2i}(t|t) = -\Gamma_2 S_i Q_{v_i}^{-1} \epsilon(t). \quad (16)$$

其中: $\bar{\Phi}_i = \Phi_i - J_i H_{1i}, J_i = \Gamma_i S_i Q_{v_i}^{-1}, Q_{v_i} = H_{1i} \bar{\Sigma}_i H_{1i}^T + Q_{v_i}$

局部稳态 Kalman 滤波误差 $\tilde{x}_i(t|t) = x(t) - \hat{x}_i(t|t)$ 的方差阵^[9]

$$P_i \triangleq P_{ii} = E[\tilde{x}_i(t|t)\tilde{x}_i^T(t|t)] = M \begin{bmatrix} P_{1i} & P_{12i} \\ P_{12i}^T & P_{2i} \end{bmatrix} M^T.$$

其中

$$P_{1i} = (I_{n_1} - K_{fi} H_{1i}) \bar{\Sigma}_i, \quad (17)$$

$$P_{2i} = \Gamma_2 (Q_w - S_i Q_{v_i}^{-1} S_i^T) \Gamma_2^T, \quad (18)$$

$$P_{12i} = K_{fi} S_i^T \Gamma_2^T. \quad (19)$$

4 多传感器信息融合稳态 Kalman 滤波器

文献[10] 提出的信息融合准则需要计算子系统的 Kalman 滤波误差协方差阵 $P_{ij} \triangleq E[\tilde{x}_i(t|t)\tilde{x}_j^T(t|t)], i = j$, 由如下引理给出:

引理 2 局部稳态 Kalman 滤波误差协方差阵

$$P_{ij} = M \begin{bmatrix} P_{ij}^{11} & P_{ij}^{12} \\ (P_{ij}^{12})^T & P_{ij}^{22} \end{bmatrix} M^T, \quad i = j, i, j = 1, 2, \dots, l$$

其中

$$P_{ij}^{11} = \Psi_{fi} P_{ij}^{11} \Psi_{fj}^T + (I_{n_1} - K_{fi} H_{1i}) R_{ww} (I_{n_1} - K_{fj} H_{1j})^T + \Psi_{fi} R_{xw} (I_{n_1} - K_{fj} H_{1j})^T + (I_{n_1} - K_{fi} H_{1i}) R_{wx} \Psi_{fj}^T + K_{fi} R_{ij} K_{fj}^T, \quad (20)$$

$$P_{ij}^{22} = \Gamma_2 [Q_w - S_i Q_{v_i}^{-1} S_i^T - S_j Q_{v_j}^{-1} S_j^T + S_i Q_{v_i}^{-1} (H_{1i} R_{ij} H_{1j}^T + R_{ij}) Q_{v_j}^{-1} S_j^T] \Gamma_2^T, \quad (21)$$

$$P_{ij}^{12} = [K_{fi} S_i^T + (I_{n_1} - K_{fi} H_{1i}) R_{wx} \bar{\Phi}_i H_{1i}^T Q_{v_i}^{-1} S_j^T + \Psi_{fi} P_{ij}^{11} \bar{\Phi}_i H_{1i}^T Q_{v_i}^{-1} S_j^T + \Psi_{fj} R_{xw} H_{1j}^T Q_{v_j}^{-1} S_j^T + (I_{n_1} - K_{fi} H_{1i}) R_{ww} H_{1j}^T Q_{v_j}^{-1} S_j^T + K_{fi} R_{ij} Q_{v_j}^{-1} S_j^T] \Gamma_2^T. \quad (22)$$

其中

$$R_{ij}^{11} = H_{1i} \bar{\Phi}_i P_{ij}^{11} \bar{\Phi}_i H_{1i}^T + H_{1i} R_{ww} H_{1i}^T + R_{ij} + H_{1i} \bar{\Phi}_i R_{xw} H_{1j}^T + H_{1i} R_{wx} \bar{\Phi}_j H_{1j}^T, \quad R_{ww} =$$



$$\begin{aligned} \Gamma_1 Q_w \Gamma_1^T - J S_i^T \Gamma_1^T - \Gamma_1 S_j J_j^T + J R_{ij} J_j^T, \\ R_{xw} = - K_f S_i^T \Gamma_1^T + K_f R_{ij} J_j^T, \\ R_{wx} = - \Gamma_1 S_j K_{fj}^T = J R_{ij} K_{fj}^T, \\ \Psi_{f_i} = (I_{n_1} - K_f H_i) \bar{\Phi}_1, \end{aligned}$$

证明 由式(11) ~ (13) 得滤波误差

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{1i}(t+1|t+1) = \\ x_1(t+1) - \hat{x}_{1i}(t+1|t+1) = \\ \Psi_{f_i} \tilde{x}_{1i}(t|t) + (I_{n_1} - K_f H_i) \bar{w}_i(t) - \\ K_f v_i(t+1), \end{aligned} \tag{23}$$

预报误差

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{1i}(t+1|t) = x_1(t+1) - \hat{x}_{1i}(t+1|t) = \\ \bar{\Phi}_1 \tilde{x}_{1i}(t|t) + \bar{w}_i(t), \end{aligned} \tag{24}$$

其中 $\bar{w}_i(t) = \Gamma_1 w(t) - J v_i(t)$.

由式(13) 和(16) 得滤波误差

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{2i}(t+1|t+1) = \\ x_2(t+1) - \hat{x}_{2i}(t+1|t+1) = \\ - \Gamma_2 w(t+1) + \Gamma_2 S Q_{\bar{e}}^{-1} [H_1 \tilde{x}_{1i}(t+ \\ 1|t) + v_i(t+1)] \end{aligned} \tag{25}$$

将式(23) 和(25) 带入子系统误差协方差阵定义 $P_{ij} \triangleq E[\tilde{x}_i(t|t) \tilde{x}_j^T(t|t)]$ 中, 即可得到式(20) ~ (22).

应用文献[10] 提出的矩阵加权融合准则, 直接可得如下定理:

定理 1 用式(1) 和(2) 给出的多传感器系统, 按矩阵加权最优线性最小方差融合 Kalman 滤波器

$$\hat{x}_0(t|t) = \sum_{i=1}^l A_i \hat{x}_i(t|t), \tag{26}$$

最优加权阵 A_i 由下式决定:

$$[A_1 A_2 \dots A_l] \triangleq (e^T P^{-1} e)^{-1} e^T P^{-1} \tag{27}$$

其中 $e = R^{n_1 \times n_1}$ 和 $P = R^{n_1 \times n_1}$ 定义为

$$e = \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ \vdots \\ I_{n_l} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{l1} & \dots & P_{ll} \end{bmatrix}, \tag{28}$$

而 P_{ij} 由引理 2 计算 最优融合误差方差阵为

$$P_0 = (e^T P^{-1} e)^{-1}, \tag{29}$$

且有

$$\text{tr} P_0 \leq \text{tr} P_i, i = 1, 2, \dots, l \tag{30}$$

5 仿真例子

考虑 3 传感器 ($l = 3$) 信息融合广义系统

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} w(t),$$

$$y_i(t) = [0 \ 9 \ 1 \ | \ 0 \ 5] x(t) + \bar{v}_i(t), \quad i = 1, 2, 3$$

其中: $w(t)$ 和 $\bar{v}_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) 相互独立, $\bar{v}_i(t)$ 和 $\bar{v}_j(t)$ 也相互独立, 方差分别为 $Q_w = 0.36, \bar{Q}_{v1} = 1, \bar{Q}_{v2} = 5, \bar{Q}_{v3} = 10$

因 $\text{rank } F = \text{deg det}(zF - \Phi) = 2$, 故系统无脉冲 这里 $M = I_3, N = I_3$, 故等价系统可表示为

$$\begin{aligned} x_1(t+1) = \\ \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0.8 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} w(t), \\ x_2(t) = -w(t), \\ y_i(t) = [0 \ 9 \ 1] x_1(t) + v_i(t), \end{aligned}$$

其中 $v_i(t) = \bar{v}_i(t) - 0.5w(t)$. 融合后的最优 Kalman 滤波器 $\hat{x}_0(t|t)$ 为

$$\begin{aligned} \hat{x}_0(t|t) = \\ \begin{bmatrix} 0.3863 & 0.2511 & -0.1144 \\ 0.0496 & 0.8447 & -0.0876 \\ 0.0351 & -0.0423 & 0.9631 \end{bmatrix} \hat{x}_1(t|t) + \\ \begin{bmatrix} 0.3280 & -0.1260 & 0.2393 \\ 0.0065 & 0.0813 & 0.4471 \\ -0.0310 & 0.0335 & 0.1324 \end{bmatrix} \hat{x}_2(t|t) + \\ \begin{bmatrix} 0.2857 & -0.1251 & -0.1249 \\ -0.0561 & 0.0740 & -0.3595 \\ -0.0041 & 0.0089 & -0.0955 \end{bmatrix} \hat{x}_3(t|t). \end{aligned}$$

迭代 50 步, 100 步和 200 步的稳态滤波误差方差阵的迹如表 1 所示

表 1 稳态滤波误差方差阵迹的比较

指 标	次 数		
	50	100	200
tr P_0	0.528 442 76	0.528 442 71	0.528 442 71
tr P_1	0.536 903 46	0.536 903 45	0.536 903 45
tr P_2	0.804 068 44	0.804 068 28	0.804 068 28
tr P_3	0.976 067 50	0.976 070 88	0.976 070 88

由表 1 可以看出, 融合后的滤波误差方差阵的迹 $\text{tr } P_0$ 小于每个子系统的滤波误差方差阵的迹 $\text{tr } P_i, i = 1, 2, 3$ 也就是融合后的滤波误差的平方和小于每个子系统的滤波误差的平方和, 从而提高了状态的估计精度 这与理论推导的结论式(30) 是一致的 同时将 50 步与 100 步的迭代结果相比较, 可以看出系统很快趋于稳态 稳态滤波器在实际工程中的应用可大大减少计算负担

6 结 论

本文在广义系统无脉冲的假设下, 通过受限等价形式变换, 将广义系统转变成等价的正常系统 利用 Kalman 滤波理论和白噪声估计理论推得正常系

统的滤波器和相应的误差协方差阵,在线性最小方差信息融合准则下得到了广义系统的多传感器信息融合稳态 Kalman 滤波器。从仿真结果可以看出,融合后的误差方差阵的迹明显减少,提高了估计精度。

参考文献(References)

- [1] Carlson N A. Federated Square Root Filter for Decentralized Parallel Processes[J]. *IEEE Trans on AES*, 1990, 26(3): 517-525
- [2] Sun S L, Deng Z L. Multi-sensor Optimal Information Fusion Kalman Filter[J]. *Automatica*, 2004, 40(1): 1017-1023
- [3] 顾冬晴,王岩,周文君,等.多传感器卫星姿态确定的联邦滤波器设计[J].*中国空间科学技术*, 2004, 24(3): 7-13
(Gu D Q, Wang Y, Zhou W J, et al. Federated Filter Design for Multi-sensors Satellite Attitude Determination[J]. *Chinese Space Science and Technology*, 2004, 24(3): 7-13)
- [4] 何友,王国宏,陆大金,等.多传感器信息融合及其应用[M].北京:电子工业出版社,2000
(He Y, Wang G H, Lu D J, et al. *Multi-sensor Information Fusion and Its Application* [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2000)
- [5] Zhang H S, Xie L H, Soh Yeng Chai. Optimal and Self-tuning State Estimation for Singular Stochastic Systems: A Polynomial Equation Approach[A]. *Proc of the 39th IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Sydney, 2000: 3807-3812
- [6] 石莹,沈永良,孙书利,等.广义离散随机线性系统降阶 Wiener 滤波、平滑和预报器[J].*控制理论与应用*, 2004, 21(6): 981-985
(Shi Y, Shen Y L, Sun S L, et al. Reduced-order Wiener Filtering, Smoothing and Prediction for Descriptor Discrete-time Stochastic Linear Systems[J]. *Control Theory and Applications*, 2004, 21(6): 981-985)
- [7] 杨冬梅,张庆灵,姚波,等.广义系统[M].北京:科学出版社,2004
(Yang D M, Zhang Q L, Yao B, et al. *Singular System* [M]. Beijing: Science Press, 2004)
- [8] 邓自立. Kalman 滤波与 Wiener 滤波——现代时间序列分析方法[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2001.
(Deng Z L. *Kalman Filtering and Wiener Filtering—Modern Time Series Analysis Approach* [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2001)
- [9] 秦朝英,戴冠中.广义离散随机线性系统的最优滤波[J].*控制与决策*, 1993, 8(1): 65-68
(Qin C Y, Dai G Z. Optimum Filtering for Singular Discrete Stochastic Linear Systems[J]. *Control and Decision*, 1993, 8(1): 65-68)
- [10] 孙书利,邓自立.多传感器线性最小方差最优信息融合估计准则[J].*科学技术与工程*, 2004, 4(5): 336-340
(Sun S L, Deng Z L. Multi-sensor Optimal Information Fusion Criterion in Linear Minimum Variance Sense[J]. *Science Technology and Engineering*, 2004, 4(5): 336-340)
- [7] Paragios N, Deriche R. Geodesic Active Contours and Level Sets for the Detection and Tracking of Moving Objects[J]. *IEEE Trans on PAMI*, 2000, 22(3): 266-280
- [8] Bertalmio M, Sapiro G, Randall G. Morphing Active Contours[J]. *IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, 22(7): 733-737.
- [9] Chan T F, Vese L. Active Contour Without Edges[J]. *IEEE Trans Image Processing*, 2001, 10(2): 266-277.
- [10] 张泽旭,李金宗,李宁宁.基于光流场分割和 Canny 边缘提取融合算法的运动目标检测[J].*电子学报*, 2003, 31(9): 1299-1302
(Zhang Z X, Li J Z, Li N N. Detection of Moving Object Using a Fusion Method Based on Segmentation of Optical Flow Field and Edge Extracted by Canny's Operator [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2003, 31(9): 1299-1302
- [11] Shafarenko L, Petrou M, Kittler J. Automatic Watershed Segmentation of Randomly Textured Color Images[J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 1997, 6(11): 1530-1544
- [12] Roerdink J B T M, Meijster A. The Watershed Transform: Definitions, Algorithms and Parallelization Strategies [J]. *Fundamenta Informatica*, 2000, 41(1-2): 187-228
- [13] Wloka M M, Zeleznik R C. Interactive Real-time Motion Blur [J]. *The Visual Computer*, 1996, 12(6): 283-295
- [14] Williams D J, Shah M. A Fast Algorithm for Active Contours and Curvature Estimation [J]. *CVGIP: Image Understanding*, 1992, 55(1): 14-26

(上接第 335 页)