第21卷 第5期 控 制 与 决 策 2006年5月
Vol 21 No. 5 Control and Decision May 2006

文章编号: 1001-0920(2006)05-0532-04

多变量系统变结构控制的一个滑模到达条件

李文林
(河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007)

摘 要: 为了削弱变结构控制系统的抖振, 提出一个新的滑动模态到达条件. 分析了该到达条件参数对系统动态性能的影响, 讨论了参数的物理实现, 并给出了到达时间的简化计算公式. 仿真结果表明, 该到达条件能有效地抑制抖振.

关键词: 多变量系统; 变结构控制; 到达条件; 滑动模态
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Reaching Condition of Variable Structure Control for Multivariable Systems

LI Wen-lin
(College of Mathematics and Information Science, He'nan Normal University, Xinxiang 453007, China. E-mail: hsdlwl@tom.com)

Abstract: In order to reduce the chatter phenomenon of variable structure control systems, a novel reaching condition is proposed. The influence of parameters of the condition on dynamic performance of systems is analyzed. The physical realization of parameters is given. A formula of reaching time is given too. Simulation result shows that the reaching condition can restrain chatter effectively.

Key words: Multivariable system; Variable structure control; Reaching condition; Sliding mode

1 引 言

一般而言, 由于通常的到达条件 $s^{\mathrm{T}}\mathring{s} < 0$ 反映不出系统运动的品质, 比如快速性、抖振大小等. 为了改善变结构控制系统的控制品质, 人们提出了指数趋近律、幂次趋近律等许多新的到达条件或趋近率[1~5]. 文献[3～5]给出了幂次趋近律和递归结构的最终滑动模态, 对削弱抖振和提高快速性有很好的作用. 但由于这些到达条件仅适用于单输入系统, 因而限制了它们的应用.

本文将给出一个新的到达条件, 它可以应用于一般的多输入系统的变结构控制设计, 既能保证滑动模态的快速到达, 又能使穿越切换流形的速度为零, 有效地削弱抖振. 另外还给出了到达时间的简化计算公式, 并分析了参数对快速性和物理实现的影响, 为该到达条件的有效性和可行性提供了理论依据.

2 问题的陈述

通常使用较多的滑动模态到达条件[5]为

$$\mathring{s} = -ks - \epsilon \operatorname{sgn} s,\ s \in R^m. \tag{1}$$

式(1)右端的 $\epsilon \operatorname{sgn} s$ 使得切换流形为等速穿越, 这势必会形成抖振. 要减小抖振, 就需要减小 ϵ, 但减小 ϵ, 就意味着到达切换流形的时间增大. $\epsilon \to 0$ 必然使到达时间 $T \to \infty$. 为克服这个缺点, 文献[1,4](对单输入系统)提出了如下形式的到达条件:

$$\mathring{s} = -\alpha s - \beta s^{q/p},\ s \in R, \tag{2}$$

其中: $\alpha > 0, \beta > 0$; $p > q > 0$ 为奇数. 并就下面一种特殊的单输入系统:

$$\mathring{x}_i = x_{i+1},\ i = 1, 2, \cdots, n-1,$$
$$\mathring{x}_n = f(x) + g(x)u,$$

设计了一组递归结构的滑动流形

$$s_0 = x_1,$$
$$s_1 = \mathring{s} + \alpha_0 s_0 + \beta_0 s_0^{q/p},$$

收稿日期: 2005-04-07; **修回日期**: 2005-06-27.
作者简介: 李文林(1949—), 男, 河南舞阳人, 教授, 副博士生导师, 从事变结构控制、自适应控制和模糊控制等研究.

$$s_2 = \dot{s}_1 + \alpha_1 s_1 + \beta_1 s_1^{q/p},$$
$$\vdots$$
$$s_{n-1} = \dot{s}_{n-2} + \alpha_{n-2} s_{n-2} + \beta_{n-2} s_{n-2}^{q/p},$$
$$\dot{s}_{n-1} = -\alpha_{n-1} s_{n-1} - \beta_{n-1} s_{n-1}^{q/p}.$$

使状态变量依次进入滑动流形 $s_{n-1} = 0, s_{n-2} = 0, \cdots, s_0 = 0$, 在有限时间到达原点. 该到达条件有下面一个特点:

$$\lim_{s\to 0} \dot{s}_i = \lim_{s\to 0} (\alpha s_i - \beta_i^{q/p}) = 0,$$
$$i = 0, \cdots, n-1.$$

即穿越切换面的速度为零, 从而可有效抑制抖振. 但该到达条件只适用于单输入系统.

3　多变量系统的到达条件

本文给出一个新的到达条件, 以克服文献[1, 4]到达条件的局限性:

$$\dot{s} = -(\alpha + \beta \| s \|^{\epsilon-1}) s,$$
$$0 < \epsilon < 1, \alpha > 0, \beta > 0. \tag{3}$$

由于这里的幂次项是用范数 $\| * \|_2$ 来描述的, 因此它适用于多输入系统.

定理 1　对于变结构控制系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$
$$s = s(x), x \in R^n, u \in R^m,$$

取到达条件(3), 则系统状态 $x(t)$ 经有限时间 $t \leq T$ 到达滑动流形 $\{x \mid s = 0\}$, 到达时间为

$$T = \frac{1}{\alpha(1-\epsilon)} \ln \frac{\alpha \| s(0) \|^{1-\epsilon} + \beta}{\beta}. \tag{4}$$

证明　式(3)两边左乘 s^{T}, 得

$$s^{\mathrm{T}} \dot{s} = -(\alpha + \beta \| s \|^{\epsilon-1}) \| s \|^2. \tag{5}$$

因为

$$s^{\mathrm{T}} \dot{s} = \frac{1}{2} \frac{d(s^{\mathrm{T}} s)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d} \| s \|^2}{\mathrm{d}t} = \| s \| \frac{\mathrm{d} \| s \|}{\mathrm{d}t}. \tag{6}$$

由式(5)和(6)得

$$\frac{\mathrm{d} \| s \|}{\mathrm{d}t} = -\alpha \| s \| - \beta \| s \|^{\epsilon},$$

$$\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d} \| s \|}{\alpha \| s \| + \beta \| s \|^{\epsilon}} =$$
$$-\frac{\| s \|^{-\epsilon} \mathrm{d} \| s \|}{\alpha \| s \|^{1-\epsilon} + \beta} =$$
$$-\frac{1}{1-\epsilon} \frac{\mathrm{d} \| s \|^{1-\epsilon}}{\alpha \| s \|^{1-\epsilon} + \beta},$$
$$\int_0^T \mathrm{d}t = -\frac{1}{1-\epsilon} \int_{\| s(0) \|}^{\| s(T) \|} \frac{\mathrm{d} \| s \|^{1-\epsilon}}{\alpha \| s \|^{1-\epsilon} + \beta}$$

两边积分, 令 $s(T) = 0$, 则得 s 到达零的时间为式(4). 于是定理 1 得证. □

显然, 由定理 1 得到的到达时间式(4)计算麻烦, 而且也不易看清参数 α, β, ϵ 对到达时间 T 的影响. 为得到一个简单直观的近似计算公式, 有下面结论:

定理 2　按式(3)取到达条件, 则状态 $x(t)$ 到达滑动模态的时间 T 满足如下不等式:

$$\frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{\beta(1-\epsilon)} \left(1 - \frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{2\beta/\alpha + \| s(0) \|^{1-\epsilon}}\right) < T <$$
$$\frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{\beta(1-\epsilon)} \left(1 - \frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{2\beta/\alpha + 4 \| s(0) \|^{1-\epsilon}/3}\right), \tag{7}$$

且若 $\| s(0) \| \ll \beta/\alpha$, 则 $T \approx \frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{\beta(1-\epsilon)}$; 若 $0 < \beta/\alpha \ll \| s(0) \|$, 则 $T < \frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{4\beta(1-\epsilon)}$.

证明　先证明一个不等式

$$x\left(1 - \frac{x}{2+x}\right) < \ln(1+x) <$$
$$x\left(1 - \frac{x}{2+4x/3}\right), x > 0. \tag{8}$$

记　$f(x) = x - \frac{x^2}{2(1+\epsilon x)} - \ln(1+x)$,

对 $f(x)$ 求导

$$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x =$$
$$1 - \frac{2x(1+\epsilon x) - \epsilon x^2}{2(1+\epsilon x)^2} - \frac{1}{1+x} =$$
$$\frac{x}{1+x} - \frac{2x(1+\epsilon x) - \epsilon x^2}{2(1+\epsilon x)^2} =$$
$$\frac{(3\epsilon-2)x^2 + (2\epsilon-1)\epsilon x^3}{2(1+\epsilon x)^2(1+x)}. \tag{9}$$

由式(9), 取 $\epsilon = 2/3$, 则 $\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x > 0$, $f(x)$ 严格递增, 从而 $f(x) > f(0) = 0$, 即

$$\ln(1+x) < x\left(1 - \frac{x}{2+4x/3}\right).$$

取 $\epsilon = 1/2$, 则 $\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x < 0$, $f(x)$ 严格递减, 从而 $f(x) < f(0) = 0$, 即

$$x\left(1 - \frac{x}{2+x}\right) < \ln(1+x). \tag{10}$$

因此不等式(8)成立.

将 $\alpha \| s(0) \|^{1-\epsilon}/\beta$ 视作 x, 利用式(4)和不等式(8), 并化简得

$$\frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{\beta(1-\epsilon)} \left(1 - \frac{\alpha \| s(0) \|^{1-\epsilon}}{2\beta + \alpha \| s(0) \|^{1-\epsilon}}\right) <$$
$$\frac{1}{\alpha(1-\epsilon)} \ln \frac{\alpha \| s(0) \|^{1-\epsilon} + \beta}{\beta} = T \tag{11}$$

$$T < \frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{\beta(1-\epsilon)} \Bigg(1 -$$
$$\frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{2\beta/\alpha + 4 \| s(0) \|^{1-\epsilon}/3}\Bigg). \tag{12}$$

将式(11), (12)写在一起, 即得定理 2 的结果. □

特别当 $\| s(0) \| \ll \beta/\alpha$ 时,

$$\frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{2\beta/\alpha + \| s(0) \|^{1-\epsilon}} \approx 0,$$
$$\frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{2\beta/\alpha + 4 \| s(0) \|^{1-\epsilon}/3} \approx 0.$$

由式(7) 得

$$T = \frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{\beta(1-\epsilon)}.$$

当 $0 < \beta/\alpha \ll \| s(0) \|$ 时,

$$\frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{2\beta/\alpha + 4\| s(0) \|^{1-\epsilon}/3} \approx \frac{3}{4}.$$

代入式(7) 得

$$T < \frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{4\beta(1-\epsilon)}.$$

推论 1 取到达条件为

$$\dot{s} = -\beta \| s \|^{\epsilon-1} s,\ 0 < \epsilon < 1,\ 0 < \beta, \tag{13}$$

则状态 $x(t)$ 到达切换流形 $\{x \mid s = 0\}$ 的时间为

$$T = \frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{\beta(1-\epsilon)}. \tag{14}$$

1) $\| s(0) \| < e$ 时, ϵ 越小, 到达切换流形的时间越短, $T_{\min} = \| s(0) \| / \beta$;

2) $\| s(0) \| > e$ 时, 取 $\epsilon = 1 - \dfrac{1}{\ln \| s(0) \|}$, 则到达切换流形的所用时间最短, 即

$$T_{\min} = \frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{\beta(1-\epsilon)} = \frac{e \ln \| s(0) \|}{\beta}.$$

证明 将式(13) 两边左乘 s^{T}, 得

$$s^{\mathrm{T}} \dot{s} = -\beta \| s \|^{\epsilon+1}. \tag{15}$$

由式(6) 的推导

$$s^{\mathrm{T}} \dot{s} = -\| s \| \frac{\mathrm{d} \| s \|}{\mathrm{d} t},$$

从而得到

$$\frac{\mathrm{d} \| s \|}{\mathrm{d} t} = -\beta \| s \|^{\epsilon},\ \frac{\mathrm{d} \| s \|}{\beta \| s \|^{\epsilon}} = -\mathrm{d} t \tag{16}$$

对式(16) 两边积分解得

$$\frac{\| s(t) \|^{1-\epsilon} - \| s(0) \|^{1-\epsilon}}{\beta(1-\epsilon)} = -t$$

令 $s(T) = 0$, 解得到达时间为

$$T = \frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{\beta(1-\epsilon)}. \tag{17}$$

1) $\partial T / \partial \epsilon =$

$$\frac{-(1-\epsilon) \| s(0) \|^{1-\epsilon} \ln \| s(0) \|}{\beta(1-\epsilon)^2} + \frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{\beta(1-\epsilon)^2} = \frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon} [1 - (1-\epsilon) \ln \| s(0) \|]}{\beta(1-\epsilon)^2}. \tag{18}$$

由式(18), $\| s(0) \| < e$ 时

$$1 - (1-\epsilon) \ln \| s(0) \| > 0,$$

从而 $\partial T / \partial \epsilon > 0$, T 是 ϵ 的增函数, 由式(17) 可算出

$$\begin{cases} T \to \dfrac{\| s(0) \|}{\beta},\ \epsilon \to 0^{+} \text{ 时}; \\ T \to \infty,\ \epsilon \to 1^{-} \text{ 时}. \end{cases}$$

因此 $\| s(0) \| < e$ 时, ϵ 越小, 到达切换流形的时间越短, 且 $T_{\min} = \| s(0) \| / \beta$

2) 对于 $\| s(0) \| > e$ 的情况, 解 $\partial T / \partial \epsilon = 0$ 得

$$\epsilon = 1 - \frac{1}{\ln \| s(0) \|},\ \| s(0) \|^{1-\epsilon} = e, \tag{19}$$

且

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \epsilon} < 0,\ \epsilon < 1 - \dfrac{1}{\ln \| s(0) \|}; \\ \dfrac{\partial T}{\partial \epsilon} > 0,\ \epsilon > 1 - \dfrac{1}{\ln \| s(0) \|}. \end{cases} \tag{20}$$

所以 $\epsilon = 1 - \dfrac{1}{\ln \| s(0) \|}$ 时, T 最小. 将式(19) 代入(14), 得

$$T_{\min} = \frac{\| s(0) \|^{1-\epsilon}}{\beta(1-\epsilon)} = \frac{e \ln \| s(0) \|}{\beta}.$$

这与定理 2 中 $\| s(0) \| \ll \beta/\alpha$ 情况的结果是一致的 □

4 对到达条件参数的讨论

上节分析了到达条件的参数 α, β, ϵ 与到达时间 T 的关系. 作为一个合理的到达条件, 还应从物理实现的角度对参数的选取作以分析. 前面已由到达条件 $\dot{s} = -(\alpha + \beta \| s \|^{\epsilon-1}) s$ 得到了等式

$$\frac{\mathrm{d} \| s \|}{\mathrm{d} t} = -\alpha \| s \| - \beta \| s \|^{\epsilon}, \tag{21}$$

再求二阶导数得

$$\frac{\mathrm{d}^2 \| s \|}{\mathrm{d} t^2} = -\alpha \frac{\mathrm{d} \| s \|}{\mathrm{d} t} - \beta \epsilon \| s \|^{\epsilon-1} \frac{\mathrm{d} \| s \|}{\mathrm{d} t}. \tag{22}$$

将式(21) 代入(22) 得

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}^2 \| s \| / \mathrm{d} t^2 = \\ & (\alpha + \beta \epsilon \| s \|^{\epsilon-1})(\alpha \| s \| + \beta \| s \|^{\epsilon}) = \\ & \alpha^2 \| s \| + \alpha\beta(\epsilon + 1) \| s \|^{\epsilon} + \beta^2 \epsilon \| s \|^{2\epsilon-1}. \end{aligned} \tag{23}$$

由式(23) 最后一项可看出: 若 $\epsilon < 1/2$, 当 $\| s \| \to 0$ 时, 加速度 $\mathrm{d}^2 \| s \| / \mathrm{d} t^2 \to \infty$. 而加速度无穷大, 就意味着控制力应为无穷大, 这在实际中是难以实现的, 因此一般应取 $\epsilon \geq 1/2$, 或分段选取: $\| s \| < \delta$ 时, 取 $\epsilon \geq 1/2$; $\| s \| \geq \delta$ 时, 任取 $0 < \alpha < 1$. 当然, 限制 $\epsilon \geq 1/2$ 会影响到达速度, 不过这可通过适当加大 α, β 得到补偿

5 仿真例子

考虑两输入系统的变结构控制

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u,$$

$$s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

图 1～ 4 是分别取常规到达条件(1) 和本文到达条件(3) 得到的仿真结果比较(为不使线条过多, 这里仅给出状态 x_1, x_2 和 s 的运动图像). 从仿真结果可以看出, 在通常到达条件(1) 下, 图1和图3有

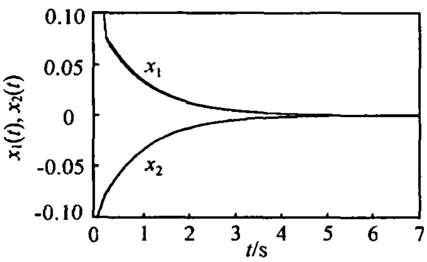

图 1　常规到达条件下 x_1, x_2 的运动

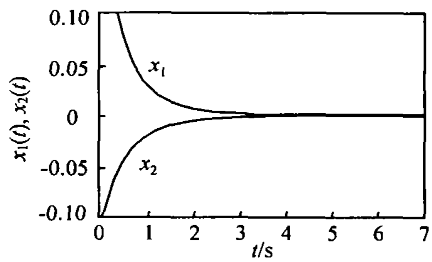

图 2　本文到达条件下 x_1, x_2 的运动

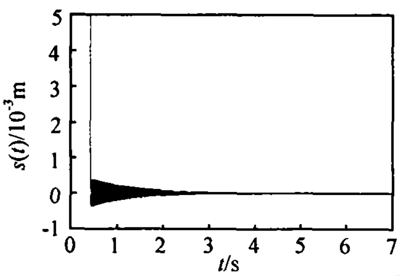

图 3　常规到达条件下 $s(t)$ 的运动轨线

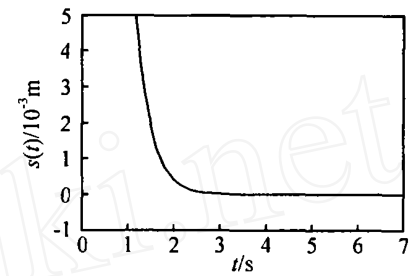

图 4　本文到达条件下 $s(t)$ 的运动轨线

明显的抖振; 而本文到达条件(3) 下, 图 2 和图 4 基本看不到抖振, 可见本文到达条件确实起到了抑制抖振的作用.

6　结　　论

本文对多输入系统变结构控制提出了一个新的到达条件, 该条件的特点是, 既保留了常规到达条件的优点, 又能使穿越切换流形的速度为零, 从而能有效地抑制抖振, 改善控制系统的动态品质. 另外给出了到达时间的计算公式, 分析了参数对快速性的影响, 并讨论了参数的物理实现, 为到达条件的有效性和可行性提供了理论依据.

参考文献(References)

[1] Yu T. Terminal Sliding Mode Control for Rigid Robots [J]. *Automatica*, 1998, 34(1): 51-56.

[2] Yu S, Yu X, Man Z. Robust Rlobal Sliding Mode Control of SISO Nonlinear Uncertain Systems [A]. *Proc of 39th IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Sydney, 2000: 2198-2203.

[3] Yu X, Man Z. Fast Terminal Sliding Mode Control Design for Nonlinear Dynamical Systems [J]. *IEEE Trans on Circuits Systems* Ⅰ, 2002, 49(2): 261-264.

[4] 康宇, 奚宏生, 季海波. 有限时间快速收敛滑模变结构控制[J]. *控制理论与应用*, 2004, 21(4): 623-626.
(Kang Y, Xi H S, Ji H B. Fast Terminal Sliding Mode Control of Nonlinear Systems [J]. *Control Theory and Applications*, 2004, 21(4): 623-626.)

[5] 高为炳. *变结构控制的理论及设计方法*[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
(Gao W B. *Theory and Design of Variable Structure Control*[M]. Beijing: Science Press, 1998.)

(上接第 531 页)

[5] Cao J, Wang J. Global Asymptotic Stability of a General Class of Recurrent Neural Networks with Time-varying Delays [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems* — Ⅰ, 2003, 50(1): 34-44.

[6] Chen A, Cao J, Huang L. Global Robust Stability of Interval Cellular Neural Networks with Time-varying Delays [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 23(3): 787-799.

[7] Zhang Q, Wei X, Xu J. Global Exponential Stability of Hopfield Neural Networks with Continuously Distributed Delays [J]. *Physics Letters A*, 2003, 315 (3): 431-436.

[8] Madruga S, Boccaletti S, Matias M. Effects of a Variable Delay in Delayed Dynamical Systems [J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 2001, 11(11): 2875-2880.

[9] Bellen A, Guglielmi N, Ruehli A. Methods for Linear Systems of Circuit Delay Differential Equations of Neutral Type [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems* — Ⅰ, 1999, 46(1): 212-216.

[10] Xu B, Lam J. Decentralized Stability of Large Scale Interconnected Time Delay Systems [J]. *J of Optimization Theory and Application*, 1999, 103(1): 231-240.