第21卷 第5期 | 控 制 与 决 策 | 2006年5月
Vol 21 No. 5 | *Control and Decision* | May 2006

文章编号: 1001-0920(2006)05-0508-05

基于相干控制的二能级量子系统退相干抑制

张 靖, 李春文
(清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘 要: 对于二能级开放量子系统, 研究了利用相干控制抑制退相干效应的问题. 首先讨论了二能级开放量子系统在相干控制下的建模问题, 将退相干抑制归结为与环境噪声解耦的控制问题. 然后, 引入开环控制抑制退相干, 并证明该控制可使系统状态中的部分分量与环境噪声渐近解耦. 最后引入反馈控制, 使得系统状态的相应分量可以与环境精确解耦, 同时能够避免测量引入的量子噪声的影响.

关键词: 量子控制; 退相干控制; 量子反馈控制
中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Decoherence Suppression of Two-level Quantum Systems Based on Coherent Control

ZHANG Jing, LI Chun-wen
(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China. Correspondent: ZHANG Jing, E-mail: zhangjing97@mails. tsinghua. edu. cn)

Abstract: The decoherence suppression issue is studied for two-level quantum systems based on coherent control strategy. The model of two-level open quantum systems under coherent control is formulated, in which the decoherence suppression is equivalent to the decoupling problem of the system from environmental noises. Then, an open-loop control is designed to suppress decoherence, which is shown to be capable of asymptotically decoupling a part of the dynamic variables of the system from the environmental noises. Finally, feedback control strategy is introduced so that the corresponding state variables can be precisely decoupled form the environmental noises without being affected by the noises induced by quantum measurement in feedback control.

Key words: Quantum control; Decoherence control; Quantum feedback control

1 引 言

近年来, 量子信息技术[1]由于其可预见的应用价值(如具有更强大计算能力的量子计算技术[2]以及具有更强保密性的量子通讯技术[1]), 越来越受到人们的重视. 目前量子信息技术物理实现尚存在很多困难, 退相干效应就是其中的重要瓶颈. 退相干效应是由于量子系统与环境之间的相互作用破坏量子态的相干性, 导致量子态向经典态转化的效应. 由于量子信息技术建立在量子态相干性的基础上, 因此对退相干的抑制就相当关键.

目前已有多种方法抑制退相干效应. 量子纠错码[3]和量子避错码[4], 依靠引入冗余量子比特, 采用编码的方法纠正退相干引起的错误. BangBang 控制方法[5]通过引入超高频的脉冲实现系统与环境演化过程的解耦. 此外最优控制方法[6,7]也得到了应用. 文献[8]利用开环控制研究了在量子计算领域广泛采用的二能级量子系统的退相干抑制问题, 给出的控制律保证系统状态中的部分分量与环境解耦. 但由于设计开环控制需要求解微分方程, 因此控制律的形式比较复杂, 而且为了使得微分方程可以解析求解, 需要加入严格的假设条件.

本文研究二能级量子系统的退相干抑制问题,

收稿日期: 2005-05-08; **修回日期**: 2005-11-21.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60274025, 60433050); 清华大学基础研究基金项目(200312006).
作者简介: 张靖(1978—), 男, 北京人, 博士生, 从事量子控制、稳定性理论研究; 李春文(1957—), 男, 河南武陟人, 教授, 博士生导师, 从事量子控制、非线性控制等研究.

在渐近意义或反馈控制下给出更简单实用的结果.

2　基于Markov 近似的开放量子系统相干控制模型

二能级量子系统的状态通常用复希尔伯特空间 C^2 中的状态矢量 $|\psi\rangle$ 描述. 选定 C^2 的基后, 状态矢量可按此基线性展开. 在研究开放系统时, 系统可能处于混合态, 即以 p_i 的概率处在 $|\psi_i\rangle$ 态上, 其中 p_i 满足 $\sum_j p_i = 1, p_i \geq 0$. 混合态需要用密度算符

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

来描述, 其中 $\langle\psi_i|$ 是 $|\psi_i\rangle$ 的共轭转置, 可理解为行向量. 易见在选定 C^2 的基后, ρ 可表示为 2×2 半正定厄米矩阵, 又称为密度矩阵. 密度矩阵满足概率归一条件 $\mathrm{tr}\rho = 1$.

系统与环境相互作用的基本物理模型是系统与环境所组成的总系统的薛定谔方程. 然而环境通常是无穷维的大系统(如具有无穷模态的电磁场组成的热库), 对于系统与环境组成的高维系统的研究是非常困难的. 由于人们只关心系统的演化行为, 因此常常将总系统状态中环境的部分平均掉. 在Born 近似, Markov 近似以及旋波近似等物理近似[9] 下, 由总系统的薛定谔方程得到系统演化的主方程模型为

$$\mathring{\rho} = - i[H, \rho] + \sum_j \Gamma_j D[L_j]\rho, \qquad (1)$$

其中: 密度矩阵 ρ 代表系统的状态; H, L_j 分别是 2×2 厄米矩阵和一般的复矩阵, 分别代表系统的哈密顿量和与环境作用的机制. $[A, B] = AB - BA$ 为矩阵空间上的Lie 括号运算. $\sum_j \Gamma_j D[L_j]\rho$ 项中的指标 j 代表可能影响系统的噪声通道, $\Gamma_j > 0$ 代表噪声强度, $D[L_j]$ 则是作用在 ρ 上的超算符, 即

$$D[L_j]\rho = \frac{1}{2}\{[L_j, \rho L_j^+] + [L_j\rho, L_j^+]\}. \qquad (2)$$

对量子系统的控制通常是通过外加光场或电磁场与系统的某些力学量发生相互作用而加入的. 在半经典近似下, 这相当于把一些哈密顿量 H_i 加入系统原来的哈密顿量中以改变系统的能量. 由于这种控制方式保持系统的相干性不变, 因此称为相干控制. 在相干控制下系统哈密顿量 H 表示为

$$H = H_0 + \sum_i u_i H_i,$$

其中: H_0 代表系统自由演化哈密顿量, H_i 为第 i 个控制哈密顿量, 控制 $u_i(t) \in R$ 代表相应的光场或电磁场的强度.

注意到如果将哈密顿量 $\overline{H}_0 = H_0 - (\mathrm{tr}H_0)I$ 和 $\overline{H}_i = H_i - (\mathrm{tr}H_i)I$ 代入方程(1) 不会影响方程形式, 因此不妨设 $\mathrm{tr}H_0 = \mathrm{tr}H_i = 0$.

控制方程(1) 是复矩阵空间上的微分方程, 为便于分析, 将其转化为实向量空间上的控制模型. 首先可以定义复矩阵空间 $C^{2\times2}$ 上的矩阵内积为 $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^+B)$. 在这个内积下可以找到一组正交基 $\{I, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$, 其中: I 为 2×2 单位阵, Σ_i 是 2×2 厄米矩阵, 且满足 $\mathrm{tr}\Sigma_i = 0$. 任意 2×2 复矩阵可以在这组基下线性展开, 特别地有

$$\rho = \frac{1}{2}I + m_x\Sigma_1 + m_y\Sigma_2 + m_z\Sigma_3, \qquad (3)$$

其中: $(m_x, m_y, m_z)^{\mathrm{T}} \in R^3$ 可以看作密度矩阵 ρ 在矩阵基下的坐标, 矩阵 I 前的系数为 $\frac{1}{2}$ 是因为密度矩阵概率归一条件 $\mathrm{tr}\rho = 1$. 将方程(1) 中的各个矩阵在矩阵基下展开, 可将(1) 转化为 R^3 上的控制方程[10]

$$\mathring{m} = O_0 m + \sum_i u_i O_i m + Dm + g. \qquad (4)$$

其中: $m = (m_x, m_y, m_z)^{\mathrm{T}}$; O_0, O_i 分别为 $-iH_0$ 和 $-iH_i$ 在矩阵基下的伴随表示矩阵; D 为半负定矩阵; g 为常值向量.

为方便起见, 通常选取能量表象, 即取 C^2 的基为 H_0 的特征向量 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$. 同时选取矩阵基中的矩阵为

$$\Sigma_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_2| + |\psi_2\rangle\langle\psi_1|,$$
$$\Sigma_2 = - i|\psi_1\rangle\langle\psi_2| + i|\psi_2\rangle\langle\psi_1|,$$
$$\Sigma_3 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| - |\psi_2\rangle\langle\psi_2|.$$

在能量表象下, Σ_i 表示为泡利矩阵

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \Sigma_2 = \begin{bmatrix} & -i \\ i & \end{bmatrix}, \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}.$$

在能量表象下 H_0 为对角矩阵, 同时注意到已经假设 $\mathrm{tr}H_0 = 0$, 容易得出 $H_0 = \omega\Sigma_3$, 其中 $\omega \in R$ 在物理上代表自由演化系统的固有振荡频率. 由 Σ_i 的矩阵表示形式可知, 在能量表象下, 式(3) 中 m_x, m_y 决定了密度矩阵非对角元的大小, 而 m_z 决定了密度矩阵两个对角元之差的大小. 另外, 由能量表象下密度矩阵非对角元和对角元的物理意义可知, m_x 和 m_y 反映了量子态的相干性, 而 m_z 反映了量子态的能级分布情况.

为便于分析, 引入如下假设:

A1　可控性假设. 如下封闭系统强可控[7, 10]:

$$\mathring{\rho} = - i\left[H_0 + \sum_i u_i H_i, \rho\right],$$

充分地, 要求控制哈密顿量 $\{H_i\}$ 张成的Lie 代数为 $su(2)$, 选取 $H_1 = \Sigma_1, H_2 = \Sigma_2$ 可以满足这一条件.

引入这个假设的目的是要求尽可能大地发挥相干控制的能力.

A2　(O) 条件假设, 即

$$[O_0, D] = 0, O_0 g = 0. \qquad (5)$$

(O) 条件假设的物理意义在文献[7]中进行了讨论, 它是为了保证在退相干作用下系统稳态密度矩阵在能量表象下非对角元完全消失. 由于密度矩阵在能量表象下的非对角元在某种程度上反映了量子态的相干性, 因此, (O) 条件假设意味着量子态的相干性在环境作用下最终完全被破坏掉.

在A1,A2假设下, 式(4)可表示为

$$\dot{m} = \omega O_z m + u_x O_x m + u_y O_y m + Dm + g, \quad (6)$$

其中矩阵

$$O_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, O_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$O_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

而 $D = \mathrm{diag}(-d_x, -d_x, -d_z)$, $g = (0, 0, g_z)$, 其中对角元 $d_x, d_z \geq 0$.

事实上注意到 O_0, O_1, O_2 分别是 $\omega\Sigma_3, \Sigma_1, \Sigma_2$ 在基 $\{I, \Sigma_i\}$ 下的伴随表示矩阵, 可以验证 $O_0 = \omega O_z, O_1 = O_x, O_2 = O_y$. 根据 $[O_0, D] = 0$ 可以验证 D 为对角阵, 且前两个对角元相等. 又 $D \leq 0$, 可知 D 对角元非正. 同理由 $O_0 g = 0$ 可验证 g 向量前两个分量为 0.

3　开环相干控制抑制退相干

方程(6)中 $Dm + g$ 为退相干作用项, 一般来讲该项会对系统动态产生破坏作用(如在(O)条件假设下, 由于这一项的作用, 量子态相干性最终被完全破坏). 本文设计控制的目的是选取 u_x, u_y 使得(6)所产生的动态过程与系统自由演化过程 $\dot{m} = O_0 m$ 相同. 文献[10]指出, 形如(6)的开放量子控制系统是不可控的, 这意味着退相干作用无法被相干控制完全抵消. 不过, 下面的研究将表明, 适当设计的控制可以使得量子系统动态的某些分量仍保持相干演化, 而不受环境噪声的影响.

在介绍主要结果之前, 首先引入一个关于时变线性系统稳定性的引理[11].

引理 1　对于时变线性系统

$$\dot{x} = A(t)x, x(t_0) = x_0,$$

若存在方阵 $Q(t)$ 以及正数 η, ρ, v 满足

$$\eta I \leq Q(t) \leq \rho I,$$

$$A^{\mathrm{T}}(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \dot{Q}(t) \leq -vI,$$

则可以对时变线性系统的解给出估计式

$$|x|^2 \leq \frac{\rho}{\eta} e^{-\frac{v}{\rho}(t-t_0)} |x_0|^2.$$

定理 1　设 $m(t_0) = (m_{x_0}, m_{y_0}, m_{z_0})^{\mathrm{T}}$ 是系统演化初态, 则系统自由演化方程 $\dot{m} = O_0 m$ 的解表示为

$$\begin{cases} m_x^0(t) = m_{x_0}\cos\omega(t - t_0) - m_{y_0}\sin\omega(t - t_0), \\ m_y^0(t) = m_{x_0}\sin\omega(t - t_0) + m_{y_0}\cos\omega(t - t_0), \\ m_z^0(t) = m_{z_0}. \end{cases}$$

若方程(6)满足: 1) $D < 0$; 初态满足: 2)

$$m_{x_0}^2 + m_{y_0}^2 = r_0^2 \leq \frac{g_z^2}{4d_x d_z},$$

在控制律

$$u_x = -\frac{d_x}{m_z^\infty} m_y^0(t), u_y = \frac{d_x}{m_z^\infty} m_x^0(t), \quad (7)$$

作用下, 方程(6)的解渐近趋向于稳态解

$$m_x^\infty(t) = m_x^0(t), m_y^\infty(t) = m_y^0(t),$$
$$m_z^\infty(t) = m_z^\infty, \quad (8)$$

其中　$m_z^\infty = \dfrac{g_z + \sqrt{g_z^2 - 4d_z d_x r_0^2}}{2d_z}$.

证明　将控制(7)代入方程(6). 注意到方程(6)任意两个初值分别为 m_0^1, m_0^2 的解 $m^1(t), m^2(t)$, 其差 $m^1(t) - m^2(t)$ 应该是如下时变线性系统的解:

$$\dot{x} = (D + \omega O_z + u_x O_x + u_y O_y)x,$$

且初值为 $m_0^1 - m_0^2$. 由引理1, 取 $Q = I, \eta = \rho = 1, v = d_{\min}$, 其中 $-d_{\min} < 0$ 是 D 的最大特征根. 可以验证, 引理1中的条件得到满足, 从而可以给出估计式

$$|m^1 - m^2| \leq e^{-d_{\min}(t-t_0)} |m_0^1 - m_0^2|.$$

由此知, 当 $t \to \infty$ 时,

$$m^1(t) - m^2(t) \to 0.$$

另一方面, 可以验证在控制(7)作用下(8)是(6)的一组初值解(初值为 $(m_{x_0}, m_{y_0}, m_z^\infty)^{\mathrm{T}}$). 因此, (6)以 $m(t_0) = (m_{x_0}, m_{y_0}, m_{z_0})^{\mathrm{T}}$ 为初值的初值解渐近收敛于(8)给出的解. □

定理1指出密度矩阵 ρ 的分量 m_x, m_y 在渐近意义下可以保持相干演化. 注意到 m_x, m_y 反映了量子态的相干性, 因此定理1意味着在渐近意义下量子态相干性可以得到保持. 定理1中的条件1)是为保证渐近收敛性而引入的条件, 可以验证量子计算中广泛应用的3种退相干模型[1]中, 振幅退相干和退极化退相干满足此条件, 而相位退相干则不满足. 条件2)在物理上相当于对初始状态相干性加入的限制, 要求初始相干性小于某个阈值, 否则定理1中给出的控制策略失效. 阈值的大小只与退相干作用项有关, 而与系统自由演化部分无关.

文献[8]中讨论了与本文相似的问题, 不同之处在于[8]的目标是 m_x, m_y 与环境噪声精确解耦. 由于需要对时变线性系统(6)严格求解, 这一般是做不到的, 因此[8]在讨论过程中引入了一个很强的假设, 即要求 $m_x^0(t), m_y^0(t)$ 始终保持为常数. 即便

如此, 得到的控制律形式也很复杂. 而本文方案考虑的是渐近解耦的问题, 因此可以放松对 $m_x^0(t), m_y^0(t)$ 的限制, 只需初值落在给定范围内即可. 更具有实际意义的是, 这里给出的控制律表现为正弦形式, 它不仅简单, 而且是在已有的实验技术(例如核磁共振技术) 中经常采用的基本驱动形式.

根据定理 1 可以得到如下推论:

推论 1　若物理量 A 满足 $\mathrm{tr} A H_0 = 0$, 则在定理 1 中给出的相干控制下, A 的均值 $a(t) = \mathrm{tr} A\rho(t)$ 演化过程与环境噪声渐近解耦.

证明　二能级量子系统中的物理量 A 可表示为 2×2 厄米矩阵, 从而可按矩阵基 $\{I, \Sigma_i\}$ 展开为 $A = a_0 I + a_1\Sigma_1 + a_2\Sigma_2 + a_3\Sigma_3$, 根据矩阵基的正交性可知

$$a_3 = \mathrm{tr} A\Sigma_3 = \frac{1}{\omega}\mathrm{tr} A H_0 = 0,$$

所以 $A = a_0 I + a_1\Sigma_1 + a_2\Sigma_2$. 由此知

$$a(t) = a_0 + a_1 m_x(t) + a_2 m_y(t).$$

由于在定理 1 中给出的控制律作用下, m_x, m_y 与环境噪声渐近解耦, 因此在相同控制律下, $a(t)$ 演化过程与环境噪声渐近解耦, 即 $a(t)$ 渐近趋向于自由演化 $a^0(t) = a_0 + a_1 m_x^0(t) + a_2 m_y^0(t)$. □

4　反馈控制抑制退相干

由于开环控制不具备足够的抗干扰性和鲁棒性, 因此考虑引入反馈控制. 与经典系统不同, 对量子系统进行反馈控制存在本质的困难: 根据量子力学的基本原理, 反馈过程中所需的量子测量会在系统中引入附加的不可忽略的量子噪声, 在设计控制律时必须同时考虑抑制这类噪声.

假设被测物理量为 A, 对其进行连续测量所对应的系统演化方程可表示为[12]

$$d\rho = -i[\omega\Sigma_3 + u_x\Sigma_1 + u_y\Sigma_2, \rho]\mathrm{d}t + \sum_j \Gamma_j D[L_j]\rho\mathrm{d}t + \Gamma_A D[A]\rho\mathrm{d}t + \sqrt{\eta\Gamma_A}\,\mathcal{H}[A]\rho\mathrm{d}W. \tag{9}$$

上式最后两项代表测量引入的量子噪声项, 其中 $D[A]\rho$ 同式(2) 定义; $\Gamma_A > 0$ 表示测量强度; $0 < \eta < 1$ 代表测量效率; $\mathcal{H}[A]\rho = A\rho + \rho A - \mathrm{tr}(A\rho + \rho A)\rho$; 测量噪声 $\mathrm{d}W$ 为标准的 Wiener 过程, 即

$$E(\mathrm{d}W) = 0, E((\mathrm{d}W)^2) = \mathrm{d}t,$$

其中 $E(\cdot)$ 是对随机过程取平均.

方程(9) 描述的是单次测量中量子态的演化行为. 由于含有随机项, 对其控制需要涉及随机控制理论, 分析比较复杂. 本研究为避开这个困难, 考虑对多次测量结果取平均(相当于在(9) 中对随机过程取平均). 这时, (9) 可简化为如下主方程模型:

$$\dot\rho = -i[\omega\Sigma_3 + u_x\Sigma_1 + u_y\Sigma_2, \rho] + \sum_j \Gamma_j D[L_j]\rho + \Gamma_A D[A]\rho. \tag{10}$$

式(10) 从物理上描述了在测量和环境噪声作用下量子系综的平均演化行为. 对其进行分析和控制在量子光学[13] 等领域是有一定意义的.

在本设计方案中考虑对 $A = \Sigma_3$ 测量. 这样(10) 在矩阵基 $\{I, \Sigma_i\}$ 下表示为

$$\dot m = \omega O_z m + u_x O_x m + u_y O_y m + (D + \Gamma_A O_z^2)m + g. \tag{11}$$

对 Σ_3 连续测量的输出结果为 $m_z(t) = \mathrm{tr}\rho\Sigma_3$, 它可用于设计反馈控制律 u_x, u_y.

定理 2　设 $m(t_0) = (m_{x_0}, m_{y_0}, m_{z_0})^{\mathrm{T}}$ 是系统演化初态. 若满足条件:

1) $d_z \neq 0$;

2) $m_{x_0}^2 + m_{y_0}^2 = r_0^2 \leq \dfrac{g_z^2}{4(d_x + \Gamma_A)d_z}$;

3) 当 $g_z > 0$ 时, 要求 $m_{z_0} > \bar m_z^-\ (> 0)$;

当 $g_z \leq 0$ 时, 要求 $m_{z_0} < \bar m_z^+\ (\leq 0)$;

其中

$$\bar m_z^{\pm} = \frac{g_z \pm \sqrt{g_z^2 - 4d_z(d_x + \Gamma_A)r_0^2}}{d_z},$$

则在控制律

$$u_x = -\frac{d_x + \Gamma_A}{m_z(t)} m_y^0(t), \quad u_y = \frac{d_x + \Gamma_A}{m_z(t)} m_x^0(t) \tag{12}$$

作用下, (11) 的解的前两个分量完全与环境解耦, 即

$$m_x(t) = m_x^0(t), m_y(t) = m_y^0(t). \tag{13}$$

而 $m_z(t)$ 在 $g_z > 0$ 时趋向于稳态 $\bar m_z^+$, 在 $g_z \leq 0$ 时趋向于稳态 $\bar m_z^-$.

证明　方程(11) 按分量形式可写为如下方程组:

$$\begin{cases} \dot m_x = -\omega m_y + u_y m_z - (d_x + \Gamma_A)m_x, \\ \dot m_y = \omega m_x - u_x m_z - (d_x + \Gamma_A)m_y, \\ \dot m_z = u_x m_y - u_y m_x - d_z m_z + g_z. \end{cases} \tag{14}$$

容易验证, (13) 在控制(12) 下是(14) 中前两式的精确解, 因此系统状态的 x 和 y 分量精确与环境噪声解耦. 将(12), (13) 代入(14) 最后一式得到

$$m_z\dot m_z = -d_z m_z^2 + g_z m_z - (d_x + \Gamma_A)r_0^2. \tag{15}$$

方程(15) 可以分离变量, 但一般不能够显式解出 $m_z = m_z(t)$, 因此需要对其进行定性分析.

注意到在条件 1) 下等式右侧一定是二次多项式, 在条件 2) 下这个多项式定有两个解 $\bar m_z^+$ 和 $\bar m_z^-$, 因此(15) 可进一步写作

$$m_z\dot m_z = -d_z(m_z - \bar m_z^+)(m_z - \bar m_z^-). \tag{16}$$

由条件 3), 当 $g_z > 0$ 时, $m_{z_0} > \overline{m}_z^- > 0$, 此时可以分成两种情况: $m_{z_0} > \overline{m}_z^+$ 和 $\overline{m}_z^+ > m_{z_0} > \overline{m}_z^-$. 在第 1 种情况中, 从初值 m_{z_0} 出发的轨迹 $m_z(t)$ 在演化过程中保持 $m_z > \overline{m}_z^+ > 0, \mathring{m}_z < 0$, 即 $m_z(t)$ 单调减, 并最终趋向于稳态 $\overline{m}_z^+$. 在第 2 种情况中, $m_z(t)$ 在演化过程中保持 $\overline{m}_z^+ > m_z > \overline{m}_z^-, \mathring{m}_z > 0$, 即 $m_z(t)$ 单调增, 并最终趋向于稳态 $\overline{m}_z^+$.

对于 $g_z \leq 0$ 的情况, 类似的讨论可知此时 $m_z(t)$ 趋向于稳态 $\overline{m}_z^-$. □

注意到式(15) 可以分离变量, 因此尽管不能写出显示解 $m_z = m_z(t)$, 却可得到 $t = t(m_z)$ 的形式 按这种形式对(15) 的解进行分析可知, 当条件 1)～3) 不满足时, (15) 给出的解或者发散或者只能向负的时间方向演化, 这些解显然不符合物理要求, 因此在定理 2 的控制策略下, 条件 1)～ 3) 是必要的

与定理 1 中的条件 2) 相同, 定理 2 中的条件 2) 可理解为是对初始相干性所作的限制, 要求其小于某个阈值 与定理 1 相比, 这个阈值还与测量强度 Γ_A 有关

由于 m_z 反映了能量表象下密度矩阵对角元之差的大小, 而密度矩阵对角元表示状态在两个能级的分布情况, 因此条件 3) 是关于初始能级分布所作的限制 条件 3) 的两种情形中均要求初始分布中两能级的分布相差应足够大

与文献[8] 中给出的开环策略相比, 这里给出的控制律中 $m_z(t)$ 通过测量得到, 而不需要通过求解微分方程得到, 从而避免了[8] 中为了解析求解微分方程而引入的很强的假设条件, 控制律的形式也更便于物理实现 与上节给出的开环控制方案相比, 这里给出的反馈控制使得 m_x, m_y 分量与环境噪声精确而非渐近解耦, 因此大大提高了系统的控制精度和动态响应速度, 这在实际应用(例如量子计算机的算法实现) 中是非常关键的

类似推论 1 可知, 在定理 2 的假设条件下, 利用反馈控制, 可以使满足 $\mathrm{tr}AH_0 = 0$ 的物理量 A 演化过程与环境噪声精确解耦

5 结 语

本文讨论了二能级量子系统的退相干抑制问题 应用开环相干控制抑制环境噪声产生的退相干, 使得部分系统状态分量可以实现与环境渐近解耦, 并给出了一般力学量与环境渐近解耦的一个充分条件 在此基础上引入反馈控制, 以实现该部分系统状态分量与环境的精确解耦, 避免了开环控制设计中对微分方程的求解, 使得控制律更易于实现

对于一般的 N 能级量子系统(包括多比特量子系统) 的退相干抑制问题, 可以利用李代数 $su(N)$ 的 Cartan 分解理论将这种方法进行推广 此外, 本文关于反馈控制的讨论还只是一些初步的结论, 尚不涉及对于反馈控制鲁棒性的讨论, 所有这些问题有待于进一步的研究

参考文献(References)

[1] Nielsen M A, Chuang I L. *Quantum Computation and Quantum Information* [M]. England: Cambridge University Press, 2000.

[2] Shor P W. Polynomial-time Algorithms for Quantum Computation Discretelog and Factoring[A]. *Proc 35th Annual Symp on Foundations of Computer Science*[C]. Santa Fe, 1994: 124-134.

[3] Shor P W. Scheme for Reducing Decoherence in Quantum Computer Memory[J]. *Physical Review A*, 1995, 52(4): 2493-2496.

[4] Duan L M, Guo G C. Preserving Coherence in Quantum Computation by Pairing Quantum Bits[J]. *Physical Review Letter*, 1997, 79(10): 1953-1956.

[5] Viola L, Lloyd S. Dynamical Suppression of Decoherence in Two-state Quantum Systems [J]. *Physical Review A*, 1998, 58(4): 2733-2744.

[6] D'Alessandro D, Dobrovivitski V. Control of a Two Level Open Quantum Ssystem [A]. *Proc 41th IEEE Conf on Decision and Control*[C]. Las Vegas, 2002: 40-45.

[7] Zhang J, Li C W, Wu R B, et al. Maximal Suppression of Decoherence in Markovian Quantum Systems[J]. *J of Physics A: Mathematical and General*, 2005, 38 (29): 6587- 6601.

[8] Lidar D A, Schneider S. Stabilizing Qubit Coherence via Tracking Control [J]. *Quantum Information and Computation*, 2005, 5(4): 350-363.

[9] Puri R R. *Mathematical Methods of Quantum Optics* [M]. Berlin, New York: Springer, 2001.

[10] Altafini C. Controllability Properties for Finite Dimensional Quantum Markovian Master Equations [J]. *J of Mathematical Physics*, 2003, 44(6): 2357-2372.

[11] Rugh W J. *Linear System Theory* [M]. New Jersey: Prentice Hall, 1993.

[12] Stockton J K, Handel R V, Mabuchi H. Deterministic Dicke-state Preparation with Continuous Measurement and Control[J]. *Physical Review A*, 2004, 70(2): 0221061.

[13] Reiner J E, Wiseman H M, Mabuchi H. Quantum Jumps Between Dressed States: A Proposed Cavity-QED Test Using Feedback[J]. *Physical Review A*, 2003, 67(4): 042106.