文章编号: 1001-0920(2006)05-0597-04

一类有约束的分段线性系统双模预测控制

曾 锋[1], 高东杰[1], 李秀改[2]
(1. 中国科学院 自动化研究所, 北京 100080; 2. 清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘 要: 研究分段线性(PL)系统预测控制问题, 提出了PL系统双模预测控制, 并证明了该方法的稳定性. 该方法使用混合逻辑动态系统来建模PL系统, 利用PL系统状态反馈控制来确定PL系统的受控不变集, 并结合双模预测控制方法获得PL系统双模预测控制. 该方法解决了系数矩阵的选择问题, 不需要满足最终状态等式约束. 一个分段线性系统的实例证明了该方法是可行的.

关键词: 分段线性系统; 混合逻辑动态; 状态反馈; 受控不变集; 双模预测控制
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Dual-mode Model Predictive Control for a Class of Constrained Piecewise Linear Systems

ZENG Feng[1], *GAO Dong-jie*[1], *LI Xiu-gai*[2]
(1. Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China; 2. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China. Correspondent: ZENG Feng, E-mail: fengzeng_1977@msn.com)

Abstract: Model predictive control for piecewise linear (PL) system is studied. A dual-model predictive control method for PL system is presented and its stability is proved. The tools employed in this method include modeling PL system by hybrid system based on mixed logical dynamic, using state feedback control to get controlled invariant set of PL system, and dual-mode predictive control. This method solves the problems of choosing coefficient matrices, and it does not need to satisfy a terminal state equality constraint. A PL system example shows that the method is valid and feasible.

Key words: Piecewise linear system; Mixed logic dynamic; State feedback; Controlled invariant set; Dual-mode predictive control

1 引 言

分段线性(PL)系统能够较为精确地表示许多种非线性系统, 并在一定条件下能够等价于很多类混杂系统[1], 因此该系统越来越引起理论界的关注. 但目前关于PL系统控制的研究[2~4]主要集中在最优控制方面, 而关于PL系统预测控制的研究比较少. 在PL预测控制中如何预先确定每一步预测中状态方程的系数矩阵是一个亟待解决的问题. 文献[5]研究了PL系统预测控制, 在MMPS框架下讨论了PL系统预测控制问题, 但其没有考虑算法稳定性的内容. 由文献[6]可知, 基于混合逻辑动态(MLD)的混杂系统可以表示PL系统. 在MLD框架下考虑PL预测控制可避免系数矩阵的选择问题, 但文献[6]仅给出了满足最终状态等式约束的MLD系统预测控制. 本文则在MLD的框架下提出了一种PL系统双模预测控制方法, 该方法解决了系数矩阵的选择问题, 不需要满足最终状态等式约束, 并证明了预测控制的稳定性.

2 PL系统和基于MLD的混杂系统

2.1 PL系统

$$x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k),\quad \text{当 } x(k) \in X_i, \tag{1}$$

收稿日期: 2005-02-28; **修回日期**: 2005-04-20.
基金项目: 中国科学院知识创新工程重大项目(KGCX-SW-15).
作者简介: 曾锋(1977—), 男, 湖北钟祥人, 博士生, 从事混杂系统建模及预测控制的研究; 高东杰(1943—), 男, 辽宁丹东人, 研究员, 博士生导师, 从事多变量预测控制、系统辨识等研究.

$$x(k)\in X,\ u(k)\in U. \tag{2}$$

其中: $\{X_i\}_{i=1}^{S}$ 是系统状态空间的一个多面体划分, 即 $\forall i,j\in I, i\neq j, X_i\cap X_j=\varnothing$, 而且 $\bigcup_{i=1}^{s}X_i=X$; $I=\{1,2,\cdots,s\}$ 是状态子空间的下标集; $x(k)\in R^n$ 是系统状态, $u(k)\in R^p$ 是输入; 系数矩阵 A_i 和 B_i 为恰当维数的矩阵, 并与当前系统的状态有关; 集合 X, U 都包含原点的一个邻域. 定义 Ω 为跳变集,

$$\Omega=\{(j,i):j,i\in I,\ 且\ x(k)\in X_i, x(k-1)\in X_j\}. \tag{3}$$

2.2 基于MLD 的混杂系统

Bemporad 等人[6] 研究了命题逻辑和有约束混合整数线性不等式之间的转换关系, 并在此基础上提出了一种新的混杂系统建模方法, 即基于MLD 的混杂系统建模. 其标准形式为

$$\begin{cases} x(k+1)=Fx(k)+G_1u(k)+\\ \qquad G_2\delta(k)+G_3z(k),\\ E_2\delta(k)+E_3z(k)\leq E_1u(k)+E_4x(k)+E_5. \end{cases} \tag{4}$$

其中: $x(k)\in R^{n_c}\times\{0,1\}^{n_l}$ 为系统的状态矢量, $y(k)\in R^{p_c}\times\{0,1\}^{p_l}$ 为包含连续输出和逻辑输出的输出变量, $u(k)\in R^{m_c}\times\{0,1\}^{m_l}$ 为连续输入和逻辑输入; $\delta(k)$ 和 $z(k)$ 分别为逻辑辅助变量和连续辅助变量; n_l, p_l, m_l 可以为零. 式(4) 中的不等式包含了混合整数不等式和初始的约束条件, $E_i(i=1,\cdots,5)$ 为恰当维数的矩阵.

由文献[1,6] 可知, 系统(1) 可转换为等价的 MLD 系统

$$\begin{cases} x(k+1)=[I_1\quad I_2\quad\cdots\quad I_S]z(k),\\ E_2\delta(k)+E_3z(k)\leq E_1u(k)+E_4x(k)+E_5. \end{cases} \tag{5}$$

其中: $I_1, I_2,\cdots, I_s$ 为恰当维数的单位矩阵; F, G_1, G_2 为 0; $E_1\sim E_5$ 是由约束条件(2) 和命题逻辑转化而来的系数矩阵; $x(k), x(k+1), u(k)$ 的含义不变.

3 PL 系统反馈控制及受控不变集

要进行 PL 系统的双模预测控制必须首先获得相应 PL 系统的一个受控不变集(详见本文第 4 节). 本节所讨论的是如何通过 PL 系统的稳定性分析和状态反馈控制来求得 PL 系统的受控不变集.

3.1 PL 系统稳定性分析及状态反馈

PL 系统的稳定性分析相对于线性系统而言是较为复杂的. PL 系统的稳定性和各个子系统的稳定性并不直接相关[7]. 例如, 构成 PL 系统的各个子系统都是Lyapunov 意义下稳定的, 但整个系统不一定稳定; 相反, 构成 PL 系统的各个子系统不稳定时, 但整个系统却有可能是稳定的. 对整个 PL 系统来说, 如果能够找到一组随时间而减小的二次 Lyapunov 函数, 那么该系统就是Lyapunov 意义下稳定的, 而这组Lyapunov 函数不一定需要连续. 通常使用的方法是针对各个子系统构造多个 Lyapunov 函数, 使Lyapunov 函数有随时间递减的趋势[3,7,8].

引理 1 自治 PL 系统

$$x(k+1)=A_ix(k),\ 当\ x(k)\in X_i,\quad x(k)\in X, \tag{6}$$

如果存在对称的 P_i 满足下列条件:

$$\begin{cases} P_i>0,\ i=1,2,\cdots,s;\\ A_j^{\mathrm T}P_iA_j-P_j<0,\ \forall(j,i)\in\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

那么系统(6) 相对于零点渐近稳定, 并且二次 Lyapunov 函数可表示为

$$V(x(k))=x(k)^{\mathrm T}P_ix(k),\quad x(k)\in X_i, i\in I. \tag{8}$$

证明略.

对于非自治系统(1), 当 $x(k)\in X_j$ 时, 令 $u(k)=K_jx(k)$, 则

$$x(k+1)=(A_j+B_jK_j)x(k). \tag{9}$$

将式(9) 中的系数矩阵代入式(7) 可得

$$\begin{cases} P_i>0,\ i=1,2,\cdots,s;\\ (A_j+B_jK_j)^{\mathrm T}P_i(A_j+B_jK_j)-P_j<0,\\ \qquad\forall(j,i)\in\Omega \end{cases} \tag{10}$$

为了求解方便, 式(10) 可转化为如下线性矩阵不等式[8]:

$$Q_i>0,\ i=1,2,\cdots,s; \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} Q_i & A_jQ_j+B_jY_j\\ (A_jQ_j+B_jY_j)^{\mathrm T} & Q_j \end{bmatrix}>0,\quad \forall(j,i)\in\Omega, \tag{12}$$

其中

$$Q_i=P_i^{-1},\ Y_i=K_iQ_i. \tag{13}$$

3.2 PL 系统受控不变集

定理 1 若 P_i, K_i 满足式(9) 和(10), 集合

$$W=\{x\,|\,x^{\mathrm T}P_ix<\xi,\ \text{when}\ x\in X_i\},$$

且 $W\in X\cap\{x\,|\,K_ix\in U, \text{when}\ x\in X_i\}$, 那么集合 W 为系统(1) 的一个受控不变集.

证明 由 W 的定义可知集合 W 满足系统的约束条件(2), 令 $x(k)\in W$, 且 $x(k)\in X_j$, 则

$$x(k+1)=(A_j+B_jK_j)x(k).$$

分两种情况考虑:

1) 若 $x(k+1)\in X_j$, 则由式(10) 可知 $(A_j+B_jK_j)^{\mathrm T}P_j(A_j+B_jK_j)-P_j<0$. 又因为 $x(k)^{\mathrm T}P_jx(k)<\xi$, 所以 $x(k+1)^{\mathrm T}P_jx(k+1)<\xi$

因此 $x(k+1)\in W$.

2) 当 $x(k+1)\in X_i$ 时, 同理可证

因此, W 为 PL 系统(1) 的受控不变集 □

4 PL 系统双模预测控制

4.1 普通 PL 系统预测控制存在的问题

令 PL 预测控制的调节目标为 $x=0$, 则 PL 普通预测控制形式为

$$\min_{\{u_t^{T-1}\}} J(u_t^{T-1}, x_t) = \min \sum_{k=0}^{T-1} L(x(k), u(k)), \tag{14}$$

其中

$$L(x(k), u(k)) = x(k)'Qx(k) + u(k)'Ru(k), \tag{15}$$

并满足条件

$$\begin{cases} x(T)=0,\ x(0)=x_t, \\ x(k+1)=A_ix(k)+B_iu(k),\ 当\ x(k)\in X_i, \end{cases} \tag{16}$$

以及约束条件(2). 其中: Q 为正定对称矩阵, R 为非负定对称矩阵; $u_t^{T-1}=\{u(0)\quad u(1)\quad\cdots\quad u(T-1)\}$. 每一步优化中求出 u_t^{T-1}, 并将第一个值代入系统获得下一个时刻的状态值, 重复这个过程便可获得 PL 系统预测控制. 然而这种形式的 PL 系统预测控制存在两个问题:

1) 每一时刻系数矩阵 A_i, B_i 都与当前时刻的状态有关, 而在预测控制中无法预先知道当前时刻的状态属于哪个状态子空间, 也就无法在预测控制中预先选择系数矩阵, 并用之预测. 因此如何预先确定每一步的系数矩阵是首先需要解决的问题.

2) 在这里预测控制的稳定性是由最终等式约束 $x(T)=0$ 来保证的. 但最终等式约束有时难以满足, 有时需要较长的预测区间. 预测区间过长则不能在规定的时间内获得下一步的预测输出, 从而导致预测控制算法失效.

4.2 双模 PL 系统预测控制解决方案

为解决上述两个问题, 本文提出了 PL 系统双模预测控制的方法. 该方法相对普通 PL 预测控制有以下两个方面的改进:

1) 利用 MLD 系统的形式来完成 PL 系统的预测控制. 由本文第 2 节可知, PL 系统可表示成 MLD 系统形式, MLD 系统预测控制中可避免系数矩阵的直接选择问题(这些问题可转化为 MLD 方程中逻辑变量的选择, 最终归结为整数规划问题).

2) 本文引入了双模预测控制[9,10]的方法, 该方法不要求满足最终状态等式约束, 而是要求最终状态 $x(T)\in W$, 其中 $W\in R^n$ 是一个包含原点的受控不变集. 双模预测控制算法的原理是采用普通预测控制算法把状态调节进入 W, 当状态 $\in W$ 时使用一个局部稳定的控制器.

为引入双模预测控制, 首先给出假设条件:

A1: 对于系统(1) 存在满足定理 1 的受控不变集合 W 及局部稳定的控制器 K_i;

A2: 当 $x(k)\in W$ 时代价函数 $L=0$, 若 $x(k)\notin W$, 代价函数 L 满足(15) 中的定义.

在 MLD 建模框架下, PL 双模预测控制公式的代价函数仍为(14), 约束条件(16) 通过 MLD 转化以及引入不变集 W 可改为如下形式:

$$\begin{cases} x(T)\in W, \\ x(0)=x_t, \\ x(k+1)=Fx(k)+G_1u(k)+ \\ \qquad G_2\delta(k)+G_3z(k), \\ E_2\delta(k)+E_3z(k)\le E_1u(k)+E_4x(k)+E_5. \end{cases} \tag{17}$$

PL 系统双模预测控制算法

Step 1: 初始化 $t=0$, x_t, 确定预测区间 T,
if $x_t\in W$, then goto Step 3,
else 采用式(14) 和(17) 求解混合整数二次规划问题, 得到 u_0^{T-1}, 令 $u_0=u(0|0)$.

Step 2: $t>0$,
if $x_t\in W$, then goto Step 3,
else 采用式(14) 和(17) 求解混合整数二次规划问题, 得到 u_t^{T-1}, 令 $u_k=u(k|k)$.

Step 3: $x_t\in W$, 采用局部稳定的控制器 K_i, 直到达到控制目标.

定理 2 $F\in X$ 是一个状态集 $\forall x_0\in F$, 若存在一个控制序列 u_t^{T-1} 使得式(14) 和(17) 成立, 那么上述 PL 系统双模预测控制算法在状态集 F 中渐近稳定.

证明 $\forall x_0\in F$, 分以下两种情况讨论:

1) 若 $x_0\in W$, 由假设 A1 可知, 存在局部稳定的控制器 $K_ix\in U$ 使得系统渐近稳定.

2) 若 $x_0\notin W$, 首先假设系统经过无限步控制作用仍然没有进入不变集 W. 令

$$V(x_k)=\min_{\{u_k^{T-1}\}} J(u_k^{T-1}, x_k),$$

x_{k+1} 为 x_k 经最优控制 u_k^* 作用下的下一个值. 由假设条件 A2 可知

$$V(x_{k+1})\le V(x_k)-L(u_k^*, x_k).$$

又因为所有状态 $\notin W$, 而 W 包含原点的一个邻域 $\|x\|\le r$, 所以任意一个 $\|x_k\|>r$. 由式(15) 可知 L 为一个 K 函数, 因此 $L(u_k^*, x_k)\ge Kr$. 所以

$V(x_k)$ 随着 k 的增加而减少，每次至少减少 Kr. 又因为由假设可知，系统经过无限步控制作用仍然没有进入 W，所以 $V(x_k)$ 随着 k 的增加将会趋向于负无穷大，这与 $V(x_k) \geq 0$ 矛盾. 因此经过有限步控制作用后，系统的状态 $x_k \in W$.

由上可知 $\forall x_0 \in F$，PL 双模预测控制相对于零点是渐近稳定的. □

5 系统仿真

考虑分段线性系统

$$x(k+1) = \begin{cases} A_1 x(k) + B_1 u(k), \\ \quad \text{当}[0 \quad 1]x(k) \geq 0; \\ A_2 x(k) + B_2 u(k), \\ \quad \text{当}[0 \quad 1]x(k) < 0. \end{cases} \tag{18}$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.1 & 0.8 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.3 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, u(k) \in [-1 \quad 1],$$

$$x(k) \in [-20, 20] \times [-20, 20].$$

寻找受控不变集：由式(9)～(13)可求得，在公共 Lyapunov 函数下获得稳定的局部反馈控制器为

$$K_1 = [0.2 \quad -1.6], K_2 = [-1.6 \quad -1.2],$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.8135 & -0.0801 \\ -0.0801 & 0.6387 \end{bmatrix}, \xi = 0.1653.$$

不变集等高线如图 1 所示.

双模预测控制：令初始点 $x_0 = [2 \quad -2]'$，$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$，$R = 2$，调节目标为 $x_t = [0 \quad 0]'$. 取预测区间 $T = 5$. 采用双模预测算法得到结果如图 2 所示.

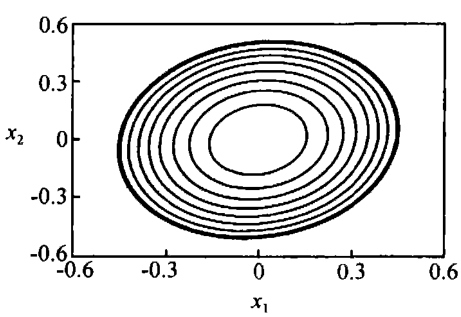

图 1 满足条件的受控不变集

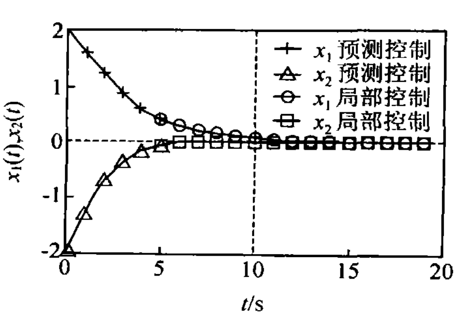

图 2 双模控制

6 结 语

本文详细分析了 PL 系统的稳定性和状态反馈控制，并在此基础上提出了 PL 系统的双模预测控制，最后通过一个分段线性系统的实例证明了 PL 双模预测控制的方法是可行的. 目前关于 PL 系统的预测控制研究并不成熟，例如最终惩罚项的确定，求解局部稳定控制器时如何考虑区域约束条件，如何有效地确定最大受控不变集等，这些问题都有待于进一步研究.

参考文献(References)

[1] Heemels W P M H, De Schutter B, Bemporad A. Equivalence of Hybrid Dynamical Models [J]. *Automatica*, 2001, 37(7): 1085-1091.

[2] 翟海峰，苏宏业，董大利，等. 一类分段线性混杂系统的最优控制研究[J]. *控制与决策*, 2002, 17(11): 863-866.
(Zhai H F, Su H Y, Dong D L, et al. Study on Optimal Control Strategy for a Class of Piecewise Linear Hybrid System [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(11): 863-866.)

[3] Rantzer A, Johansson M. Piecewise Linear Quadratic Optimal Control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(4): 629-637.

[4] Imura Jun-ichi. Optimal Control of Sampled-data [J]. *Automatica*, 2004, 40(4): 661-669.

[5] De Schutter B, Van Den Boom T J J. MPC for Continuous Piecewise Affine Systems [J]. *Systems and Control Letters*, 2004, 52(3): 179-192.

[6] Bemporad A, Morari M. Control of Systems Integrating Logic, Dynamics and Constraints [J]. *Automatica*, 1999, 35(3): 407-427.

[7] Branicky M S. Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(4): 475-482.

[8] Domenico Mignone, Giancarlo Ferrari-Trecate, Manfred Morari. *Stability and Stabilization of Piecewise Affine and Hybrid Systems: An LMI Approach* [R]. Switzerland: Swiss Federal Institute of Technology, 2002.

[9] Michalska H, Mayne D Q. Robust Receding Horizon Control of Constrained Nonlinear Systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 38(11): 1623-1632.

[10] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V. Constrained Model Predictive Control: Stability and Optimality [J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789-814.