第21卷 第6期 控 制 与 决 策 2006年6月
Vol 21 No. 6 Control and Decision Jun. 2006

文章编号: 1001-0920(2006)06-0685-04

欠驱动机械系统的三类级联规范型

高丙团, 陈宏钧, 张晓华
(哈尔滨工业大学 电气工程系, 哈尔滨 150001)

摘 要: 基于欠驱动机械系统的动力学, 分析了其驱动模式; 为了便于欠驱动机械系统的控制设计, 针对具有动能对称性的欠驱动机械系统, 提出了一种闭环全局坐标变换方案. 该方案将欠驱动机械系统的动力学转换成具有结构特征的级联规范型(即严格反馈、严格前馈和非三角级联非线性系统), 并分别给出了Pendubot、倒立摆系统和TORA (Translational Oscillator with Rotational Actuator) 系统的级联规范型.

关键词: 级联系统; 欠驱动机械系统; 规范型; 非线性控制
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Three Classes of Normal Forms for Underactuated Mechanical Systems

GAO Bing-tuan, CHEN Hong-jun, ZHANG Xiao-hua
(Department of Electrical Engineer, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: GAO Bing-tuan, E-mail: gaopu1089@hit.edu.cn)

Abstract: Based on the dynamics of underactuated mechanical systems, the actuation mode is analyzed and a closed-form changes of coordinates are presented for such systems with symmetry that are convenient for control design. The changes of coordinates transform the dynamics into structured cascade normal forms, namely, nonlinear systems in strict feedback form, feedforward form, and nontriangular form. The results are applied to the Pendubot, the inverted-pendulum system, and the translational oscillator with rotational actuator (TORA) system.

Key words: Cascade systems; Underactuated mechanical systems; Normal forms; Nonlinear control

1 引 言

欠驱动机械系统是指控制输入数目少于系统自由度的系统. 欠驱动机械系统广泛存在于实际的控制应用中, 如机器人, 航空飞行器, 水下交通工具和水面舰船等. 由于欠驱动系统应用广泛, 对于它的控制便显得尤为重要. 在过去的十几年中, 欠驱动系统分析和控制设计的挑战性吸引了大量的研究者, 这些研究人员的领域涉及到非线性控制理论、机器人和自动化、自动化交通工具的控制和柔性机构的控制. 对于一般欠驱动机械系统的控制被认为是目前主要的开放问题之一[1].

欠驱动系统控制设计复杂的主要原因是欠驱动系统不能完全反馈线性化. 许多非线性设计方法, 如后推法[2,3]、前馈法[4], 以及高增益/低增益设计[5,6]等, 除了在一些特定的情况下都不能直接用来进行欠驱动系统的控制设计. 一般情况下, 人们感兴趣的非线性系统是非三角规范型[2]、严格反馈型[2]和前馈型[6], 因此希望将欠驱动机械系统的动力学转换成具有这些结构特征的非线性系统. 鉴于此, 本文针对具有动能对称性的欠驱动机械系统, 给出了3种坐标变换, 这些变换可以将欠驱动机械系统的动力学模型转换成结构化的级联非线性系统(严格反馈型、前馈型和非三角型非线性系统). 最后结合3个实例, 说明本文结论的实用性.

2 系统动力学描述

本文考虑一类简单的欠驱动机械系统, 它们的

收稿日期: 2005-04-11; **修回日期**: 2005-06-09.

作者简介: 高丙团(1981—), 男, 江苏淮安人, 博士生, 从事非线性控制与机器人控制的研究; 张晓华(1961—), 男, 哈尔滨人, 教授, 博士生导师, 从事智能机器人与运动控制、机器视觉与自主控制等研究.

拉格朗日算子是以动能(半正定) 和势能之差形式出现[7], 即

$$L(q,\dot{q}) = K - V = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}M(q)\dot{q} - V(q). \quad (1)$$

其中: $q \in Q$ 表示属于 n 维结构流形 Q 的结构向量, $M(q)$ 是一个正定的对称阵表示系统的惯性矩阵; K 和 $V(q)$ 分别表示系统的动能和势能 系统(1) 的欧拉 - 拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = B(q)u. \quad (2)$$

其中: $B(q) = (b_1(q), \cdots, b_l(q))$ 表示外部力矩阵, $u \in \mathrm{R}^l (1 \leq l, l < n, n \geq 2)$ 表示系统的控制输入 对于简单的拉格朗日算子系统的情况, 通过计算, 方程(2) 可表示为如下形式:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)u. \quad (3)$$

其中: $C(q,\dot{q})$ 表示系统的Coriolis 力和离心力矩阵, $G(q)$ 表示系统的重力作用矩阵 将系统的结构向量分解为 $q = \mathrm{col}(q_{n-m}, q_m) \in Q_{n-m} \times Q_m$, 并假定输入力矩阵满足下面的驱动模式:

1) $u = u_2 \in \mathrm{R}^m$ 为控制量, $B(q) = [0, I_m]^{\mathrm{T}}$;

2) $u = u_1 \in \mathrm{R}^{n-m}$ 为控制量, $B(q) = [I_{n-m}, 0]^{\mathrm{T}}$.

则式(3) 可重写为

$$m_{11}(q)\ddot{q}_1 + m_{12}(q)\ddot{q}_2 + f_1(q,\dot{q}) = u_1, \quad (4a)$$

$$m_{21}(q)\ddot{q}_1 + m_{22}(q)\ddot{q}_2 + f_2(q,\dot{q}) = u_2. \quad (4b)$$

其中 f_i 包含Coriolis 力项、离心力项和重力项

对于驱动模式 1) 和 2), 可分别通过可逆的控制输入变换将系统的动力学(4) 转换成[8]

$$\ddot{q}_1 = J(q)v + R(q,\dot{q}), \quad (5a)$$

$$\ddot{q}_2 = v. \quad (5b)$$

其中 v 为新的控制输入量, 针对不同的模式可得到各自的 $J(q)$, $R(q,\dot{q})$. 欠驱动系统(5) 的主要特点是, 控制输入 v 同时出现在了系统的线性和非线性子系统中, 这是欠驱动机械系统控制设计复杂性的主要来源 本文给出一种全局的坐标变换, 它能够在保持系统的线性子系统不变的情况下, 将具有对称性质的欠驱动机械系统的两个子系统关于控制输入解耦, 从而得到级联的非线性系统 所谓对称性质在这里指动能对称, 定义如下:

定义 1(形态变量和动能对称) 考虑一个结构向量为 $q \in Q$ 的简单拉格朗日算子系统, 出现在惯性矩阵中的变量就称为形态变量 如果一个结构变量 q_j 没有出现在惯性矩阵中, 它就称为外部变量 这说明外部变量 q_j 存在等式 $\partial K(q,\dot{q})/\partial q_j = 0$; 同时也说明这个简单拉格朗日算子系统关于外部变量动能对称

3 级联规范型

下面给出具有动能对称性的欠驱动机械系统三角/非三角结构特征的规范型

定理 1(非三角规范型) 考虑具有对称性质 $M(q) = M(q_2)$ 的两自由度欠驱动机械系统(4), 假定形态变量 q_2 是未驱动的, 则可根据系统的拉格朗日算子得到下面的坐标变换:

$$\begin{aligned} &z_1 = q_1 + \Theta(q_2), \\ &z_2 = m_{21}(q_2)\dot{q}_1 + m_{22}(q_2)\dot{q}_2 = \partial L/\partial \dot{q}_2, \\ &\xi_1 = q_2,\ \xi_2 = \dot{q}_2. \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\Theta(q_2) = \int_0^{q_2} m_{21}^{-1}(\theta)m_{22}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \quad (7)$$

在

$$U = \{q_2 \mid m_{21}(q_2) \neq 0\} \quad (8)$$

上将系统的动力学(4) 转换成一个非三角形式的级联非线性系统

证明 根据 z_1 和 z_2 的定义, 得到 $\dot{z}_1 = z_2/m_{21}(q_2)$. 计算得

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \partial L/\partial q_2 = \partial K/\partial q_2 - \partial V(q)/\partial q_2 = \\ &- \partial V(q)/\partial q_2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}m_{11}}{\mathrm{d}q_2}\dot{q}_1^2 + \\ &\frac{\mathrm{d}m_{21}}{\mathrm{d}q_2}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}m_{21}}{\mathrm{d}q_2}\dot{q}_2^2. \end{aligned} \quad (9)$$

令

$$g_1(q_1, q_2) = -\partial V(q)/\partial q_2,$$

同时将

$$\begin{aligned} &q_1 = z_1 - \Theta(q_2), \\ &\dot{q}_1 = (z_2 - m_{22}(q_2)\dot{q}_2)/m_{21}(q_2), \end{aligned}$$

代入式(9), 得到

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = &g_1(z_1 - \Theta(q_2), q_2) + \\ &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}m_{11}}{\mathrm{d}q_2}[z_2 - m_{22}(q_2)\dot{q}_2]^2 + \\ &\frac{\mathrm{d}m_{21}}{\mathrm{d}q_2}[z_2 - m_{22}(q_2)\dot{q}_2]\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}m_{22}}{\mathrm{d}q_2}\dot{q}_2^2. \end{aligned}$$

结合式(6), 即给出了该类欠驱动机械系统的非三角规范型如下:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = &m_{21}^{-1}(\xi_1)z_2, \\ \dot{z}_2 = &g_1(z_1 - \Theta(\xi_1), \xi_1) + \frac{1}{2m_{21}^2}\frac{\mathrm{d}m_{11}}{\mathrm{d}\xi_1}z_2^2 + \\ &\left\{\frac{1}{m_{21}}\frac{\mathrm{d}m_{21}}{\mathrm{d}\xi_1} - \frac{m_{22}}{m_{21}^2}\frac{\mathrm{d}m_{11}}{\mathrm{d}\xi_1}\right\}z_2\xi_2 + \\ &\left\{\frac{m_{22}^2}{2m_{21}^2}\frac{\mathrm{d}m_{11}}{\mathrm{d}\xi_1} - \frac{m_{22}(\xi_1)}{m_{21}(\xi_1)}\frac{\mathrm{d}m_{21}}{\mathrm{d}\xi_1}\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}m_{22}}{\mathrm{d}\xi_1}\right\}\xi_2^2, \\ \dot{\xi}_1 = &\xi_2,\ \dot{\xi}_2 = v. \end{aligned} \quad (10)$$

定理得证. □

定理 2(前馈规范型)　假设定理 1 的所有条件都成立, 且满足如下条件:

1) $g_1(q_1, q_2)$ 不依赖于 q_1, 即 $g_1(q_1, q_2) = g_1(q_2)$;

2) m_{11} 是常量.

那么, 坐标变换

$$x_1 = z_1,\quad x_2 = z_2/m_{21}. \tag{11}$$

将两自由度欠驱动机械系统的规范型(10) 转换成如下形式的前馈级联非线性系统:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2,\\
\dot{x}_2 &= \Phi(\xi_1) + \left\{\frac{1}{2m_{21}}\frac{\mathrm{d}m_{22}}{\mathrm{d}\xi_1} - \frac{m_{22}}{m_{21}^2}\frac{\mathrm{d}m_{21}}{\mathrm{d}\xi_1}\right\}\xi_2^2,\\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2,\quad \dot{\xi}_2 = v.
\end{aligned} \tag{12}$$

证明　根据条件 1) 和条件 2) 直接计算即可得证. □

定理 3　考虑具有对称性质 $M(q) = M(q_2)$ 的两自由度欠驱动机械系统(4), 假定形态变量 q_2 是驱动的, 则可根据系统的拉格朗日算子得到下面的坐标变换:

$$\begin{aligned}
z_1 &= q_1 + \Theta(q_2),\\
z_2 &= m_{11}(q_2)\dot{q}_1 + m_{12}(q_2)\dot{q}_2 = \partial L/\partial\dot{q}_1,\\
\xi_1 &= q_2,\quad \xi_2 = \dot{q}_2.
\end{aligned} \tag{13}$$

将系统的动力学转换成如下形式的严格反馈级联非线性系统:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= m_{11}^{-1}(\xi_1)z_2,\\
\dot{z}_2 &= g_2(z_1 - \Theta(\xi_1), \xi_1),\\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2,\quad \dot{\xi}_2 = v.
\end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$\Theta(q_2) = \int_0^{q_2} m_{11}^{-1}(\theta)m_{12}(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

$$g_2(q_1, q_2) = -\partial V(q)/\partial q_1.$$

证明　根据 z_1 和 z_2 的定义, 则得到 $\dot{z}_1 = m_{11}^{-1}(q_2)z_2$. 注意到 $\partial K/\partial q_1 = 0$, 计算得

$$\dot{z}_2 = \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial K}{\partial q_1} - \frac{\partial V}{\partial q_1} = g_2(z_1, \xi_1),$$

则结果得证. □

对于欠驱动机械系统的这 3 种规范型(即严格反馈、严格前馈和非三角非线性系统), 可分别采用后推法、嵌入饱和法和不动点法进行控制器设计, 由于篇幅所限, 将另文给出.

4　应用举例

下面针对几个欠驱动机械系统的基准例子, 应用本文介绍的坐标变换的方法给出它们的规范型.

例 1　Pendubot[9] 为一个激励在肩部的两连杆机器人, 其动力学方程为

$$\begin{aligned}
&m_{11}(q_2)\ddot{q}_1 + m_{12}(q_2)\ddot{q}_2 - 2b\sin(q_2)\dot{q}_2\dot{q}_1 -\\
&\quad b\sin(q_2)\dot{q}_2^2 + g_1(q_1, q_2) = \tau,\\
&m_{21}(q_2)\ddot{q}_1 + m_{22}(q_2)\ddot{q}_2 +\\
&\quad b\sin(q_2)\dot{q}_1^2 + g(q_1, q_2) = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned}
m_{11}(q_2) &= m_1l_1^2 + m_2(L_1^2 + L_2^2) + I_1 + I_2 +\\
&\quad 2m_2l_2L_1\cos(q_2) =: a + 2b\cos(q_2),\\
m_{22}(q_2) &= m_2l_2^2 + I_2 =: c,\\
m_{12}(q_2) &= m_{21}(q_2) = c + b\cos(q_2),\\
g_1(q_1, q_2) &=\\
&- (m_1l_1 + m_2L_1)g\sin(q_1) - m_2l_2\sin(q_1 + q_2),\\
g_2(q_1, q_2) &= - m_2l_2g\sin(q_1 + q_2).
\end{aligned}$$

m_i, I_i, L_i, l_i, q_i 分别表示第 i 节连杆的质量、长度、质心的长度和关节角度, τ 为控制输入. 显然, q_2 是 Pendubot 机器人的形态变量, 是未驱动的. 因此根据定理 1 应用坐标变换(6) 可得到 Pendubot 的非三角形式的规范型

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2,\\
\dot{z}_2 &= \frac{m_2l_2g\sin(z_1 - \Theta(\xi_1) + \xi_1)}{m_{21}} -\\
&\quad \frac{b\sin(\xi_1)}{m_{21}}\left[\left(z_2 - \frac{m_{22}}{m_{21}}\xi_2\right)^2 + \frac{m_{22}}{m_{21}}\xi_2^2\right],\\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2,\quad \dot{\xi}_2 = v.
\end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$\Theta(q_2) = \int_0^{q_2}\frac{m_{22}(\theta)}{m_{21}(\theta)}\mathrm{d}\theta\Big|_{(c>b,\,q_2\in[-\pi,+\pi])} = \frac{2c}{\sqrt{c^2 - b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}\tan\left(\frac{q_2}{2}\right)\right).$$

例 2　一阶倒立摆系统[10] 为一个车摆系统, 其动力学方程如下:

$$\begin{aligned}
&(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + m_2l\cos(q_2)\ddot{q}_2 - m_2l\sin(q_2)\dot{q}_2^2 = F,\\
&m_2l\cos(q_2)\ddot{q}_1 + (m_2l^2 + I)\ddot{q}_2 - m_2gl\sin(q_2) = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

其中: m_1, m_2, l, I, q_1, q_2 分别表示小车和摆杆的质量、摆杆质心长度、摆杆的惯量、小车的位置和摆杆的角度, F 为控制输入. 一阶倒立摆系统的动力学满足定理 1 的条件, 同时其满足定理 2 的另外两个条件. 因此, 根据定理 2 应用坐标变换(6) 和变换(11) 即得到倒立摆系统的前馈形式的级联规范型

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2,\\
\dot{x}_2 &= g(\xi_1) + \left\{\frac{1}{2m_{21}}\frac{\mathrm{d}m_{22}}{\mathrm{d}\xi_1} - \frac{m_{22}}{m_{21}^2}\frac{\mathrm{d}m_{21}}{\mathrm{d}\xi_1}\right\}\xi_2^2,\\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2,\quad \dot{\xi}_2 = v,
\end{aligned} \tag{18}$$

其中 $g(\xi_1) = m_2 g l \sin(\xi_1)$.

例 3 TORA 系统[3] 有一个移动的振荡平台, 通过一个转动的质体控制, 其动力学方程如下:

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + m_2 r\cos(q_2)\ddot{q}_2 - m_2 r\sin(q_2)\dot{q}_2^2 + kq_1 = 0,$$
$$m_2 r\cos(q_2)\ddot{q}_1 + (m_2 r^2 + I)\ddot{q}_2 + m_2 g r\sin(q_2) = \tau \tag{19}$$

其中: $m_1, m_2, r, I, k, q_1, q_2$ 分别表示小车和摆球的质量、摆杆长度、摆杆的惯量、弹簧常数、小车的位置和摆杆的角度, τ为控制输入. q_1, q_2 分别是TORA 系统的外部变量和形态变量, 且 q_2 是驱动的, 因此根据定理 3, 应用坐标变换(13) 可将 TORA 系统的动力学转换成一个具有严格反馈形式的级联非线性系统, 即

$$\dot{z}_1 = (m_1 + m_2)^{-1} z_2,\ \dot{z}_2 = -k\xi_1 + k\Theta(\xi_1),$$
$$\dot{\xi}_1 = \xi_2,\ \dot{\xi}_2 = v, \tag{20}$$

其中

$$\Theta(q_2) = \int^{q_2} \frac{m_{12}(\theta)}{m_{11}(\theta)} d\theta = \frac{m_2 r\sin(q_2)}{m_1 + m_2}.$$

5 结 语

针对大部分欠驱动机械系统的惯性矩阵都具有动能对称的特性, 本文通过适当的坐标变换将其动力学转换成具有结构特征的级联非线性系统, 即严格反馈、严格前馈和非三角的级联非线性系统. 通过这些规范型, 可使用已有的非线性控制设计方法(如后推法和前馈法), 控制复杂的欠驱动机械系统. 最后, 给出了3 个标准欠驱动机械系统的4 阶级联规范型的例子, 验证了文中提出坐标变换的实用性.

参考文献(References)

[1] Zhang M J, Tzyh-Jong Tarn. A Hybrid Switching Control Strategy for Nonlinear and Underactuated Mechanical Systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(10): 1777-1783.

[2] Isidori. *Nonlinear Control Systems* [M]. New York: Springer-Verlag, 1995.

[3] Jankovic D Fontaine, Kokotovic P V. TORA Example: Cascade and Passivity-based Control Designs[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 1996, 4(3): 292-297.

[4] Kaliora G, Astolfi A. On the Stabilization of Feedforward Systems with Bounded Control [J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(3): 263-270.

[5] Krishnamurthy P, Khorrami F. A High-gain Scaling Technique for Adaptive Output Feedback Control of Feedforward Systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(12): 1777-1783.

[6] Teel R. Nonlinear Small Gain Theorem for the Analysis of Control Systems with Saturation[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 40(9): 1256-1270.

[7] Olfati-Saber R. Normal Forms for Underactuated Mechanical Systems with Symmetry[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(2): 305-308.

[8] Spong M W. Underactuated Mechanical Systems[A]. *Control Problems in Robotics and Automation* [C]. London: Springer-Verlag, 1997: 1-15.

[9] WeLi, Kazuo Tanaka, Hua O Wang. Acrobatic Control of a Pendubot [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2004, 12(4): 549-552.

[10] Casavola A, Mosca E, Papini M. Control under Constraints: An Application of the Command Governor Approach to an Inverted Pendulum [J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2004, 12(1): 193-204.

下 期 要 目