文章编号: 1001-0920(2006)05-0559-04

一类时滞线性系统的鲁棒非脆弱控制器设计

翟 丁[a], 张庆灵[a], 刘国义[a], 张 友[b]
(东北大学 a. 理学院, b. 信息科学与工程学院, 沈阳 110004)

摘 要: 基于线性矩阵不等式(LMI)方法, 研究一类时滞线性系统的鲁棒非脆弱控制器的设计问题. 在假定控制器增益扰动范数有界的前提下, 对不确定时滞线性系统设计了鲁棒非脆弱状态反馈控制器, 同时以一个LMI的形式给出了状态反馈控制器存在的充分条件, 而且该LMI是与时滞相关的, 因而具有较小的保守性. 数值例子证明了该设计方法的有效性和可行性.

关键词: 线性系统; 时滞; 不确定; 线性矩阵不等式; 状态反馈控制
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Robust Non-fragile Controller for a Class of Linear Time-delay Systems

ZHAI Ding[a], *ZHANG Qing-ling*[a], *LIU Guo-yi*[a], *ZHANG You*[b]
(a. College of Science, b. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: ZHAI Ding, E-mail: zhaiding@etang.com)

Abstract: The design problem of robust non-fragile controller for a class of linear time-delay systems is discussed based on LMI. The controller gain perturbations is assumed to be norm-bounded. The robust resilient state feedback controller for linear systems with uncertainties and constant delays is designed. The condition of robust non-fragile controller designing is given. A delay-dependent design method is proposed in terms of linear matrix inequalities (LMIs). All parameters of the LMI are linear, and the LMI is depends on the size of delay. An illustrative example shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: Linear systems; Time-delay; Uncertainty; Linear matrix inequalities; State feedback control

1 引 言

时滞现象在实际工程问题中是普遍存在的, 如通讯系统、生物系统、化工过程以及电力系统中均存在时滞. 时滞的存在使得系统的分析与综合变得更加复杂和困难, 同时也往往是导致系统不稳定和系统性能变差的根源[1,2]. 近年来, 鲁棒控制器的设计问题受到了国内外众多学者的关注[2,5], 特别是非脆弱鲁棒控制器的设计方法已成为一个热点问题[6,7]. 对现场的实际控制要求系统应具备稳定性并满足相应的性能指标, 而影响稳定性的最主要因素包括时滞和不确定. 具有H_∞范数约束的控制问题在过去的10年里取得了令人瞩目的成果[6~8]. 控制器的实现因系统的软硬件等原因, 使控制存在着不确定性, 造成系统的稳定性下降. 然而, 现有的H_∞控制大多没有考虑控制器的不确定性, 且所得结果的保守性较强.

本文针对一类不确定时滞系统, 给出了鲁棒非脆弱控制器的设计方法, 所得的结果与时滞相关, 从而具有较小的保守性. 设计算例说明了设计方法的有效性和可行性.

2 鲁棒非脆弱控制问题

考虑一类带有时滞的线性系统

收稿日期: 2005-03-28; **修回日期**: 2005-06-28.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60574011); 中国博士后科学基金项目(2005037758).
作者简介: 翟丁(1970—), 男, 辽宁铁岭人, 博士后, 从事大系统的分散控制与鲁棒控制、模糊控制的研究; 张庆灵(1956—), 男, 辽宁营口人, 教授, 博士生导师, 从事广义系统的分散控制与鲁棒控制、生物控制的研究.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A_0+\Delta A_0)x(t)+\sum_{i=1}^{m}A_i x(t-h_i)+\\&\quad B_1 w(t)+(B_2+\Delta B_2)u(t),\\ x(t)&=0,\ t\in[-h,0],\\ z(t)&=Cx(t)+Dw(t)+E_1u(t).\end{aligned}\tag{1}$$

其中:$x\in R^n$ 是系统的状态向量,$w(t)\in L_2^q[0,\infty)$ 是外部扰动信号,$u(t)\in R^m$ 是系统的控制输入,$z(t)\in R^p$ 是系统的控制输出. 假设时滞 $h_i>0$, $i=1,\cdots,m$ 已知, 且 $h_0=0$, $h=\max_{i=1,\cdots,m}\{h_i\}$, 矩阵 A_0, A_i, B_1, B_2, C, D, E 是常数矩阵. ΔA_0 和 ΔB_2 描述为

$$\begin{aligned}&[\Delta A_0\quad \Delta B_2]=H_{11}F_1(t)[H_{12}\quad H_{B12}],\\&F_1^{\mathrm T}(t)F_1(t)\le\rho_1 I,\end{aligned}\tag{2}$$

其中:H_{11}, H_{12}, H_{B12} 和 $\rho_1\ge0$ 分别为常数矩阵和常数. 对于不存在摄动的控制器增益的状态反馈控制器 $u(t)=Kx(t)$, 其实际的控制器定义为

$$\begin{aligned}&u(t)=[K+\Delta K(t)]x(t),\\&\Delta K(t)=H_{21}F_2(t)H_{22},\end{aligned}\tag{3}$$

且
$$F_2^{\mathrm T}(t)F_2(t)\le\rho_2 I,\tag{4}$$

其中:H_{21}, H_{22} 和 $\rho_2\ge0$ 为已知常数矩阵和常数.

对于给定的描述标量 $\gamma>0$, 定义性能指标

$$J(w)=\int^{\infty}(z^{\mathrm T}(t)z(t)-\gamma^2w^{\mathrm T}(t)w(t))\mathrm d\tau\tag{5}$$

给定常数 $\gamma>0$ 找到一个状态反馈增益 K, 对于所有的非零 $w(t)\in L_2^q[0,\infty)$ 成本函数, 且不确定项 $F_1(t)$ 和 $F_2(t)$ 满足式(2) 和(4) 以及 $h_i>0$, $i=1,\cdots,m$, 使得成本函数(5) 小于零. 在本文中, 用 * 表示矩阵的对称部分. 带有 $\Delta A_0=0$ 和 $u(t)=0$ 的系统(1) 可等价地描述为下列广义形式:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=y(t),\\ y(t)&=A_0x(t)+\sum_{i=0}^{m}A_ix(t-h_i)+B_1w(t)=\\&\Big(A_0+\sum_{i=0}^{m}A_i\Big)x(t)-\\&\sum_{i=1}^{m}A_i\int_{h_i}y(\tau)\mathrm d\tau+B_1w(t),\end{aligned}$$

或

$$E\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I\\ \sum_{i=0}^{m}A_i & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{m}\begin{bmatrix}0\\ A_i\end{bmatrix}\int_{h_i}y(\tau)\mathrm d\tau+\begin{bmatrix}0\\ B_1\end{bmatrix}w(t),\tag{6}$$

其中

$$E=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.\tag{7}$$

对于系统(1) 的 Lyapunov-Krasovskii 函数有下面形式:

$$\begin{aligned}V(t)&=\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}^{\mathrm T}EP\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}+\\&\sum_{i=1}^{m}\int_{h_i}x^{\mathrm T}(\tau)S_ix(\tau)\mathrm d\tau+\\&\sum_{i=1}^{m}\int_{h_i}^{0}\int_{+\theta}\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & A_i^{\mathrm T}\end{bmatrix}\times\\&R_i\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & A_i^{\mathrm T}\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\mathrm ds\mathrm d\theta\end{aligned}\tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}&P=\begin{bmatrix}P_1 & 0\\ P_2 & P_3\end{bmatrix},\ R_i=\begin{bmatrix}R_{i1} & R_{i2}\\ R_{i2} & R_{i3}\end{bmatrix}>0,\\&P_1>0,\ S_i>0,\ R_i>0.\end{aligned}\tag{9}$$

下面给出时滞依赖边界实引理.

引理 1[9] 考虑带有 $\Delta A_0=0$ 和 $u(t)=0$ 的系统(1), 对于标量 $\gamma>0$, 如果存在 P 且 $P_1>0$, $S_i>0$, W_i, $R_i>0$, $i=1,\cdots,m$ 和不等式(10) 成立, 则对于所有非零 $w(t)\in L_2^q[0,\infty)$, 成本函数(5) 小于零. $R\in K^{2n\times2n}$, $W_i\in K^{2n\times2n}$,

$$\begin{bmatrix}\Psi_{11} & \begin{bmatrix}C^{\mathrm T}\\ 0\end{bmatrix} & \Psi_{13} & \Psi_{14} & P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\ B_1\end{bmatrix}\\ * & -I & 0 & 0 & D\\ * & * & \Psi_{33} & 0 & 0\\ * & * & * & \Psi_{44} & 0\\ * & * & * & * & -\gamma^2I\end{bmatrix}<0.\tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned}&\Psi_{11}=\\&P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0 & I\\ \sum_{i=0}^{m}A_i & -I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & I\\ \sum_{i=0}^{m}A_i & -I\end{bmatrix}^{\mathrm T}P+\\&\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{m}S_i & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{m}h_i\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & A_i^{\mathrm T}\end{bmatrix}R_i\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & A_i\end{bmatrix}+\\&\sum_{i=1}^{m}\Big(W_i^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0 & 0\\ A_i & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ A_i & 0\end{bmatrix}^{\mathrm T}W_i\Big),\\&\Psi_{13}=[h_1(W_1+P)^{\mathrm T}\ \cdots\ h_m(W_m+P)^{\mathrm T}],\\&\Psi_{14}=\Big[W_1^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\ A_1\end{bmatrix}\ \cdots\ W_m^{\mathrm T}\begin{bmatrix}0\\ A_m\end{bmatrix}\Big],\\&\Psi_{33}=\mathrm{diag}[-h_1R_1\ \cdots\ -h_mR_m],\\&\Psi_{44}=\mathrm{diag}[-S_1\ \cdots\ -S_m].\end{aligned}\tag{11}$$

引理 2 给定带有适当维数的矩阵 X, Y 和 Z 且 $Y^{\mathrm T}Y\le I$, 则下面的不等式成立:

$$XYZ+(XYZ)^{\mathrm T}\le\epsilon XX^{\mathrm T}+\frac{1}{\epsilon}Z^{\mathrm T}Z,\ \epsilon>0.$$

3　鲁棒非脆弱控制器设计

将式(3) 代入系统(1), 闭环系统变为

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) ={}& [A_0 + \Delta A_0 + (B_2 + \Delta B_2)(K + \Delta K)]x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - h_i) + B_1 w(t),\\ z(t) ={}& [C + E(K + \Delta K)]x(t) + Dw(t),\end{aligned}\quad (12)$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} \Psi_{11a} & \begin{bmatrix}(C+EK)^{\mathrm{T}}\\ 0\end{bmatrix} & \Psi_{13} & \Psi_{14} & P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\ B_1\end{bmatrix}\\ * & -I & 0 & 0 & D\\ * & * & \Psi_{33} & 0 & 0\\ * & * & * & \Psi_{44} & 0\\ * & * & * & * & -\gamma^2 I\end{bmatrix}. \quad (13)$$

记

$$\begin{aligned}\Psi_{11a} ={}& P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0 & I\\ (A_0 + B_2K) + \sum_{i=1}^{m} A_i & -I\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & I\\ (A_0 + B_2K) + \sum_{i=1}^{m} A_i & -I\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} P +\\ & \sum_{i=1}^{m} h_i \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & A_i^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} R_i \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & A_i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{m} S_i & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} +\\ & \sum_{i=1}^{m}\left(W_i^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0 & 0\\ A_i & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ A_i & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} W_i\right),\end{aligned}\quad (14)$$

$\Psi_{13}, \Psi_{14}, \Psi_{33}, \Psi_{44}$ 已在式(11) 中给出. 下面给出闭环系统(12) 满足鲁棒参数 γ 的充分条件.

定理 1　考虑闭环系统(12), 对于给定的标量 $\gamma > 0$, 若存在 $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ 和形如式(9) 的 P 满足不等式(15), 其中: $P_1 > 0, S_i > 0, W_i, R_i > 0, i = 1, \cdots, m$, 则对于所有非零 $w(t) \in L_2^q[0, \infty)$, 不确定项 $F_1(t)$ 和 $F_2(t)$ 满足式(2) 和(4) 以及 $h_i > 0$, $i = 1, \cdots, m$, 成本函数(5) 小于零.

$$\Psi_a = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Psi_{a12} & \Psi_{a13} & \Psi_{a14} & \Psi_{a15}\\ * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 & \Psi_{a25}\\ * & * & -\epsilon_1\rho_1 I & 0 & 0\\ * & * & * & -\epsilon_2 I & 0\\ * & * & * & * & -\epsilon_2\rho_2 I\end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

其中: Ω_1 已在式(13) 中定义,

$$\Psi_{a12} = [H_{12} + H_{B12}K \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}},$$

$$\Psi_{a13} = \begin{bmatrix}\epsilon_1\rho_1 P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\ H_{11}\end{bmatrix}\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ \Psi_{a14} = \begin{bmatrix}H_{22}^{\mathrm{T}}\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\Psi_{a15} = \begin{bmatrix}\epsilon_2\rho_2 P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\ B_2H_{21}\end{bmatrix}\\ \epsilon_2\rho_2 EH_{21}\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\Psi_{a25} = \epsilon_2\rho_2 H_{B12}H_{21}. \quad (16)$$

证明略

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix}Q_1 & 0\\ Q_2 & Q_3\end{bmatrix}, Q_1 > 0, Y = KQ_1. \quad (17)$$

根据定理 1, 对鲁棒非脆弱问题有下面的结果:

定理 2　考虑系统(1), 如果存在常数 $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$, (17) 中的矩阵 $Q, Q_1 > 0, Y, S_{0i} > 0, R_{0i} > 0, i = 1, \cdots, m$ 满足不等式

$$\Psi_d = \begin{bmatrix} \Omega_d & \Psi_{d12} & \Psi_{d13} & \Psi_{d14} & \Psi_{d15} & \Psi_{d16} & \Psi_{d17}\\ * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 & \Psi_{d25} & 0 & 0\\ * & * & -\epsilon_1\rho_1 I & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\epsilon_2 I & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -\epsilon_2\rho_2 I & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & \Psi_{d66} & 0\\ * & * & * & * & * & * & \Psi_{d77}\end{bmatrix} < 0. \quad (18)$$

其中

$$\Omega_d = \begin{bmatrix} \Phi_{d11} & \begin{bmatrix}(CQ_1 + EY)^{\mathrm{T}}\\ 0\end{bmatrix} & \Phi_{d13} & \Phi_{d14} & \begin{bmatrix}0\\ B_1\end{bmatrix}\\ * & -I & 0 & 0 & D\\ * & * & \Phi_{d33} & 0 & 0\\ * & * & * & \Phi_{d44} & 0\\ * & * & * & * & -\gamma^2 I\end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\Phi_{d11} = \begin{bmatrix} Q_2 & Q_3\\ \sum_{i=0}^{m} A_i Q_1 + B_2 Y - Q_2 & -Q_3\end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} & Q_2 & & Q_3 \\ \sum_{i=0}^{m} A_i Q_1 + B_2 Y - Q_2 & & -Q_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} +$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_i & 0 \end{bmatrix} Q + Q^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_i & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \right),$$

$$\Phi_{d13} = [h_1(\lambda_1 + 1)R_{01} \quad \cdots \quad h_m(\lambda_m + 1)R_{0m}],$$

$$\Phi_{d14} = \left[\lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} S_{01} \quad \cdots \quad \lambda_m \begin{bmatrix} 0 \\ A_m \end{bmatrix} S_{0m} \right],$$

$$\Phi_{d33} = \mathrm{diag}[-h_1 R_{01} \quad \cdots \quad -h_m R_{0m}],$$

$$\Phi_{d44} = \mathrm{diag}[-S_{01} \quad \cdots \quad -S_{0m}], \tag{20}$$

$$\Psi_{d17} = \left[Q^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad Q^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \right],$$

$$\Psi_{d66} = \mathrm{diag}[-h_1 R_{01} \quad \cdots \quad -h_m R_{0m}],$$

$$\Psi_{d77} = \mathrm{diag}[-S_{01} \quad \cdots \quad -S_{0m}],$$

$$R_{01} = R_1^{-1} = \begin{bmatrix} R_{011} & R_{012} \\ R_{012}^{\mathrm{T}} & R_{013} \end{bmatrix},$$

$$S_{0i} = S_i^{-1}, R_{0i} = R_i^{-1}, \tag{21}$$

那么, $K = YQ_1^{-1}$ 解决了鲁棒非脆弱问题.

4 算 例

应用式(1)～(4) 描述的控制器, 取 $m = 1$, $h = 0.9$, $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\gamma = 1$. 令

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.05 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \quad 1], D = 0.1, E_1 = 0.1,$$

$$H_{11} = [0.05 \quad 0.01], H_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.03 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$H_{21} = [0.01 \quad 0.05], H_{22} = 0.02,$$

$$H_{B12} = 0.03.$$

应用定理 2, 控制器增益为

$$K = [-2.6076 \quad -7.9127].$$

5 结 论

本文研究了一类带有不确定性和定常时滞的线性系统鲁棒非脆弱控制问题. 利用线性矩阵不等式(LMI), 给出了时滞依赖的鲁棒非脆弱控制设计方法, 并利用算例证明了该方法的有效性和可行性.

参考文献(References)

[1] Kokame H, Kobayashi H, Mori T. Robust H_∞ Performance for Linear Delay-differential Systems with Time-varying Uncertainties [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(2): 223-226.

[2] Souza C E, Li X. Delay-dependent Robust H_∞ Control of Uncertain Linear State-delayed Systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(9): 1313-1321.

[3] Yang G H, Wang J L. Robust Non-fragile Kalman Filtering for Uncertain Linear Systems with Estimator Gain Uncertainty [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(2): 343-348.

[4] Yang G H, Wang J L, Soh Y C. Robust Guaranteed Cost Control for Discrete-time Linear Systems under Gain Perturbations [J]. *Linear Algebra and Applications*, 2000, 312(1-3): 161-180.

[5] Khargonekar P P, Petersen I R, Zhou K. Robust Stabilizability and Control Theory[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1990, 35(3): 356-361.

[6] Yang G H, Wang J L. Non-fragile H_∞ Control for Linear Systems with Multiplicative Gain Variations[J]. *Automatica*, 2001, 37(5): 727-737.

[7] Famularo D, Abdallah C T, Jadbabaie A, et al. Robust Non-fragile LQ controllers: The Static State Feedback Case [A]. *Proc American Control Conf* [C]. Philadelphia, 1998: 1109-1113.

[8] Yang G H, Wang J L, Soh Y C. Reliable H_∞ Controller Design for Linear Systems[J]. *Automatica*, 2001, 37(5): 717-725.

[9] Fridman E, Shaked U. A descriptor System Approach to H_∞ Control of Linear Time-delay Systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(2): 253-270.

[10] Wang Z, Huang B. Robust H_∞ Observer Design of Linear State Delayed Systems with Parametric Uncertainty: The Discrete Time Case [J]. *Automatica*, 1999, 35(6): 161-167.

[11] Palhares R M, De Souza C E, Peres P L D. Robust H_∞ Filtering for Uncertain Discrete-time State Delayed Systems [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2001, 49(8): 1696-1703.