

文章编号: 1001-0920(2006)05-0521-06

极大代数上线性系统的最小实现

孙志敏¹, 陈文德¹, 于洪年²

(1. 中国科学院 数学与系统科学研究院, 系统控制重点实验室, 北京 100080;

2. 斯塔福德郡大学 计算工程科技学院, 英国 斯塔福德 ST18 0DG)

摘要: 研究极大代数上线性系统单输入单输出的最小实现问题 给出了存在2维最小实现的充要条件, 该条件是用无穷序列 $\{g_i\}_0$ 元素之间的关系描述的, 因而容易判断; 同时, 用涂奉生提出的结构标准形和最小实现算法给出了2维最小实现的构造方法, 从而完全解决了2维最小实现问题 作为以上结果的推论, 指出了涂奉生猜想在维数小于等于2的情况下成立, 并通过反例说明涂奉生猜想在大于2维的情况下不成立

关键词: 最小实现; 周期序列; 极大代数

中图分类号: O 231 **文献标识码:** A

Minimal Realization in Linear System of Max-algebra

SUN Zhi-min¹, CHEN Wen-de¹, YU Hong-nian²

(1. Key Lab of Systems and Control, Academy of Mathematic and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China; 2. Faculty of Computing Engineering and Technology, Staffordshire University, Stafford ST18 0DG, U.K. Correspondent: SUN Zhi-min, Email: zm_sun@amss.ac.cn)

Abstract: The minimal realization of a low dimensional SISO linear system in the max-algebra is studied. The necessary and sufficient condition for the existence of 2-dimensional minimal realization is given, which is described by the relation of elements of the infinite sequence and is easy to check. The method of constructing a 2-dimension minimal realization is presented through the structural standardization and arithmetic of minimal realization developed by Fengsheng Tu, by which the problem of 2-dimension minimal realization is solved completely. Consequently it is proved that the conjecture of Fengsheng Tu is right with the dimension of the minimal realization no more than 2. Finally, a counter-example shows that the conjecture of Fengsheng Tu does not hold with the dimensions of minimal realization bigger than 2.

Key words: Minimal realization; Periodic sequence; Max-algebra

1 引言

设 R 是所有实数的集合, $\epsilon \triangleq -\infty$, $e \triangleq 0$, 令 $\bar{R} = R \cup \{\epsilon\}$, 在 \bar{R} 上定义加法 \oplus 和乘法 \otimes . 如

$$a \oplus b = \max\{a, b\},$$

$$a \otimes b = a + b, \forall a, b \in \bar{R},$$

$$ab \triangleq a \otimes b, a^1 \triangleq a, a^n = a^{n-1} \otimes a,$$

其中: $+$ 是一般意义下的加法, 乘号 \otimes 通常省略, a^n 相当于一般意义上的 na . 令 $D = \{\bar{R}, \oplus, \otimes\}$, 则 D 称为一个极大代数

一类DEDS可用极大代数上线性系统来描述 这类DEDS的最小实现问题的提法如下: 设已给定可实现无穷序列 $\{g_i\}$

$$g_0, g_1, \dots, g_i, \dots, \quad (1)$$

求极大代数上的线性系统 (A, B, C) , 即

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \oplus Bu(k), \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \quad (2)$$

使得

$$g_0 = CB, g_1 = CAB, \dots, g_i = CA^iB, \dots \quad (3)$$

收稿日期: 2005-04-11; 修回日期: 2005-07-14

基金项目: 中国科学院和英国皇家学会资助项目

作者简介: 孙志敏(1977—), 女, 湖北襄樊人, 博士生, 从事离散事件动态系统的研究; 陈文德(1941—), 男, 江苏苏州人, 研究员, 从事离散事件动态系统、离散数学等研究

式(2)称为(1)的一个实现 若式(2)中A的阶数均小于或等于(1)的任意一个实现中A的阶数,则称(2)为(1)的最小实现,且A的阶数称为最小实现的维数

求最小实现问题不仅是极大代数上线性系统研究中的难题,而且是国际上的公开问题,同时也是普遍困难的数学与物理中的反问题之一.近20年来,国内外许多学者对这个问题进行了研究.陈文德^[1]研究了准域上的实现理论;Olsder等^[2]首先提出了一种嵌入域的方法;尔后,Cunningham e-Green^[3]给出了强凸序列的求最小实现的方法,并指出当维数大于2时,这两种方法不是很有前途.齐向东和陈文德^[4]将Olsder的方法推广到多输入多输出的情形.陈文德^[5]用图论法得到了稳定序列的最小实现,并和Gaubert^[6]分别独立地得到了能实现的充要条件.涂奉生创造性地提出了特征结构和结构标准形两个新概念^[7],给出了存在n维最小实现的充要条件的猜想^[8],并通过一个例子指出即使在2维的情形下,用Olsder和Cunningham e-Green的方法可能得不到最小实现,而用他的方法却可以得到. Gaubert^[9]给出了最小实现维数的上界weak rank和下界minor rank. Schutter^[10,11]将这个问题归结为扩展的线性互配问题(ELCP),以consecutive column rank为起点找出最小实现维数的下界,解决了局部最小实现问题,并指出一般ELCP是NP-hard的. Gaubert^[12]利用双行列式再次给出最小实现维数的下界minor rank,并给出凸序列的最小实现.1999年,这个问题作为公开问题在文献[13]中列出. Blondel和Portier^[14]证明了求最小实现的算法是NP-hard的.2004年,Lahaye等^[15]在Dioids上研究了状态空间实现问题.

本文将研究极大代数上线性系统单输入单输出的最小实现问题.首先给出存在2维最小实现的充要条件,该条件是用无穷序列{g_i}₀元素之间的关系描述的,因而容易判断;然后,用涂奉生的结构标准形和最小实现算法给出2维最小实现的构造方法,从而完全解决了2维最小实现问题.作为以上结果的推论,指出了涂奉生猜想在维数小于等于2的情况下成立.最后,通过反例说明涂奉生猜想在大于2维的情况下不成立.

2 准备工作

定义1^[16] 设A为极大代数上n×n的矩阵,对于λ∈若存在向量X,使得AX=λX,则称λ为A的一个特征值,X称为特征向量,A的特征方程定义为

$$\lambda^n \oplus_{k \in N} c_{n-k} \lambda^{n-k} = c_{n-1} \lambda^{n-1} \oplus_{k \in \bar{N}} c_{n-k} \lambda^{n-k},$$

其中:N = {2, 3, ..., n}, N = ∅.

定义2^[8] 设已给定无穷序列

$$\{g_i\}_0: g_0, g_1, \dots, g_i, \dots,$$

构造Hankel矩阵如下:

$$H = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_k & \dots \\ g_1 & g_2 & \dots & g_{k+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ g_k & g_{k+1} & \dots & g_{2k} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

记H=(h_{ij}),若g_k=h_{1,k+1},则称g_k所在的列为H的第k列,记为H·_k.如果存在阶数最低的某A的特征方程

$$\lambda^n \oplus_{k \in N} c_{n-k} \lambda^{n-k} = c_{n-1} \lambda^{n-1} \oplus_{k \in \bar{N}} c_{n-k} \lambda^{n-k}, \quad (4)$$

使得

$$H \cdot_n \oplus_{k \in N} c_{n-k} H \cdot_{n-k} = c_{n-1} H \cdot_{n-1} \oplus_{k \in \bar{N}} c_{n-k} H \cdot_{n-k},$$

则称无穷序列{g_i}₀为n-阶周期序列,特征方程(4)也称为序列{g_i}₀的特征方程.

定义3^[8] 由Cayley-Hamilton定理^[16]知,将特征方程(4)中的λ用矩阵A替换后,存在方程组

$$c_{n-p_t}(A^{n-p_t})_{ij} = c_{n-q_t}(A^{n-q_t})_{ij}, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

其中T=N.令p_t^{*}=n-p_t,q_t^{*}=n-q_t,且令

$$CS_t = \begin{cases} (p_t^*, q_t^*), p_t^* > q_t^*; \\ (q_t^*, p_t^*), p_t^* < q_t^*. \end{cases}$$

记CS(A)={CS_t|t=1,2,...,T},则CS(A)称为矩阵A的特征结构或称为(4)的特征结构.可构造矩阵A的结构标准形A~为

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} * & e & \dots & \epsilon \\ & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & e \\ & \dots & \dots & * \end{bmatrix}.$$

A~中处于i行j列(i≤j)的元素记为*_{ij},其确定方法为

$$*_{ij} = \begin{cases} c_{j-1}/c_i, & (i, j-1) \in CS; \\ \epsilon, & (i, j-1) \notin CS \end{cases}$$

文献[8]定义的结构标准形实现为(A~,B,C),其中:C=(e,ε,...,ε),B可由序列{g_i}₀解出.

尽管文献[14]证明了构造最小实现的算法是NP-hard的,但“寻找存在n维最小实现的充要条件”这一理论问题仍是一个难解而有意义的谜.文献[8]曾在这个方面做了重要的探索,给出了一个充要条件,由于至今没有给出该条件的严密证明,姑



且称其为涂奉生猜想:

涂奉生猜想^[8] 无穷序列 $\{g_i\}_0$ 存在 n 维最小实现的充分必要条件为它是一个 n - 阶周期序列

注 1 文献[8]中的定理 3.1 即为涂奉生猜想, 从其证明提纲来看, 证明思路如下:

设无穷序列 $\{g_i\}_0$ 是一个 n 阶周期序列, 若该序列所对应的特征方程不能分解, 则必有 n 维结构标准形最小实现; 若该序列所对应的特征方程能分解, 则必有相对应的 n 维块对角形最小实现, 其中每小块也是相应的结构标准形最小实现; 于是若无穷序列 $\{g_i\}_0$ 是一个 n 阶周期序列, 则必有相对应的 n 维最小实现

3.2 维最小实现

引理 1 若无穷序列 $\{g_i\}_0$ 为 1- 阶周期序列, 则序列中元素的关系为

$$g_{k+1} = cg_k, k = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 c 为不等于 ϵ 的常数, 且该序列的最小实现为

$$A = (c), C = (e), B = (g_0).$$

反之, 最小实现为 1 维的序列必为 1- 阶周期序列

引理 2 若无穷序列 $\{g_i\}_0$ 为 2- 阶周期序列, 则序列的特征方程必为下列方程之一:

- (1) $\lambda^2 = c_0\lambda^0$;
- (2) $\lambda^2 = c_1\lambda$
- (3) $\lambda^2 \oplus c_0\lambda^0 = c_1\lambda$
- (4) $\lambda^2 = c_1\lambda \oplus c_0\lambda^0$.

引理 1 和引理 2 的证明很容易, 故略去. 一般的有以下定理:

定理 1 若无穷序列 $\{g_i\}_0$ 为 2- 阶周期序列, 则它的元素之间的关系必为下列 6 种形式之一:

- (1) $g_{k+2} = c_0g_k, k = 0, 1, \dots$, 且 $g_1^2 = c_0g_0^2$;
- (2) $g_{k+2} = c_1g_{k+1}, k = 0, 1, \dots$, 且 $g_1 = c_1g_0$;
- (3) $g_{k+1} = (c_0/c_1)g_k, k = 0, 1, \dots, l; g_{m+2} = c_1g_{m+1}, m = l+1, l+2, \dots$, 其中 $c_0 < c_1^2, l \in N$;
- (4) $g_2 = c_0g_0, g_{k+2} = c_1g_{k+1}, k \in N$, 且当 $c_0 = c_1^2$ 时, $g_1 = c_1g_0$;
- (5) $g_{2k} = c_0g_{2k-2}, g_{2k+1} = c_1g_{2k}, k \in N$, 且当 $c_0 = c_1^2$ 时, $g_1 = c_1g_0$;
- (6) $g_{2k+1} = c_0g_{2k-1}, g_{2k} = c_1g_{2k-1}, k \in N$, 且当 $c_0 = c_1^2$ 时, $g_1 = c_1g_0$.

证明 对任意的 2- 阶周期序列 $\{g_i\}_0$, 由引理 2 知序列的特征方程的形式. 下面根据特征方程来证明序列 $\{g_i\}_0$ 中的元素之间的关系

- (1) 若序列 $\{g_i\}_0$ 的特征方程为 $\lambda^2 = c_0\lambda^0$, 则有 $g_{k+2} = c_0g_k, k = 0, 1, \dots$, 且 $g_1^2 = c_0g_0^2$, 即为形式(1).
- (2) 若序列 $\{g_i\}_0$ 的特征方程为 $\lambda^2 = c_1\lambda$, 则有

$g_{k+2} = c_1g_{k+1}, k = 0, 1, \dots$, 且 $g_1 = c_1g_0$, 即为形式(2).

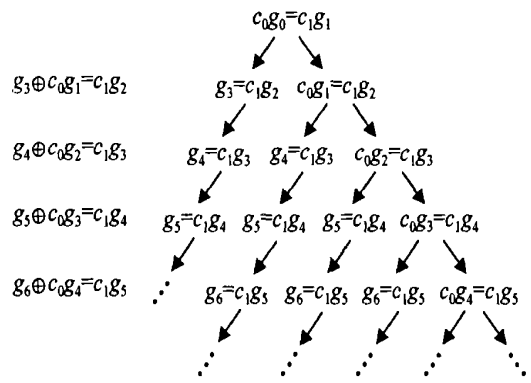
(3) 若序列 $\{g_i\}_0$ 的特征方程为 $\lambda^2 \oplus c_0\lambda^0 = c_1\lambda$, 则有 $g_{k+2} \oplus c_0g_k = c_1g_{k+1}, k = 0, 1, \dots$. 分两种情况来讨论序列 $\{g_i\}_0$ 中的元素之间的关系

1) 当 $g_2 = c_1g_1$ 时, 有 $g_{k+2} = c_1g_{k+1}, k = 0, 1, \dots, g_1 = c_1g_0$, 为形式(2). 事实上, 当 $k = 0$ 时, 已知 $g_2 = c_1g_1$. 设 $k = l$, 有 $g_{l+2} = c_1g_{l+1}$, 那么当 $k = l+1$ 时, 有 $g_{l+3} \oplus c_0g_{l+1} = c_1g_{l+2} = c_1^2g_{l+1}$, 若 $c_0 < c_1^2$, 有 $g_{l+3} = c_1g_{l+2}$; 若 $c_0 = c_1^2$, 有 $g_{l+3} = c_1g_{l+2}, g_{l+4} \oplus c_0g_{l+2} = c_1g_{l+3} = c_1^2g_{l+2}, c_0g_{l+2} = c_1g_{l+3}$, 即 $g_{l+3} = c_1g_{l+2}$. 由归纳法已证出 $g_{k+2} = c_1g_{k+1}, k = 0, 1, \dots$

反设 $g_1 = c_1g_0$, 则 $g_{k+1} = c_1g_k, k = 0, 1, \dots$, 为 1- 阶周期序列, 与已知的序列为 2- 阶周期序列矛盾

2) 当 $c_0g_0 = c_1g_1$ 时, 则有 $g_{k+1} = (c_0/c_1)g_k, k = 0, 1, \dots, l, l \in N; g_{m+2} = c_1g_{m+1}, m = l+1, l+2, \dots, c_0 < c_1^2$, 为形式(3).

事实上, 若 $g_2 = c_1g_1 = c_0g_0$, 则可以归结到 1) 中, 故只考虑 $g_2 < c_1g_1$. 若此时 $c_0 = c_1^2$, 则 $g_3 \oplus c_0g_1 = c_1g_2 < c_1^2g_1$, 矛盾, 因而 $c_0 < c_1^2$. 当 $c_0 < c_1^2$ 时, 可用图的形式来说明. 在 $c_0g_0 = c_1g_1$ 的前提下, 每个式子 $g_{k+2} \oplus c_0g_k = c_1g_{k+1} (k = 1, 2, \dots)$ 都有两种可能: $g_{k+2} = c_1g_{k+1}$ 或 $c_0g_k = c_1g_{k+1}$; 但当 $g_{k+2} = c_1g_{k+1}$ 时, 若下一个式子取 $c_0g_{k+1} = c_1g_{k+2}$, 则得到 $c_0g_{k+1} = c_1^2g_{k+1}$ 与 $c_0 < c_1^2$ 矛盾. 如下图所示



由上图沿箭头的路径的各种可能情况可知, 序列 $\{g_i\}_0$ 的元素之间的关系仅有两种: 形式(3); $g_{k+1} = (c_0/c_1)g_k, k = 0, 1, \dots$. 显然为 1- 阶周期序列, 矛盾

(4) 若序列 $\{g_i\}_0$ 的特征方程为 $\lambda^2 = c_1\lambda \oplus c_0\lambda^0$, 则有 $g_{k+2} = c_1g_{k+1} \oplus c_0g_k, k = 0, 1, \dots$. 分以下几种情况讨论序列 $\{g_i\}_0$ 中元素之间的关系

- 1) 当 $g_2 = c_1g_1$ 时, 分两种情况:
 - 当 $c_1^2 = c_0, g_1 = c_1g_0$ 时, 用归纳法易证 $g_{k+2} = c_1g_{k+1}, k = 0, 1, \dots$, 为形式(2);
 - 当 $c_1^2 < c_0$ 时, 用归纳法易证 $g_{2k} = c_1g_{2k-1},$



$g_{2k+1} = c_0 g_{2k-1}, k \in N$, 为形式(6).

2) 当 $g_2 = c_0 g_0 > c_1 g_1$ 时, 分两种情况:

当 $c_1^2 = c_0$ 时(其中 $c_1^2 = c_0$ 时, $g_1 = c_1 g_0$), 用归纳法易证 $g_2 = c_0 g_0, g_{k+2} = c_1 g_{k+1}, k \in N$, 为形式(4).

当 $c_1^2 < c_0$ 时, 若 $c_1 g_0 = g_1$, 用归纳法易证 $g_{2k} = c_0 g_{2k-2}, g_{2k+1} = c_1 g_{2k}, k \in N$, 即为形式(5); 若 $c_1 g_0 < g_1$, 则用归纳法易证 $g_{k+2} = c_0 g_k, k = 0, 1, 2, \dots$, 即为形式(1).

综上所述, 定理 1 得证

定理 2 无穷序列 $\{g_i\}_0$ 存在 2 维最小实现的充要条件是: 序列 $\{g_i\}_0$ 的元素之间的关系具有定理 1 中的 6 种形式之一.

证明 由定理 1, 必要性显然

充分性 文献[8]用结构标准形给出了最小实现的一个算法, 下面就用这个方法对定理 1 中每种形式的序列来构造 2 维最小实现

(1) 若无穷序列 $\{g_i\}_0$ 元素之间的关系具有形式(1): $g_{k+2} = c_0 g_k, k = 0, 1, \dots$, 且 $g_1^2 = c_0 g_0^2$, 令

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon & e \\ c_0 & \epsilon \end{bmatrix}, C = [e \quad \epsilon], B = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix},$$

这里 A, C 为结构标准形, B 的元素由序列方程 $g_i = CA^i B$ 解出 易验证 (A, B, C) 是序列 $\{g_i\}_0$ 的最小实现

(2) 若无穷序列 $\{g_i\}_0$ 元素之间的关系具有形式(2): $g_{k+2} = c_1 g_{k+1}, k = 0, 1, \dots$ 且 $g_1 = c_1 g_0$, 易验证

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon & e \\ \epsilon & c_1 \end{bmatrix}, C = [e \quad \epsilon], B = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}$$

是序列 $\{g_i\}_0$ 的最小实现

(3) 若无穷序列 $\{g_i\}_0$ 元素之间的关系具有形式(3): $g_{k+1} = (c_0/c_1)g_k, k = 0, 1, \dots, l; g_{m+2} = c_1 g_{m+1}, m = l+1, l+2, \dots$, 其中 $c_0 < c_1^2$ 易验证

$$A = \begin{bmatrix} c_0/c_1 & e \\ \epsilon & c_1 \end{bmatrix}, C = [e \quad \epsilon], B = \begin{bmatrix} g_0 \\ (1/c_1^{l+1})g_{l+2} \end{bmatrix}$$

是序列 $\{g_i\}_0$ 的最小实现

(4) 若无穷序列 $\{g_i\}_0$ 元素之间的关系具有以下 3 种形式之一:

(4) $g_2 = c_0 g_0, g_{k+2} = c_1 g_{k+1}, k \in N$;

(5) $g_{2k} = c_0 g_{2k-2}, g_{2k+1} = c_1 g_{2k}, k \in N$;

(6) $g_{2k+1} = c_0 g_{2k-1}, g_{2k} = c_1 g_{2k-1}, k \in N$;

且当 $c_0 = c_1^2$ 时, 必有 $g_1 = c_1 g_0$ 易验证

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon & e \\ c_0 & c_1 \end{bmatrix}, C = [e \quad \epsilon], B = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}$$

是序列 $\{g_i\}_0$ 的最小实现

定理 2 的证明给出了 2 维最小实现的构造方法

推论 1 无穷序列 $\{g_i\}_0$ 存在 2 维最小实现的充要条件是序列 $\{g_i\}_0$ 是 2- 阶周期序列

推论 2 若无穷序列 $\{g_i\}_0$ 是 2- 阶周期序列, 则必有 2 维的结构标准形最小实现

注 2 引理 1 和推论 1 说明涂奉生的猜想在小于等于 2 维的情况下成立

4 猜想的否定

本文将用下面的例子说明在大于 2 维的情况下, 涂奉生猜想是不成立的

例 1 若有无穷序列

$$\{g_i\}_0 = \epsilon, 1, 2, 3, \epsilon, 5, \epsilon, 7, 8, 9, \epsilon, 11, \epsilon, 13, \dots,$$

则序列 $\{g_i\}_0$ 没有 3 维最小实现

首先构造序列 $\{g_i\}_0$ 的 Hankel 矩阵(略). 显然, 序列 $\{g_i\}_0$ 的列之间有如下关系:

$$H_{\cdot, k+3} \oplus 3H_{\cdot, k} = 1H_{\cdot, k+2} \oplus 2H_{\cdot, k+1},$$

则它对应的方程为

$$\lambda^3 \oplus 3\lambda^0 = 1\lambda^2 \oplus 2\lambda \tag{5}$$

且(5)是矩阵 A 的特征方程, 其中

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon & e & \epsilon \\ 2 & \epsilon & e \\ \epsilon & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

所以(5)为序列 $\{g_i\}_0$ 的特征方程 易分析出它的元素之间不具有引理 1 和定理 1 所描述的元素之间的关系, 故由引理 1 和定理 2 可知, 序列 $\{g_i\}_0$ 没有小于 3 维的最小实现

由推论 1 和定义 2 知该序列为 3- 阶周期序列, 假设无穷序列 $\{g_i\}_0$ 有 3 维的实现, 即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, C = [c_1 \quad c_2 \quad c_3],$$

$$B = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]^T,$$

那么, $g_0 = c_1 b_1 \oplus c_2 b_2 \oplus c_3 b_3 = \epsilon$, 则有 $c_1 b_1 = c_2 b_2 = c_3 b_3 = \epsilon$ 且 $c_1, c_2, c_3, b_1, b_2, b_3$ 中至少有 3 个元素为 ϵ 其中: c_1, c_2, c_3 不能同时为 ϵ, b_1, b_2, b_3 不能同时为 ϵ 由极大代数中的置换可知, 只需分以下两种情况讨论即可:

(1) $c_1 = \epsilon, c_2 = c_3 = \epsilon$

(2) $c_1 = \epsilon, c_2 = \epsilon, c_3 = \epsilon$

由情况(2)必然有 $b_1 = \epsilon, b_2 = b_3 = \epsilon$ 根据 B 和 C 的对称性, 可将其归结为情况(1), 故只给出情况(1)的讨论

$$g_1 = b_2 a_{12} c_1 \oplus b_3 a_{13} c_1,$$

由 $g_1 = 1$ 知, b_2, b_3 中至少有一个不等于 ϵ 不妨设 b_2



ϵ 分两种情况讨论:

1) $b_3 = \epsilon$

若 $a_{12} = \epsilon, a_{13} = \epsilon$ 时, 由 $g_4 = \epsilon$ 可知, $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \epsilon, g_2 = b_3 a_{12} a_{23} c_1 \oplus b_2 a_{13} a_{32} c_1$. 由 $g_2 = 2, g_4 = \epsilon$ 可知, a_{23}, a_{32} 中至少有一个为 ϵ , 但不能同时为 ϵ . 不妨设 $a_{23} = \epsilon, a_{32} = \epsilon$ ($a_{23} = \epsilon, a_{32} = \epsilon$ 可类似证明).

(I) 若 $a_{21} = \epsilon$, 则 $CA^4 B = b_3 a_{23} a_{12} a_{21} c_1 = \epsilon$ 与已知的 $g_4 = \epsilon$ 矛盾, 故 $a_{21} = \epsilon$

(II) 若 $a_{31} = \epsilon$, 则 $CA^4 B = b_3 a_{12} a_{13} a_{23} a_{31} c_1 = \epsilon$ 与已知的 $g_4 = \epsilon$ 矛盾, 故 $a_{31} = \epsilon$

因而

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon & a_{12} & a_{13} \\ \epsilon & \epsilon & a_{23} \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{bmatrix}, C = [c_1 \ \epsilon \ \epsilon],$$

$$B = [\epsilon \ b_2 \ b_3]^T.$$

可知 $CA^3 B = \epsilon$ 与已知的 $g_3 = 3$ 矛盾, 故 (A, B, C) 不是序列 $\{g_i\}_0$ 的最小实现

若 $a_{12} = \epsilon, a_{13} = \epsilon$ ($a_{12} = \epsilon, a_{13} = \epsilon$ 可进行类似的计算) 时, 由 $g_4 = \epsilon$ 可知, $a_{11} = a_{22} = \epsilon, g_2 = b_3 a_{12} a_{23} c_1 = 2$, 则 $a_{23} = \epsilon$

(I) 若 $a_{21} = \epsilon$, 则 $CA^4 B = b_3 a_{12} a_{21} a_{23} c_1 = \epsilon$ 与已知的 $g_4 = \epsilon$ 矛盾, 故 $a_{21} = \epsilon$

(II) 若 $a_{31} = \epsilon$, 则 $CA^4 B = b_2 a_{12} a_{13} a_{23} a_{31} c_1 = \epsilon$ 与已知的 $g_4 = \epsilon$ 矛盾, 故 $a_{31} = \epsilon$

(III) 若 $a_{32} = \epsilon$, 则 $CA^4 B = b_3 a_{12} a_{23} a_{32} c_1 = \epsilon$ 与已知的 $g_4 = \epsilon$ 矛盾, 故 $a_{32} = \epsilon$

(IV) 若 $a_{33} = \epsilon$, 则 $CA^4 B = b_3 a_{12} a_{23} a_{33} c_1 = \epsilon$ 与已知的 $g_4 = \epsilon$ 矛盾, 故 $a_{33} = \epsilon$

因而

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon & a_{12} & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & a_{23} \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{bmatrix}, C = [c_1 \ \epsilon \ \epsilon],$$

$$B = [\epsilon \ b_2 \ b_3]^T.$$

可知 $CA^3 B = \epsilon$ 与已知的 $g_3 = 3$ 矛盾, 故 (A, B, C) 不是序列 $\{g_i\}_0$ 的最小实现

2) $b_3 = \epsilon$

则 $g_1 = b_2 a_{12} c_1, a_{12} = \epsilon$ 由 $g_4 = \epsilon$ 可知, $a_{11} = a_{22} = \epsilon, CA^2 B = \epsilon$ 与已知的 $g_2 = 2$ 矛盾, 故相应的 (C, A, B) 不是序列 $\{g_i\}_0$ 的最小实现

综上所述, 序列 $\{g_i\}_0$ 的确没有 3 维的最小实现

例 2 无穷序列

$$\{g_i\}_0 = e, 1, 3, 4, 10, 13, 17, 20, 24, 27, 31, \dots$$

为 3-阶周期序列, 没有 3 维结构标准形实现, 但是有

3 维最小实现

下面证明序列 $\{g_i\}_0$ 没有 3 维结构标准形实现. 首先构造序列 $\{g_i\}_0$ 的 Hankel 矩阵 (略). 显然, 序列 $\{g_i\}_0$ 的列之间有如下关系:

$$H^{\bullet, k+3} \oplus 8H^{\bullet, k} = 3H^{\bullet, k+2} \oplus 7H^{\bullet, k+1},$$

则它所对应的方程为

$$\lambda^3 \oplus 8\lambda^0 = 3\lambda^2 \oplus 7\lambda, \quad (6)$$

且 (6) 为矩阵 A_1 的特征方程, 其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \epsilon \\ 5 & \epsilon & 2 \\ \epsilon & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

所以 (6) 为序列 $\{g_i\}_0$ 的特征方程. 易分析出它的元素之间不具有引理 1 和定理 1 中所描述的元素之间的关系, 故由引理 1 和定理 2 可知, 它没有小于 3 维的最小实现

由推论 1 和定义 2 知序列 $\{g_i\}_0$ 是 3-阶周期序列. 按照涂奉生^[8]的方法构造结构标准形实现, 其中一个结构标准形实现为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & e & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & e \\ \epsilon & 7 & 3 \end{bmatrix}, C = [e \ \epsilon \ \epsilon], B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

易计算出 $b_1 = e, b_2 = 3, b_3 = 3$, 但 $CA^3 B = 6$ 与已知的 $g_3 = 4$ 矛盾, 故 (A, B, C) 不是序列 $\{g_i\}_0$ 的实现 (用类似的方法可计算出, 其他的 3 维结构标准形也不是序列 $\{g_i\}_0$ 的实现). 即序列 $\{g_i\}_0$ 没有 3 维结构标准形实现. 易验证 (A_1, B_1, C_1) 是序列 $\{g_i\}_0$ 的最小实现, 其中

$$C_1 = [\epsilon \ \epsilon \ e], B_1 = [\epsilon \ \epsilon \ e]^T.$$

5 结 语

1992 年, 涂奉生^[8]大胆地猜想: “定义 2 的阶数 = 最小实现的维数.” 3 年后, Schutter 等^[10]谨慎地表达了平凡且显然的结论: “定义 2 的阶数 = 最小实现的维数.” 这是两种不同的学术观点, 但“ ”并没有排除永远取“=”的可能性. 本文严密证明了阶数 = 2 时, 取“=” ; 阶数 = 3 时, 可以取“<”, 从而否定了涂奉生猜想. 尽管如此, 文献[8]仍具有重要的价值, 特别是“特征结构”和“结构标准形”这两个原创性的新概念是十分重要的工具. 例如, 本文利用“结构标准形”证明了定理 2.

参考文献 (References)

[1] 陈文德. 准域上动态系统的能达能观性与实现理论[J]. 系统科学与数学, 1986, 6(2): 81-89.
(Chen W. D. Reachability, Observability and Realization Theory of Dynamic Systems over Quasi-Fields [J]. System Science and Mathematical Sciences, 1986, 6 (2): 81-89.)

- [2] Olsder G J, De Vries R E. On an Analogy of Minimal Realization in Conventional and Discrete Event Dynamic Systems[J]. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 1988, 103: 149-161.
- [3] Cunnigham-Green R A. Algebraic Realization of Discrete Event Dynamic Systems[A]. *Proc of the 1991 IFAC Workshop on Discrete Event Dynamic System Theory and Application in Manufacturing and Social Phenomena*[C]. Shenyang, 1991: 11-15.
- [4] Qi X D, Chen W D. The Minimal Realization of Discrete Event Systems[A]. *Proc of the 1991 IFAC Workshop on Discrete Event Dynamic System Theory and Application in Manufacturing and Social Phenomena*[C]. Shenyang, 1991: 29-33.
- [5] 陈文德. 离散事件动态系统的实现理论[A]. 1992 中国控制与决策学术年会论文集[C]. 哈尔滨, 1992: 179-183
(Chen W D. Realization Theory of Discrete Event Dynamic Systems[A]. *Proc of 1992 Chinese Control and Decision Conf* [C]. 1992: 179-183.)
- [6] Gaubert S. *Theory of the Linear System in the Dioids* [D]. Paris: National Superior School of Mines of Paris, 1992.
- [7] 涂奉生. 极大代数上特征方程与特征结构[A]. CSIAM系统与控制数学分会学术讨论会[C]. 上海, 1992
(Tu F S. Characteristic Equation and Characteristic Structure in the Max-algebra [A]. *Branch of Colloquium of CSIAM Systems and Control Mathematic Branch* [C]. Shanghai, 1992.)
- [8] 涂奉生. 极大代数上线性系统的最小实现[A]. 1992 中国控制与决策学术年会论文集[C]. 哈尔滨, 1992: 184-189
(Tu F S. Minimal Realization in Linear Systems of the Max-algebra [A]. *Proc of 1992 Chinese Control and Decision Conf* [C]. Harbin, 1992: 184-189.)
- [9] Gaubert S. *On Rational Series in One Variable over Certain Dioids*[R]. Chesnay, 1994.
- [10] De Schutter B, Bart D Moor. Minimal Realization Problem in the Max-algebra Is an Extended Linear Complementarity Problem [J]. *Systems and Control Letters*, 1995, 25(2): 103-111.
- [11] De Schutter B. *Max-algebra Systems Theory for Discrete Event Systems* [D]. Leuven: Faculty of Applied Sciences, 1996.
- [12] Gaubert S, Butkovic P, Cunnigham-Green R A. Minimal (Max, +) Realization of Convex Sequences [J]. *SIAM J Control Optimization*, 1998, 36(1): 137-147.
- [13] Olsder G J, De Schutter B. The Minimal Realization Problem in the Max-algebra [A]. *Open Problem in Mathematical Systems and Control Theory* [C]. London: Springer-Verlag, 1999: 157-162.
- [14] Blondel V D, Portier N. *The Minimal Realization Problem in the Max-plus Semiring and Pólya's Problem are NP-hard* [M]. C R Acad Sci Paris, 2001: 1127-1130.
- [15] Lahaye S, Boimond J L, Hardouin L. Linear Periodic Systems Over Dioids [J]. *Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Application*, 2004, 14(2): 133-152.
- [16] Olsder G J, Roos C. *Cramer and Cayley-Hamilton in the Max-algebra* [R]. Julianalaani Department of Mathematics and Informatics, 1985.

(上接第520页)

- [7] 刘先省, 申石磊. 基于信息熵的一种传感器管理算法[J]. *电子学报*, 2000, 28(9): 39-41.
(Liu X X, Shen S L. An Algorithm of Sensor Management Based on Information Entropy [J]. *Electronics Transaction*, 2000, 28(9): 39-41.)
- [8] 周文辉, 胡卫东, 余安喜, 等. 基于协方差控制的集中式传感器分配算法研究[J]. *电子学报*, 2003, 31(12A): 2158-2162.
(Zhou W H, Hu W D, Yu A X, et al. A Study of Centralized Sensor Allocating Algorithm Based on Covariance [J]. *Electronics Transaction*, 2003, 31(12A): 2158-2162.)
- [9] Durrant-Whyte H, Ben Grocholsky. Management and Control in Decentralized Networks[A]. *Proc of the 6th Int Conf on Information Fusion* [C]. Cairns, 2003, 2: 560-566.
- [10] Bonnie Worth Johnson. Naval Network-centric Sensor Resource Management[A]. *The 4th Annual Conf on Implementing Network Centric Warfare* [C]. Washington DC, 2002.
- [11] Ronnie L, Johansson M, Xiong N, et al. A Game Theoretic Model for Management of Mobile Sensors [A]. *Proc of the 6th Int Conf on Information Fusion* [C]. Cairns, 2003, 2: 583-590.
- [12] 田康生, 朱光喜, 徐毓. 基于多代理技术的传感器管理系统[J]. *现代雷达*, 2004, 26(2): 9-13
(Tian K S, Zhu G X, Xu Y. Sensor Management System Based on Multi-agent Technology [J]. *Modern Radar*, 2004, 26(2): 9-13.)
- [13] Ben Grocholsky. *Information-theoretic Control of Multiple Sensor Platforms* [D]. Sydney: Sydney University, 2002.