第21卷 第5期 控 制 与 决 策 2006年5月
Vol 21 No. 5 Control and Decision May 2006

文章编号: 1001-0920(2006)05-0555-04

一类非线性耗散系统的逆最优控制

李桂芳, 孙勇成, 杨成梧
(南京理工大学 动力学院, 南京 210094)

摘 要: 首先研究一类单输入非仿射非线性系统的逆最优控制问题, 其代价泛函为非线性-非二次型, 设计出一族参数化的状态反馈逆最优控制器; 然后讨论当该系统为耗散系统时, 在供给率为二次型的耗散性理论框架下, 给出使系统渐近稳定的李雅普诺夫函数和镇定控制律, 并通过适当选取代价泛函中的参数, 使得李雅普诺夫函数也是最优值函数, 进而揭示出耗散系统在线性输出反馈意义下稳定性与最优性之间的等价关系.

关键词: 非线性系统; 逆最优控制; 耗散性; 输出反馈; 渐近稳定性
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Inverse Optimal Control of a Class of Nonlinear Dissipative Systems

LI Gui-fang, SUN Yong-cheng, YANG Cheng-wu
(School of Power, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: LI Gui-fang, E-mail: liguifanglgf@sohu.com)

Abstract: The inverse optimal control problem of a class of single-input non-affine nonlinear systems with nonlinear-nonquadratic cost functional is addressed. A family of parameterized controllers are designed. When the system is dissipative, in the framework of dissipativity theory with quadratic supply rates, the Lyapunov function and the stabilizing control law that provide asymptotical stability of the closed-loop system are derived. The Lyapunov function is the optimal value function by choosing appropriate parameters of the cost functional. The equivalent relationship between stability and optimality of nonlinear dissipative systems is exposed in the sense of linear output feedback control.

Key words: Nonlinear systems; Inverse optimal control; Dissipativity; Output feedback; Asymptotical stability

1 引 言

耗散性是网络理论中无源性的推广, 目前已形成较为系统的理论体系, 这方面的研究正受到越来越多的重视. 一方面, 耗散性与稳定性之间有着紧密的联系, 耗散性理论可用来解决非线性系统的镇定问题; 另一方面, 它也为李雅普诺夫函数的构造提供了新的有效途径.

在实际问题的研究中, 除要求系统具有稳定性外, 常常还希望对某个性能指标系统具有最优性, 因此有必要研究最优控制问题. 通常最优控制问题会归结为求解Hamiltan-Jacobi-Bellman (HJB) 方程, 但这并非易事. 为避免求解HJB 方程, Freeman 和 Kokotovic 提出了逆最优控制理论. 与直接的最优控制不同, 逆最优控制并不是通过求解控制器来最小化一个事先给定的代价泛函, 而是用由使系统镇定的李雅普诺夫函数设计得到的控制器来最小化某个待定的代价泛函. 选取适当的代价泛函中的参数, 可使该李雅普诺夫函数也是相应的优化值函数, 从而保证了系统的稳定性和最优性. 这样, 求解逆最优控制问题便转化为构造适当的李雅普诺夫函数的问题, 应用耗散性理论便可以将问题解决.

长期以来控制界对逆最优控制理论及其应用进

收稿日期: 2005-03-15; **修回日期**: 2005-07-04
基金项目: 南京理工大学青年发展基金项目(AB96037).
作者简介: 李桂芳(1978—), 女, 山西大同人, 博士生, 从事非线性不确定系统的鲁棒控制及无源系统理论的研究;
杨成梧(1937—), 男, 沈阳人, 教授, 博士生导师, 从事广义系统和非线性系统的控制等研究.

行了不断的探索, 并取得了一些研究成果 Kalman[1]首先解决了线性二次型逆最优控制问题, 给出了这一问题的完美解 更进一步, 随着非线性系统理论的深入发展, 文献[2～5]等又讨论了非线性系统的逆最优控制问题, 但研究的对象是仿射非线性系统, 并且最小化的是通常形式的代价泛函 近年来, 部分学者开始探讨仿射非线性系统关于非线性-非二次型代价泛函的逆最优控制问题, 如文献[2, 6]等 非线性-非二次型代价泛函不同于通常讨论的所谓有意义的代价泛函, 它其中的控制交叉项通常要降低系统的稳定裕度或增益, 但它也可以为控制器提供更灵活的设计方法, 使得系统具有更好的稳态性能 目前基于耗散性理论研究非仿射非线性系统的逆最优控制问题的文献还较少.

本文首先研究了一类单输入非仿射非线性系统的逆最优控制问题, 设计出一族参数化的逆最优控制器; 然后基于耗散性理论进一步讨论当该系统为耗散系统时的相应结论; 并在线性输出反馈控制的意义下, 揭示出非线性耗散系统的稳定性与最优性之间的等价关系, 所得结论可包含无源系统的相应结论

2 问题描述及预备知识

在本文中, $L_f h(x)$ 表示 h 关于 f 的李导数

考虑一类单输入非仿射非线性系统[7]

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x)u + g_1(x)u^2,$$
$$y = h(x). \tag{1}$$

其中: $x \in R^n$ 是状态; $u \in R^m$ 和 $y \in R^p$ 分别是控制输入和输出; f_0, g_0, g_1 和 h 是光滑映射, 且 $f_0(0) = 0, h(0) = 0$.

定义 1[8] 称系统 (1) 关于供给率 $s(u, y)$ 是耗散的, 如果存在正定函数 V (称为存储函数), $V: R^n \to R^+$, 且 $V(0) = 0$ 和一个连续函数 $\Phi: R^n \times R^m \to R$, 且 $\Phi(x, u)$ 对每个 u 都是正的, 使得对所有 $x_0 \in X$, $t \geq t_0$ 以及所有的输入函数 u, 有

$$V(x(t)) - V(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t}[s(u(\tau), y(\tau)) - \Phi(x(\tau), u(\tau))]\mathrm{d}\tau,$$
$$\forall (x, u) \in R^n \times R^m. \tag{2}$$

如果 V 连续可微, 则耗散等式(2) 可等价于如下微分形式:

$$\dot{V}(x) = s(u, y) - \Phi(x, u). \tag{3}$$

这里考虑二次型供给率

$$s(u, y) = y^{\mathrm{T}}Qy + 2y^{\mathrm{T}}Su + u^{\mathrm{T}}Ru,$$

其中: Q, S, R 是适维矩阵, 且 Q 和 R 是对称矩阵

注 1 无源性和 γ-耗散性都是基于二次型供给率的耗散性的特例

考虑如下非线性-非二次型的代价泛函:

$$J(x_0, u(\cdot)) = \int (L_1(x) + L_2(x)u + L_3(x)u^2)\mathrm{d}t, \tag{4}$$

其中: $L_1: R^n \to R$; $L_2: R^n \to R$ 及 $L_3: R^n \to R$, 且 $L_2(0) = 0, L_3(x) \geq 0$.

记系统 (1) 的渐近镇定控制器的集合为 $U(x_0)$. 本文的主要任务是研究系统(1) 的逆最优控制问题, 下面给出其描述

逆最优控制问题 对系统(1) 寻找适当的李雅普诺夫函数和控制律, 使得闭环系统渐近稳定, 并通过选择代价泛函中的参数, 使该李雅普诺夫函数也是优化值函数

引理 1 系统 (1) 关于二次型供给率 $s(u, y)$ 是耗散的, 当且仅当存在 C^2 正定函数 $V(x)$, 且 $V(0) = 0$ 及实函数 $h(x) \in R^q$, $l(x) \in R^q$, 使得

$$L_{f_0(x)}V(x) = y^{\mathrm{T}}Qy - l(x)^{\mathrm{T}}l(x), \tag{5a}$$
$$L_{g_0(x)}V(x) = 2y^{\mathrm{T}}S - 2l(x)^{\mathrm{T}}k(x), \tag{5b}$$
$$L_{g_1(x)}V(x) = R - k(x)^{\mathrm{T}}k(x). \tag{5c}$$

证明 **充分性** 若式(5a)～(5c) 成立, 则

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= L_{f_0(x)}V(x) + L_{g_0(x)}V(x) + L_{g_1(x)}V(x)u^2 = \\ &y^{\mathrm{T}}Qy - l(x)^{\mathrm{T}}l(x) + 2(y^{\mathrm{T}}S - l(x)^{\mathrm{T}}k(x))u + (R - k(x)^{\mathrm{T}}k(x))u^2 = \\ &(y^{\mathrm{T}}Qy + 2y^{\mathrm{T}}Su + u^{\mathrm{T}}Ru) - (l(x) + k(x)u)^2.\end{aligned} \tag{6}$$

由耗散性的定义知, 系统 (1) 关于二次型供给率 $s(u, y)$ 是耗散的

必要性 若系统 (1) 关于二次型供给率 $s(u, y)$ 是耗散的, 则必存在正定函数 $V(x)$ 和连续函数 $\Phi(x)$ 满足式(3). 又由于 $\dot{V}|_{(1)}$ 和供给率 $s(u, y)$ 都是 u 的二次函数, 因此也存在适维的实函数 $l(x)$, $k(x)$ 使得 $\Phi(x, u) = [l(x) + k(x)u]^{\mathrm{T}}[l(x) + k(x)u]$, 这样便有

$$\begin{aligned}&L_{f_0(x)}V(x) + L_{g_0(x)}V(x)u + L_{g_1(x)}V(x)u^2 = \\ &(y^{\mathrm{T}}Qy - l(x)^{\mathrm{T}}l(x)) + (2y^{\mathrm{T}}S - \\ &2l(x)^{\mathrm{T}}k(x))u + (R - k(x)^{\mathrm{T}}k(x))u^2.\end{aligned} \tag{7}$$

在式(7) 两边令 $u = 0$ 得到式(5a), 在式(7) 两边对 u 求一阶导数和二阶导数并令 $u = 0$ 还可分别得到式(5b), (5c) 成立 □

3 主要结论

定理 1 考察系统 (1) 及代价泛函(4), 若存在径向无界的正定函数 $V: R^n \to R^+$, 且 $V(0) = 0$ 以及实函数 $L_2(x)$ 和 $L_3(x)$ 满足

$$L_2(0) = 0, L_3(x) + L_{g_1(x)}V(x) > 0, \forall x \in R^n,$$

$$L_{f_0(x)}V(x) - \frac{1}{2}L_{g_0(x)}V(x)[L_3(x) + L_{g_1(x)}V(x)]^{-1}[L_2(x) + L_{g_0(x)}V(x)] + \frac{1}{4}L_{g_1(x)}V(x)[L_3(x) + L_{g_1(x)}V(x)]^{-2}[L_2(x) + L_{g_0(x)}V(x)]^2 < 0, x \neq 0, \forall x \in R^n. \quad (8)$$

则在控制律 $u = \mu(x)$ 的作用下, 闭环系统的零解是全局渐近稳定的, 这里

$$\mu(x) = -\frac{1}{2}[L_3(x) + L_{g_1(x)}V(x)]^{-1} \times [L_2(x) + L_{g_0(x)}V(x)]. \quad (9)$$

当取

$$L_1(x) = \frac{1}{4}[L_3(x) + L_{g_1(x)}V(x)]^{-1}[L_2(x) + L_{g_0(x)}V(x)]^2 - L_{f_0(x)}V(x), \quad (10)$$

则代价泛函(4) 在下述意义下被最小化:

$$J(x_0, \mu(x(\cdot))) = \min_{u \in U(x_0)} J(x_0, u(\cdot)), \quad x_0 \in R^n, \quad (11)$$

且
$$J(x_0, \mu(x)) = V(x_0). \quad (12)$$

证明 预置哈密尔顿函数为

$$H(x, u) = L_1(x) + L_2(x)u + L_3(x)u^2 + \frac{\partial V}{\partial x}(f_0(x) + g_0(x)u + g_1(x)u^2), \quad (13)$$

将上式整理为

$$H(x, u) = (L_1(x) + L_{f_0(x)}V(x)) + (L_2(x) + L_{g_0(x)}V(x))u + (L_3(x) + L_{g_1(x)}V(x))u^2. \quad (14)$$

令 $\partial H(x, u)/\partial u = 0$, 求得控制律有形如式(9) 的表达. 再由式(8) 及 V 的径向无界性可知, 闭环系统(1), (9) 的零解是全局渐近稳定的.

另一方面, 当式(10) 成立时, 将式(9), (10) 代入(14), 经运算可推得

$$H(x, \mu(x)) = 0, \quad (15)$$

以及

$$H(x, u) - H(x, \mu(x)) = (L_3(x) + L_{g_1(x)}V(x))(u - \mu(x))^2 \geq 0, \quad (16)$$

故式(11) 成立. 经观察式(15) 可等价地写为

$$L_1(x) + L_2(x)\mu(x) + L_3(x)\mu(x)^2 + \mathring{V}(x) = 0. \quad (17)$$

对上式两边从 0 到 ∞ 积分, 便得到

$$\int_0^\infty [L_1(x) + L_2(x)\mu(x) + L_3(x)\mu(x)^2]dt = -\int_0^\infty \mathring{V}(x)dt = V(x_0),$$

故式(12) 成立. □

注 2 系统(1) 的逆最优控制律(9) 依赖于代价泛函(4) 中的参数 L_2, L_3, 而与 L_1 无关, 因此控制器的设计具有很大的灵活性.

在定理 1 的基础上, 考虑当系统 (1) 是关于二次型供给率耗散时的逆最优控制问题.

定理 2 考察系统(1) 和代价泛函(4), 若系统(1) 关于二次型供给率 $s(u, y)$ 是耗散的, 它的连续可微且径向无界的正定存储函数为 $V_s: R^n \to R$, 且 V_s 与相应的实函数 $l(x)$ 和 $k(x)$ 以及实函数 $L_2(x)$ 和 $L_3(x)$ 满足

$$L_2(0) = 0, L_3(x) + L_{g_1(x)}V(x) > 0, \quad \forall x \in R^n,$$
$$h^T(x)\{Q - S^T[2(R + \epsilon)^{-1} - (R + \epsilon)^{-2}(R - k(x)^T k(x))]S\}h(x) + 2(R + \epsilon)^{-1}l(x)^T k(x)S h(x) - l(x)^T l(x) < 0, \forall x \neq 0. \quad (18)$$

则在输出反馈控制律 $u = \mu(y) = -(R + \epsilon)^{-1}Sy$ 的作用下, 闭环系统的零解是全局渐近稳定的. 当取

$$L_1(x) = l(x)^T l(x) + h(x)^T[(R + \epsilon)^{-1}SS^T - Q]h(x),$$
$$L_2(x) = 2l(x)^T k(x),$$
$$L_3(x) = k(x)^T k(x) + \epsilon, \quad (19)$$

则代价泛函(4) 在下述意义下被最小化:

$$J(x_0, \mu(y(\cdot))) = \min_{u \in U(x_0)} J(x_0, u(\cdot)), \quad x_0 \in R^n, \quad (20)$$

且
$$J(x_0, \mu(y)) = V_s(x_0). \quad (21)$$

这里 $\epsilon > 0$ 是使 $R + \epsilon > 0$ 的任意正数.

证明 若系统 (1) 关于二次型供给率 $s(u, y)$ 是耗散的, 由引理 1 知存在正定函数 $V_s(x)$ 及实函数 $l(x), k(x)$, 使得式(5a)～ (5c) 成立, 对比可知式(18) 相应于定理 1 中的式(8), 于是定理 1 的条件满足, 从而闭环系统(1), (9) 的零解是全局渐近稳定的. 另外, 由定理 1 知, 当代价泛函(4) 中的参数取为式(19) 时, 镇定控制律(9) 即可写为 $u = \mu(y) = -(R + \epsilon)^{-1}Sy$, 它同时使得代价泛函(4) 在(20) 和(21) 的意义下被最小化. □

注 3 系统具有耗散性时, 可以用线性输出反馈控制进行镇定和最优化设计. 当定理 2 中的 $R = 0, Q = 0, S = 1, L_2(x) = 0, g_1(x) = 0$ 时, 上述结论包括系统为无源性时的结论, 详见文献[9] 的定理 6.2.

注 4 只要选择适当的输出函数 $y = h(x)$, 比如取 $h(x) = -(R + \epsilon)^{-1}(l(x)^T k(x)S)^T$, 以及 $2I > R > 0, Q < 0$, 则条件(18) 就成立, 而这里 Q 和 R 的取值也是符合通常假定的.

4 结　论

本文首先将仿射非线性系统的逆最优控制问题的结论扩展到一类单输入非仿射非线性系统, 不必解HJB 方程便设计出一族参数化的逆最优控制器, 从而使得控制器的设计更加灵活; 然后在耗散性理论的框架下研究了当系统为耗散系统时的逆最优镇定性问题, 得到相应的结论. 在输出反馈控制的意义下, 揭示了耗散系统的稳定性与最优性间的等价关系, 无源性结论也包含其中.

参考文献(References)

[1] Kalman R E. When is a Linear Control System Optimal? [J]. *ASME Basic Engineering*, 1964, 86: 51-60.

[2] Haddad W M, Chellaborina V S, Fause J L, et al. Optimal Discrete-time Control for Nonlinear Cascaded Systems[J]. *J Franklin Inst*, 1997, 335B(5): 827-839.

[3] Li Z H, Miroslav Krstic. Optimal Design of Adaptive Tracking Controllers for Nonlinear Systems[A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. New Mexico, 1997: 1191-1197.

[4] Moylan P J, Anderson B D O. Nonlinear Regulator Theory and an Inverse Optimal Control Problem [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1973, 18(5): 460-465.

[5] Sepulchre R, Jankovic M, Kokotovic P. *Constructive Nonlinear Control*[M]. New York: Springer, 1997.

[6] Boumediene Hamzi. Some Results on Inverse Optimality Based Designs [J]. *Systems and Control Letters*, 2001, 43(4): 239-246.

[7] Wei Lin. Feedback Stabilization of General Nonlinear Control Systems: A Passive System Approach [J]. *Systems and Control Letters*, 1995, 25(1): 41-52.

[8] Eva Maria Navarro Lopez. *Dissipativity and Passivity-related Properties in Nonlinear Discrete-time Systems* [D]. Barcelona: Technical University of Catalonia, 2002.

[9] Chellaboina V, Haddad W M. Exponentially Dissipative Nonlinear Dynamical Systems: A Nonlinear Extension of Strict Positive Realness[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2003, 2003(1): 25-34.

(上接第549 页)

6 结　论

本文为离散Takagi-Sugeno 模糊时滞控制系统的稳定性分析和模糊H_∞控制器设计问题的研究提供了一种新方法. 所得结果不仅是时滞相关的, 而且避免了寻找公共Lyapunov 函数解的困难, 具有较小的保守性. 关于如何简化控制器参数设计, 并将其应用于实际系统的问题尚待进一步研究.

参考文献(References)

[1] Cao Y Y, Frank P M. Analysis and Synthesis of Nonlinear Time-delay Systems via Fuzzy Control Approach[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2000, 8(2): 200-211.

[2] Zhang Y, Heng P A. Stability of Fuzzy Control Systems with Bounded Uncertain Delays [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2002, 10(1): 92-96.

[3] Guan X P, Chen C L. Delay-dependent Guaranteed Cost Control for T-S Fuzzy Systems with Time Delays [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2004, 12(2): 236-249.

[4] 陈兵, 周玉成. T-S 模糊时滞模型的时滞相关稳定性分析和镇定[J]. *控制与决策*, 2004, 19(9): 1022-1025.
(Chen B, Zhou Y C. Delay-dependent Stability Analysis and Stabilization of T-S Fuzzy Models with Time-delay [J]. *Control and Decision*, 2004, 19(9): 1022-1025.)

[5] Zhou S S, Li T. Robust Stabilization for Delayed Discrete-time Fuzzy Systems via Basis-dependent Lyapunov-Krasovskii Function [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 151(1): 139-153.

[6] 王岩, 张庆灵, 孙增圻, 等. 离散模糊系统分析与设计的模糊Lyapunov 方法[J]. *自动化学报*, 2004, 30(2): 255-260.
(Wang Y, Zhang Q L, Sun Z Q, et al. Analysis and Design of Discrete Fuzzy System with Fuzzy Lyapunov Approach[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(2): 255-260.)

[7] El Ghaoui L, Oustry F, AitRami M. Cone Complementarity Linearization Algorithm for Static Output-feedback and Related Problems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1171-1176.

[8] Gao H, Lam J, Wang C, et al. Delay-dependent Output-feedback Stabilization of Discrete-time Systems with Time-varying State Delay[J]. *IEE Proc: Control Theory and Application*, 2004, 151(6): 691-698.

[9] Xie L, De Souza C. Robust H_∞ Control for Linear Systems with Norm-bounded Time Varying Uncertainty [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(8): 1188-1191.

[10] Boyd S, Ghaoui E, Feron E, et al. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory* [M]. Philadelphia: SIAM, 1994.