第21卷 第5期　　　　控　制　与　决　策　　　　2006年5月
Vol 21 No. 5　　　　Control and Decision　　　　May 2006

文章编号: 1001-0920(2006)05-0536-05

时滞相关型离散时变时滞奇异系统的鲁棒镇定

马树萍, 程兆林
(山东大学 数学与系统科学学院, 济南 250100)

摘　要: 讨论含参数不确定的离散时变时滞奇异系统的时滞相关的鲁棒状态反馈稳定化问题. 在一系列等价变换下, 阐述了其和一个不确定正常线性离散时变时滞系统的鲁棒状态反馈稳定化问题的等价关系; 利用矩阵不等式方法, 给出一个对所有容许的不确定, 使得闭环系统正则、因果且稳定的时滞相关鲁棒状态反馈稳定化控制器存在的充分条件以及无记忆状态反馈控制器的一个解.

关键词: 离散奇异系统; 时变时滞; 时滞相关; 不确定性; 鲁棒稳定化
中图分类号: TP13　　　　**文献标识码**: A

Delay-dependent Robust Stabilization for Discrete-time Singular Systems with Time-varying Delays

MA Shu-ping, *CHEN G Zhao-lin*
(School of Mathematics and System Science, Shandong University, Ji'nan 250100, China. Correspondent: MA Shu-ping, E-mail: mashup@sdu.edu.cn)

Abstract: The robust stabilization via state feedback for time-varying delays discrete-time singular systems with parameter uncertainties is discussed. Under a series of equivalent transformation, the equivalence between this problem and the robust stabilization via state feedback for uncertain standard state-space discrete-time linear systems with time-varying delays is obtained. In terms of matrix inequality, the delay-dependent sufficient condition is presented so that there exists a robust state feedback stabilizing controller making the closed-loop system is regular, causal and stable for all admissible uncertainties. The memoryless state feedback controller is given.

Key words: Discrete singular system; Time-varying delay; Delay-dependent; Uncertainties; Robust stabilization

1　引　　言

近年来, 时滞不确定系统的鲁棒控制问题得到了广泛研究[1~6], 处理方法最初多为时滞无关的[1,5,6], 因为时滞无关方法的保守性较大, 所以时滞相关方法的讨论越来越受到重视[2~4]. 奇异系统是比正常状态系统更为一般的系统, 时滞奇异系统的鲁棒控制问题目前也有不少的讨论[5,6], 特别是连续时滞奇异系统情形. 对于离散时滞奇异系统的鲁棒控制问题, 在时滞为常数且已知的情况下, 可以通过系统扩维的方法将其转化为无时滞离散奇异系统的鲁棒控制问题. 在时滞是未知常数或为时变的情况下, 讨论比较困难, 故目前对于时滞相关的离散时滞奇异系统的鲁棒控制问题的讨论很少.

本文考虑时滞相关的不确定离散时变时滞奇异系统的鲁棒状态反馈稳定化问题. 在一系列等价变换下, 阐述了其和一个不确定正常线性离散时变时滞系统的鲁棒状态反馈稳定化问题的等价关系; 利用矩阵不等式方法, 给出了时滞相关的鲁棒状态反馈稳定化控制器存在的充分条件以及控制器的解.

2　问题描述及预备知识

考虑不确定离散时变时滞奇异系统

$Ex(k+1) =$

收稿日期: 2005-04-01; **修回日期**: 2005-07-04
基金项目: 国家自然科学基金项目(10371067); 山东大学青年基金项目(11140053187004).
作者简介: 马树萍(1970—), 女, 山东莒县人, 副教授, 博士, 从事多变量控制理论及应用的研究; 程兆林(1939—), 男, 浙江宁波人, 教授, 博士生导师, 从事多变量控制等研究.

$$(A+\Delta A)x(k)+(A_d+\Delta A_d)x(k-d(k))+(B_d+\Delta B_d)u(k-d(k))+(B+\Delta B)u(k),$$
$$x(s)=\varphi(s),s=0,-1,\cdots,-d_2, \tag{1}$$

其中: $x(k)\in R^n$ 为状态, $u(k)\in R^p$ 为控制; $d(k)$ 为正整数是时变时滞, 且 $0<d_1\le d(k)\le d_2$, d_1,d_2 是已知的正整数; $\varphi(s)$ 是给定的相容性初始条件; 矩阵 $E\in R^{n\times n}$ 奇异, 且 $\mathrm{rank}E=r<n$; A,A_d,B,B_d 为已知适当维数常矩阵; $\Delta A,\Delta A_d,\Delta B,\Delta B_d$ 为相应维数的不确定参数矩阵, 且具有如下形式:

$$[\Delta A\quad \Delta A_d\quad \Delta B\quad \Delta B_d]=E_1\Delta(k)[F_1\quad F_2\quad F_3\quad F_4], \tag{2}$$

$\Delta(k)\in R^{m\times q}$ 是满足 $\Delta^{\mathrm T}(k)\Delta(k)\le I$ 的未知时变矩阵; E_1,F_1,F_2,F_3,F_4 为已知的适当维数常矩阵.

定义 1　称系统 $Ex(k+1)=(A+\Delta A)x(k)+(A_d+\Delta A_d)x(k-d(k))$ 是鲁棒稳定的, 若其对满足 $\Delta^{\mathrm T}(k)\Delta(k)\le I$ 的所有不确定, $(E,A+\Delta A)$ 是正则的、因果的且系统渐近稳定.

本文的目的是设计一个无记忆状态反馈控制器 $u(k)=Kx(k)$, 使得对满足 $\Delta^{\mathrm T}(k)\Delta(k)\le I$ 的所有不确定, 系统 (1) 的闭环是鲁棒稳定的, 即对系统 (1) 设计一个鲁棒状态反馈稳定化控制器.

假设 1

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0 & E & 0\\ E & A & B\end{bmatrix}=n+r. \tag{3}$$

注 1　若 $\Delta(k)=0$ 时无时滞奇异系统 (E,A) 是正则的, 则假设 1 即是系统 (E,A,B) Y-能控的定义[7], 它是系统 (1) 鲁棒稳定化问题有解的必要条件.

引理 1　令 $\tau_1\ge 0,\tau_2>0$ 为给定的整数. 若存在正定矩阵 $X>0,U>0,H>0,Z>0$, 及矩阵 V 满足

$$\begin{bmatrix}-X+rU+\tau_2H+V+V^{\mathrm T} & -V & A^{\mathrm T}X & \bar\tau(A-I)^{\mathrm T}Z\\ -V^{\mathrm T} & -U & A_d^{\mathrm T}X & \bar\tau A_d^{\mathrm T}Z\\ XA & XA_d & -X & 0\\ \bar\tau Z(A-I) & \bar\tau ZA_d & 0 & -\bar\tau Z\end{bmatrix}<0,$$
$$\begin{bmatrix}H & V\\ V^{\mathrm T} & Z\end{bmatrix}\ge 0,$$

其中

$$r=\tau_2-\tau_1+1,$$
$$\bar\tau=\frac{1}{2}(\tau_2-\tau_1)(\tau_2+\tau_1-1)+\tau_2,$$

则离散时变时滞系统

$$x(k+1)=Ax(k)+A_dx(k-\tau(k)),\quad \tau_1\le\tau(k)\le\tau_2$$

是渐近稳定的.

注 2　若 $\tau(k)=\tau$ 为常时滞, 此时 $\tau_1=\tau_2=\tau$, 则 $r=1,\bar\tau=\tau$. 于是引理 1 中 LMI 为离散时滞系统 $x(k+1)=Ax(k)+A_dx(k-\tau)$ 渐近稳定的时滞相关条件[3].

引理 2[8]　给定适当维数的矩阵 Y,L 和 R, $Y=Y^{\mathrm T}$, 则 $Y+L\tilde\Delta R+R^{\mathrm T}\tilde\Delta^{\mathrm T}L^{\mathrm T}<0$ 成立, 其中 $\tilde\Delta=\Delta(I+J\Delta)^{-1}$, $\Delta^{\mathrm T}\Delta\le I$, 当且仅当存在正数 $\epsilon>0$, 使得

$$Y+[\epsilon^{-1}R^{\mathrm T}\quad \epsilon L]\begin{bmatrix}I & J\\ J^{\mathrm T} & I\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\epsilon^{-1}R\\ \epsilon L^{\mathrm T}\end{bmatrix}<0.$$

3　主要结果

因为 $\mathrm{rank}E=r<n$, 故存在非奇异矩阵 $M,N\in R^{n\times n}$ 使得

$$\begin{cases}MEN=\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, MAN=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix},\\ MA_dN=\begin{bmatrix}A_{d1} & A_{d2}\\ A_{d3} & A_{d4}\end{bmatrix}, MB_d=\begin{bmatrix}B_{d1}\\ B_{d2}\end{bmatrix},\\ MB=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}, ME_1=\begin{bmatrix}E_{11}\\ E_{12}\end{bmatrix}, x(k)=N\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix},\\ F_1N=[F_{11}\quad F_{12}], F_2N=[F_{21}\quad F_{22}],\end{cases} \tag{4}$$

其中: $x_1(k)\in R^r$, $x_2(k)\in R^{n-r}$. 于是系统 (1) 严格等价于系统

$$\begin{aligned}x_1(k+1)=&(A_1+E_{11}\Delta F_{11})x_1(k)+(A_2+E_{11}\Delta F_{12})x_2(k)+\\&(A_{d1}+E_{11}\Delta F_{21})x_1(k-d(k))+(A_{d2}+E_{11}\Delta F_{22})x_2(k-d(k))+\\&(B_{d1}+E_{11}\Delta F_3)u(k-d(k))+(B_1+E_{11}\Delta F_4)u(k),\end{aligned} \tag{5a}$$

$$\begin{aligned}0=&(A_3+E_{12}\Delta F_{11})x_1(k)+(A_4+E_{12}\Delta F_{12})x_2(k)+\\&(A_{d3}+E_{12}\Delta F_{21})x_1(k-d(k))+(A_{d4}+E_{12}\Delta F_{22})x_2(k-d(k))+\\&(B_{d2}+E_{12}\Delta F_3)u(k-d(k))+(B_2+E_{12}\Delta F_4)u(k).\end{aligned} \tag{5b}$$

根据假设 1 可知矩阵 $[A_4\quad B_2]$ 行满秩[7], 故存在矩阵 $Q_{21}\in R^{p\times(n-r)}$, $Q_{22}\in R^{p\times p}$ 使得 $Q=\begin{bmatrix}A_4 & B_2\\ Q_{21} & Q_{22}\end{bmatrix}$ 非奇异. 令 $P=Q^{-1}$, 则由 $QP=I$ 可得

$$[A_4\quad B_2]P=[I_{n-r}\quad 0]. \tag{6}$$

相应地, 记

$$\begin{bmatrix}A_2 & B_1\\ A_{d2} & B_{d1}\\ A_{d4} & B_{d2}\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}\bar A_2 & \bar B_1\\ \bar A_{d2} & \bar B_{d1}\\ \bar A_{d4} & \bar B_{d2}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F_{12} & F_4 \\ F_{22} & F_3 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \bar{F}_{12} & \bar{F}_4 \\ \bar{F}_{22} & \bar{F}_3 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

对系统(5) 作非奇异变换

$$\begin{bmatrix} x_2(k) \\ u(k) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \bar{x}_2(k) \\ \bar{u}(k) \end{bmatrix}, \tag{8}$$

其中: $\bar{x}_2(k) \in R^{n-r}$, $\bar{u}(k) \in R^p$. 则系统(5) 等价地转化为

$$\begin{aligned} x_1(k+1) = {} & (A_1 + E_{11}\Delta F_{11})x_1(k) + \\ & (\bar{A}_2 + E_{11}\Delta \bar{F}_{12})\bar{x}_2(k) + \\ & (A_{d1} + E_{11}\Delta F_{21})x_1(k - d(k)) + \\ & (\bar{A}_{d2} + E_{11}\Delta \bar{F}_{22})\bar{x}_2(k - d(k)) + \\ & (\bar{B}_{d1} + E_{11}\Delta \bar{F}_3)\bar{u}(k - d(k)) + \\ & (\bar{B}_1 + E_{11}\Delta \bar{F}_4)\bar{u}(k), \end{aligned} \tag{9a}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & (A_3 + E_{12}\Delta F_{11})x_1(k) + \\ & (I_{n-r} + E_{12}\Delta \bar{F}_{12})\bar{x}_2(k) + \\ & (A_{d3} + E_{12}\Delta F_{21})x_1(k - d(k)) + \\ & (\bar{A}_{d4} + E_{12}\Delta \bar{F}_{22})\bar{x}_2(k - d(k)) + \\ & (\bar{B}_{d2} + E_{12}\Delta \bar{F}_3)\bar{u}(k - d(k)) + \\ & E_{12}\Delta \bar{F}_4\bar{u}(k). \end{aligned} \tag{9b}$$

引理 3[9]　假定假设 1 成立. 若系统(1) 存在鲁棒状态反馈稳定化控制器 $u(k) = Kx(k)$, 则一定存在矩阵 Q_{21}, Q_{22} 且 Q_{22} 非奇异, 使得 $\|\bar{F}_{12}E_{12}\| < 1$, 其中 $\|\cdot\|$ 指谱范数.

引理 1 指出, 若不存在 Q, 且 Q_{22} 非奇异, 使得 $\|\bar{F}_{12}E_{12}\| < 1$, 则系统(5) (或系统(1)) 的鲁棒状态反馈稳定化问题无解. 容易验证, $\|\bar{F}_{12}E_{12}\|$ 只与 Q, 即 Q_{21}, Q_{22} 的选取有关, 而与 M, N 的选取无关[9].

下面考察系统(9), 若 $\|\bar{F}_{12}E_{12}\| < 1$, 则 $I_{n-r} + E_{12}\Delta\bar{F}_{12}$ 对所有满足 $\Delta^{\mathrm{T}}(k)\Delta(k) \leq I$ 的不确定非奇异, 根据 $(I + CD)^{-1} = I - C(I + DC)^{-1}D$, 推得

$$\begin{gathered} (I_{n-r} + E_{12}\Delta\bar{F}_{12})^{-1} = I_{n-r} - E_{12}\hat{\Delta}\bar{F}_{12}, \\ \hat{\Delta} = \Delta(I_q + \bar{F}_{12}E_{12}\Delta)^{-1}. \end{gathered} \tag{10}$$

经过计算, 系统 (9) 可等价转化为

$$\begin{aligned} x_1(k+1) = {} & (\hat{A}_1 + \hat{E}_1\hat{\Delta}\hat{F}_1)x_1(k) + \\ & (\hat{A}_{d1} + \hat{E}_1\hat{\Delta}\hat{F}_{21})x_1(k - d(k)) + \\ & (\hat{A}_{d2} + \hat{E}_1\hat{\Delta}\hat{F}_{22})\bar{x}_2(k - d(k)) + \\ & (\hat{B}_{d1} + \hat{E}_1\hat{\Delta}\hat{F}_3)\bar{u}(k - d(k)) + \\ & (\bar{B}_1 + \bar{E}_1\hat{\Delta}\bar{F}_4)\bar{u}(k), \end{aligned} \tag{11a}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_2(k) = {} & -(A_3 + E_{12}\hat{\Delta}\hat{F}_1)x_1(k) - \\ & (A_{d3} + E_{12}\hat{\Delta}\hat{F}_{21})x_1(k - d(k)) - \\ & (\bar{A}_{d4} + E_{12}\hat{\Delta}\hat{F}_{22})\bar{x}_2(k - d(k)) - \\ & (\bar{B}_{d2} + E_{12}\hat{\Delta}\hat{F}_3)\bar{u}(k - d(k)) - \\ & E_{12}\hat{\Delta}\bar{F}_4\bar{u}(k), \end{aligned} \tag{11b}$$

其中

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = A_1 - \bar{A}_2A_3, \hat{A}_{d1} = A_{d1} - \bar{A}_2A_{d3}, \\ \hat{A}_{d2} = \bar{A}_{d2} - \bar{A}_2\bar{A}_{d4}, \hat{B}_{d1} = \bar{B}_{d1} - \bar{A}_2\bar{B}_{d2}, \\ \hat{E}_1 = E_{11} - \bar{A}_2E_{12}, \\ \hat{F}_1 = F_{11} - \bar{F}_{12}A_3, \hat{F}_{21} = F_{21} - \bar{F}_{12}A_{d3}, \\ \hat{F}_{22} = \bar{F}_{22} - \bar{F}_{12}\bar{A}_{d4}, \hat{F}_3 = \bar{F}_3 - \bar{F}_{12}\bar{B}_{d2}. \end{cases} \tag{12}$$

记

$$\begin{aligned} \hat{x}(k) = {} & [x_1^{\mathrm{T}}(k), \bar{x}_2^{\mathrm{T}}(k-1), \\ & x_1^{\mathrm{T}}(k-1), \bar{x}_2^{\mathrm{T}}(k-2)]^{\mathrm{T}}, \\ \hat{u}(k) = {} & [\bar{u}^{\mathrm{T}}(k), \bar{u}^{\mathrm{T}}(k-1)]^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{13}$$

将系统 (11) 重写为

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) = {} & (\hat{A} + \Delta\hat{A})\hat{x}(k) + \\ & (\hat{A}_{d-1} + \Delta\hat{A}_{d-1})\hat{x}(k - d(k) + 1) + \\ & (\hat{B} + \Delta\hat{B})\hat{u}(k) + \\ & (\hat{B}_{d-1} + \Delta\hat{B}_{d-1})\hat{u}(k - d(k) + 1), \end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & 0 & 0 & 0 \\ -A_3 & 0 & 0 & 0 \\ I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_{d-1} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{A}_{d2} & \hat{A}_{d1} & 0 \\ 0 & -\bar{A}_{d4} & -A_{d3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}_{d-1} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{B}_{d1} \\ 0 & -\bar{B}_{d2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} & \Delta\hat{A} = \hat{E}\hat{\Delta}\hat{F}, \Delta\hat{A}_{d-1} = \hat{E}\hat{\Delta}\hat{F}_{d-1}, \\ & \Delta\hat{B} = \hat{E}\hat{\Delta}[\bar{F}_4 \quad 0], \Delta\hat{B}_{d-1} = \hat{E}\hat{\Delta}[0 \quad \hat{F}_3], \\ & \hat{E} = [\hat{E}_1^{\mathrm{T}} \quad -E_{12}^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \\ & \hat{F} = [\hat{F}_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\ & \hat{F}_{d-1} = [0 \quad \hat{F}_{22} \quad \hat{F}_{21} \quad 0]. \end{aligned} \tag{15}$$

通过变换式(4), (8), (13), 将离散奇异系统(1) 转化为系统(14), 注意到系统(14) 是一个时滞为 $d(k) - 1$ 的正常线性离散时变时滞系统, 若系统(14) 的鲁棒镇定问题与奇异系统(1) 的鲁棒镇定问题等价, 只要考虑系统(14) 的鲁棒镇定问题即可得到离散奇异系统(1) 的鲁棒镇定问题的解. 这就是下面要考虑的问题.

定理 1　假定假设 1 成立. 则系统(1) 存在鲁棒稳定化控制器 $u(k) = Kx(k)$ 的充分必要条件是, 存

在非奇异矩阵 $Q = \begin{bmatrix} A_4 & B_2 \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$，且 Q_{22} 非奇异，使得系统 (14) 存在鲁棒状态反馈稳定化控制器

$$\hat u(k) = \hat K \hat x(k), \hat K = \begin{bmatrix} \bar K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar K & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

证明　必要性　若系统(1) 存在鲁棒状态反馈稳定化控制器 $u(k) = Kx(k)$，则由假设1 及等价变换(4) 知，系统(5) 与状态反馈 $u(k) = K_1x_1(k) + K_2x_2(k)$，$[K_1\ \ K_2] = KN$，构成的闭环系统是鲁棒稳定的. 取 $Q = \begin{bmatrix} A_4 & B_2 \\ -K_2 & I_p \end{bmatrix}$，根据变换(8)，推得 $\bar u(k) = K_1x_1(k)$，令 $\bar K = K_1$，则系统(14) 与(16) 构成的闭环系统是鲁棒稳定的.

充分性　假定存在矩阵 Q 使得系统 (14) 存在鲁棒状态反馈稳定化控制器 (16)，则根据变换(8)，取控制

$$u(k) = [Q_{22}^{-1}\bar K \quad -Q_{22}^{-1}Q_{21}]N^{-1}x(k), \quad (17)$$

则其与系统(1) 构成的闭环系统鲁棒稳定. □

定理 2　假设 1 成立. 若存在矩阵 $Y_i > 0, i = 1, \cdots, 4, S > 0, R > 0, \hat H > 0$，及矩阵 $\hat V, W$ 满足

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & -\hat V & \Psi_{12} & \bar d\Psi_{13} & \Psi_{14} & 0 \\ * & -S & \Psi_{21} & \bar d\Psi_{22} & \Psi_{23} & 0 \\ * & * & -\hat Y & 0 & 0 & \Psi_{34} \\ * & * & * & -\bar dR & 0 & \bar d\hat E \\ * & * & * & * & -I & -\bar F_{12}E_{12} \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} \hat H & \hat V \\ \hat V^{\mathrm T} & YR^{-1}Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad (18)$$

其中

$$\Psi_{11} = -Y + \hat Y + rS + (d_2 - 1)\hat H + \hat V + \hat V^{\mathrm T},$$

$$Y = \mathrm{diag}\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}, \hat Y = \mathrm{diag}\{Y_3, Y_4, 0, 0\},$$

$$\tilde Y = \mathrm{diag}\{Y_1, Y_2\}, r = d_2 - d_1 + 1,$$

$$\bar d = \frac{1}{2}(d_2 - d_1)(d_2 + d_1 - 3) + d_2 - 1,$$

$$\Psi_{12} = \begin{bmatrix} Y_1\hat A_1^{\mathrm T} + W^{\mathrm T}\bar B_1^{\mathrm T} & -Y_1\hat A_3^{\mathrm T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{22} = [\Psi_{21} \quad \mathbf{0}], \Psi_{13} = \left[\Psi_{12} \middle| \begin{matrix} Y_3 & 0 \\ 0 & Y_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix}\right] - Y,$$

$$\Psi_{14} = \begin{bmatrix} Y_1\hat F_1^{\mathrm T} + W^{\mathrm T}\bar F_4^{\mathrm T} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y_2\hat A_{d2}^{\mathrm T} & -Y_2\bar A_{d4}^{\mathrm T} \\ Y_1\hat A_{d1}^{\mathrm T} + W^{\mathrm T}\bar B_{d1}^{\mathrm T} & -Y_1\hat A_{d3}^{\mathrm T} - W^{\mathrm T}\bar B_{d2}^{\mathrm T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ Y_2\hat F_{22}^{\mathrm T} \\ Y_1\hat F_{21}^{\mathrm T} + W^{\mathrm T}\hat F_3^{\mathrm T} \\ 0 \end{bmatrix}, \Psi_{34} = \begin{bmatrix} \hat E_1 \\ -E_{12} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

则系统(1) (或系统(5)) 的鲁棒状态反馈稳定化问题有解，系统(1) 的一个鲁棒控制器为(17)，其中 $\bar K = WY_1^{-1}$.

证明　由定理1 知, 在假设1 下, 系统(1) (或系统(5)) 的鲁棒状态反馈稳定化问题等价于系统(14) 的鲁棒状态反馈稳定化问题. 再由引理1, 系统(14) 与控制(16) 构成的闭环系统是鲁棒稳定的, 若存在正定矩阵 $X > 0, H > 0, U > 0, Z > 0$, 及矩阵 V 对所有满足 $\Delta^{\mathrm T}(k)\Delta(k) \leq I$ 的不确定, 满足

$$\begin{bmatrix} -X + rU + (d_2 - 1)H + V + V^{\mathrm T} & -V & (\hat A + \hat B\hat K + \Delta\hat A + \Delta\hat B\hat K)^{\mathrm T}X & \bar d(\hat A + \hat B\hat K + \Delta\hat A + \Delta\hat B\hat K - I)^{\mathrm T}Z \\ * & -U & (\hat A_{d-1} + \hat B_{d-1}\hat K + \Delta\hat A_{d-1} + \Delta\hat B_{d-1}\hat K)^{\mathrm T}X & \bar d(\hat A_{d-1} + \hat B_{d-1}\hat K + \Delta\hat A_{d-1} + \Delta\hat B_{d-1}\hat K)^{\mathrm T}Z \\ * & * & -X & 0 \\ * & * & * & -\bar dZ \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} H & V \\ V^{\mathrm T} & Z \end{bmatrix} \geq 0. \quad (20)$$

根据式(15) 及引理 2, 并利用 Schur 补偿方法, 式(20) 等价于存在正数 $\epsilon > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} -X + rU + (d_2 - 1)H + V + V^{\mathrm T} & -V & (\hat A + \hat B\hat K)^{\mathrm T}X & \bar d(\hat A + \hat B\hat K - I)^{\mathrm T}Z & \epsilon^{-1}(\hat F + [\bar F_4 \quad 0]\hat K)^{\mathrm T} & 0 \\ * & -U & (\hat A_{d-1} + \hat B_{d-1}\hat K)^{\mathrm T}X & \bar d(\hat A_{d-1} + \hat B_{d-1}\hat K)^{\mathrm T}Z & \epsilon^{-1}(\hat F_{d-1} + [0 \quad \hat F_3]\hat K)^{\mathrm T} & 0 \\ * & * & -X & 0 & 0 & \epsilon X\hat E \\ * & * & * & -\bar dZ & 0 & \epsilon\bar dZ\hat E \\ * & * & * & * & -I & -\bar F_{12}E_{12} \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

取

$$T_1 = \mathrm{diag}\{\epsilon^{-1}X^{-1}, \epsilon^{-1}X^{-1}, \epsilon^{-1}X^{-1}, \epsilon^{-1}Z^{-1}, I, I\},$$

$$T_2 = \mathrm{diag}\{\epsilon^{-1}X^{-1}, \epsilon^{-1}X^{-1}\}, \bar R = \epsilon^{-2}Z^{-1},$$

$$\bar{S} = \epsilon^{-2}X^{-1}UX^{-1}, \bar{H} = \epsilon^{-2}X^{-1}HX^{-1},$$
$$\bar{V} = \epsilon^{-2}X^{-1}VX^{-1},$$
$$\bar{Y} = \epsilon^{-2}X^{-1} = \mathrm{diag}\{Y_1, Y_2, \bar{Y}_3, \bar{Y}_4\},$$
$$Y_3 = Y_1\bar{Y}_3^{-1}Y_1, Y_4 = Y_2\bar{Y}_4^{-1}Y_2,$$
$$\hat{S} = T_3\bar{S}T_3^{\mathrm{T}}, \hat{H} = T_3\bar{H}T_3^{\mathrm{T}},$$
$$\hat{V} = T_3\bar{V}T_3^{\mathrm{T}}, R = T_3\bar{R}T_3^{\mathrm{T}}, W = \bar{K}Y_1,$$
$$T_3 = \mathrm{diag}\{I, I, Y_1\bar{Y}_3^{-1}, Y_2\bar{Y}_4^{-1}\},$$
$$T_{52} = \mathrm{diag}\{T_3, I, I\},$$
$$T_5 = \mathrm{diag}\{T_{51}, T_{52}\}, T_6 = \mathrm{diag}\{T_3, T_3\}, \tag{22}$$
$$T_4 = \begin{bmatrix} 0 & Y_1\bar{Y}_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & Y_2\bar{Y}_4^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T_{51} = \begin{bmatrix} T_3 & 0 & T_4 \\ 0 & T_3 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}.$$

不等式(21)左乘 T_5T_1, 右乘以$(T_5T_1)^{\mathrm{T}}$, (20)的第2个不等式左乘 T_6T_2, 右乘以$(T_6T_2)^{\mathrm{T}}$, 即有(18)成立. □

注 3　对于离散奇异系统的镇定问题, 很难用原系统的系数矩阵给出一个LMI条件; 对于鲁棒镇定问题, 更是如此. 虽然不等式(18)是用系统(1)变换后的系数矩阵给出的, 并不是LMI, 但可利用锥补算法[2,3]求得问题的解.

4　结　语

本文讨论了不确定离散时变时滞奇异系统的鲁棒状态反馈稳定化问题. 指出问题可等价转化为一个不确定正常线性离散时变时滞系统的鲁棒状态反馈稳定化问题, 并利用矩阵不等式给出了时滞相关的问题可解的充分条件以及无记忆状态反馈控制器的解. 需要指出, 本文的方法对于输出反馈问题很难应用.

参考文献(References)

[1] Song S H, Kim J K. H_∞ Control of Discrete-time Linear Systems with Norm-bounded Uncertainties and Time Delay in State[J]. *Automatica*, 1998, 34(1): 137-139.

[2] Moon Y S, Park P G, Kwon W H, et al. Delay-dependent Robust Stabilization of Uncertain State-delayed Systems[J]. *Int J Control*, 2001, 74(14): 1447-1455.

[3] Palhares R M, Campos C D, Leles M C R, et al. On Delay-dependent Robust H_∞ Control of Uncertain Continuous and Discrete-time Linear Systems with Lumped Delays[A]. *Proc of the 42nd IEEE CDC*[C]. Hawaii, 2003: 4032-4036.

[4] Chen W H, Guan Z H, Yu P. Delay-dependent Stability and H_∞ Control of Uncertain Discrete-time Markovian Jump Systems with Mode-dependent Time Delays[J]. *Systems and Control Letters*, 2004, 52(5): 361-376.

[5] 冯俊娥, 程兆林. 不确定奇异时滞系统的保性能控制[J]. *控制与决策*, 2002, 17(增): 711-714.
(Feng J E, Cheng Z L. Guaranteed Cost Control of Linear Uncertain Singular Time-delay Systems[J]. *Control and Decision*, 2002, 17(S): 711-714.)

[6] Xu S, Yang C, Lam J. Robust H_∞ Control for Discrete Singular Systems with State Delay and Parameter Uncertainty[J]. *Dynamic Continuous, Dicrete, Impul System*, 2002, 11(3): 497-506.

[7] Dai L. Singular Control Systems[A]. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*[C]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[8] Xie L. Output Feedback H_∞ Control of Systems with Parameter Uncertainty[J]. *Int J Control*, 1996, 63(4): 741-750.

[9] 马树萍, 程兆林. 一类不确定离散奇异系统的鲁棒稳定化[J]. *控制理论与应用*, 2004, 21(5): 765-769.
(Ma S P, Cheng Z L. Robust Stabilization for a Class of Discrete-time Singular Systems with Uncertainties[J]. *Control Theory and Applications*, 2004, 21(5): 765-769.)

下　期　要　目