第21卷 第6期
Vol 21 No. 6

控 制 与 决 策
Control and Decision

2006年6月
Jun. 2006

文章编号: 1001-0920(2006)06-0717-04

奇异摄动系统极限解存在的代数判据

钟宁帆, 邹 云

(南京理工大学 自动化学院, 南京 210094)

摘 要: 讨论了线性奇异摄动系统广义状态解当ϵ趋于零时在广义函数空间上的收敛性问题. 在已有结论的基础上, 得到了奇异摄动系统广义状态解收敛的代数判据, 该判据简化了对奇异摄动系统广义状态解收敛性的判别, 为系统控制器设计提供了一种代数条件.

关键词: 奇异摄动; 广义状态解; 代数判据

中图分类号: TP13　　　**文献标识码**: A

Algebraic Criteria for the Convergence of the Solution of Singularly Perturbed System in Distribution Topology

ZHONG Ning-fan, ZOU Yun

(Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: ZHONG Ning-fan, E-mail: zningfan2004@163.com)

Abstract: The convergence of the solution of a linear singularly perturbed system in distribution topology as ϵ tends to zero is considered. Algebraic criteria are proposed to check the convergence of the solution of linear singularly perturbed system, which has potential significance in the controller design.

Key words: Singularly perturbed system; Limiting solution; Algebraic criteria

1 引 言

关于小参数对于系统性能影响的研究近年来得到越来越多的重视[1～5], 大多数工作都集中在研究系统性能对系统中某些小参数的敏感性问题. 从另一个角度说, 这个问题也可认为是一类研究小参数摄动给原系统性能带来的鲁棒性问题.

传统研究的摄动模型具有如下形式:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t),\\ \epsilon\dot{x}_2(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t),\end{aligned}\quad (1)$$

其中$t\geq 0$. 由于ϵ很小, 在实际工程中往往将它取零加以忽略, 这样造成了原系统高频动态缺失. 在一定情况下, 这种忽略会带来降阶后系统相对于原系统性能的奇异性.

对系统(1) 研究的主要方法为快慢分解法[6], 该方法通过研究一个解耦的且不含小参数的系统来近似研究原系统. 但也有很多工作集中在研究摄动系统在一定拓扑下的极限系统, 希望能通过极限系统的解来对原系统的性质进行较为精确的研究. 如在文献[7～10]中研究了系统(1) 的广义状态解在广义函数空间上的收敛性.

对于摄动系统, 为了方便在广义函数空间[11]上研究系统(1) 广义状态解在$t\in[0,\infty)$上的收敛性, 可将系统(1) 直接描述为具有下述一般形式的广义微分方程表达式[9]:

$$E_\epsilon\dot{x}_+(t) = A_\epsilon x_+(t) + B_\epsilon u_+(t) + x_\epsilon(0)\delta,\quad t\geq 0. \quad (2)$$

其中: $x_\epsilon(0)$为初始状态, $E_\epsilon, A_\epsilon\in R^{n\times n}$; $B_\epsilon\in R^{n\times m}$, δ为脉冲函数且

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}[E_\epsilon, A_\epsilon, B_\epsilon, x_\epsilon(0)] = [E, A, B, x(0)], \quad (3)$$

E_ϵ非奇异, 但E奇异. 文献[9]在广义函数空间上研

收稿日期: 2005-04-25; **修回日期**: 2005-06-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60474078, 60304001).

作者简介: 钟宁帆(1979—), 男, 四川雅安人, 博士生, 从事奇异摄动、奇异系统等研究; 邹云(1962—), 男, 江苏宜兴人, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统、复杂系统等研究.

究了当 ϵ 趋于零时, 摄动系统(2) 广义状态解的收敛性问题, 给出了解收敛的充要条件. 文献[7,8]利用 Laplace 变换研究了相同的问题.

本文在文献[8,9]所得结论的基础上, 针对具有形式(1)的摄动系统进一步给出了该系统广义状态解收敛的代数判据. 所给条件不但形式简单, 容易判断, 而且进一步揭示出系统(1)的广义状态解的收敛性与状态解的渐近稳定性之间的关系, 对于控制器的设计有一定价值.

2 主要结果

对于系统(2), 假定其极限系统正则, 即存在 $\alpha_0 \in R$ 使得 $(\alpha_0 E + A)$ 可逆. 一般的, 存在可逆变换 $x_+ = e^{-\alpha_\epsilon t} z_+$, 可将系统(2)变换为如下用广义微分方程描述的形式[8]:

$$\bar{E}_\epsilon \dot{z}_+ = z_+ + \bar{B}_\epsilon u_+ + \bar{E}_\epsilon z_\epsilon(0)\delta \tag{4}$$

其中: $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \bar{E}_\epsilon = \bar{E}$, $\bar{E}_\epsilon$ 非奇异, 但 $\bar{E}$ 奇异.

引理 1[9] 奇异摄动系统(4)的广义状态解收敛的充要条件为: 存在常数 M_0 和 $\epsilon_0 > 0$, 使得对一切 $\epsilon_0 > \epsilon > 0$ 有 $\lambda(\bar{E}_\epsilon^{-1}) \subset \{z: \mathrm{Re}\, z \le M_0\}$.

下面将针对奇异摄动系统(1)给出判断其广义状态解收敛的一个充分条件.

首先, 将原系统等价地改写为广义函数微分方程形式

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1+} &= A_{11}x_{1+} + A_{12}x_{2+} + B_1u_+ + x_{1\epsilon}(0)\delta, \\ \epsilon\dot{x}_{2+} &= A_{21}x_{1+} + A_{22}x_{2+} + B_2u_+ + x_{2\epsilon}(0)\delta \end{aligned} \tag{5}$$

为方便起见, 在上式中令

$$E_\epsilon = \begin{bmatrix} I_{n1} & 0 \\ 0 & \epsilon I_{n2} \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} I_{n1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

$$z_+ = \begin{bmatrix} z_{1+} \\ z_{2+} \end{bmatrix},\ x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}.$$

其中 (E, A) 正则, 即存在 $\alpha_0 \in R$ 使得 $(\alpha_0 E + A)$ 可逆, 故存在 $\alpha_\epsilon \in R$, 使得 $(\alpha_\epsilon E_\epsilon + A)$ 可逆, 且 $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \alpha_\epsilon = \alpha_0$, $\lim\limits_{\epsilon\to 0} E_\epsilon = E$.

类似于文献[9]中的做法, 令 $x_{1+} = e^{-\alpha_\epsilon t} z_{1+}$, $x_{2+} = e^{-\alpha_\epsilon t} z_{2+}$, 可将上述系统化为

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1+} &= (\alpha_\epsilon I_{n1} + A_{11}) z_{1+} + A_{12}x_{2+} + \\ &\quad B_1u_+ + x_{10}(\epsilon)\delta, \\ \epsilon\dot{z}_{2+} &= A_{21}z_{1+} + (A_{22} + \epsilon\alpha_\epsilon) z_{2+} + \\ &\quad B_2u_+ + \epsilon x_{20}(\epsilon)\delta \end{aligned} \tag{6}$$

令

$$A_\epsilon = \begin{bmatrix} \alpha_\epsilon I_{n1} + A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} + \epsilon\alpha_\epsilon I_{n2} \end{bmatrix} = \alpha_\epsilon E_\epsilon + A,$$

则 A_ϵ 可逆. 故可令 $\bar{E}_\epsilon = A_\epsilon^{-1} E_\epsilon$, 原系统也可相应的化为

$$\dot{z}_+ = \bar{E}_\epsilon^{-1} z_+ + \bar{E}_\epsilon^{-1} B u_+ + x_0(\epsilon)\delta \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned} &\bar{E}_\epsilon^{-1} = \\ &\begin{bmatrix} I_{n1} & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} I_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_\epsilon I_{n1} + A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} + \epsilon\alpha_\epsilon I_{n2} \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} \alpha_\epsilon I_{n1} + A_{11} & A_{12} \\ \epsilon^{-1} A_{21} & \epsilon^{-1} A_{22} + \alpha_\epsilon I_{n2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因此, 根据文献[9]中的结果, 系统广义状态解收敛当且仅当 $\bar{E}_\epsilon^{-1}$ 特征值的实部具有上界. 下面给出本文的主要结果.

定理 1 当 $\mathrm{Re}(\lambda(A_{22})) < 0$ 时, 存在常数 M_0 和 $\epsilon_0 > 0$, 使得对一切 $\epsilon_0 > \epsilon > 0$, 有

$$\lambda(\bar{E}_\epsilon^{-1}) \subset \{z: \mathrm{Re}\, z \le M_0\}, \tag{8}$$

即当 $\lambda(A_{22})$ 位于负半平面时奇异摄动系统(4)的广义状态解收敛于其极限奇异系统的广义状态解.

证明 $\bar{E}_\epsilon^{-1}$ 的 n 阶特征多项式为

$$\begin{aligned} &p_\epsilon(s) = \\ &\det\begin{bmatrix} sI_{n1} - \alpha_\epsilon I_{n1} - A_{11} & -A_{12} \\ -\epsilon^{-1}A_{21} & sI_{n2} - \epsilon^{-1}A_{22} - \alpha_\epsilon I_{n2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{9}$$

另外, 令多项式

$$\begin{aligned} &q_\epsilon(t) = \\ &\det\begin{bmatrix} tI_{n1} - \epsilon\alpha_\epsilon I_{n1} - \epsilon A_{11} & -\epsilon A_{12} \\ -A_{21} & tI_{n2} - A_{22} - \epsilon\alpha_\epsilon I_{n2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

显然, 当 $\epsilon \to 0$ 时, $q_\epsilon(t) \to q_0(t) = t^{n1}\det(tI_{n2} - A_{22})$, 即 $q_\epsilon(t)$ 中的各项系数都趋于 $q_0(t)$ 中的相应项系数. 令 $q_0(t) = 0$ 的非零根为 μ_i, $i = 1, 2, \cdots, n_2$, 显然 μ_i 为 A_{22} 特征值且 $\mathrm{Re}(\mu_i) < 0$.

因为

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} sI_{n1} - \alpha_\epsilon I_{n1} - A_{11} & -A_{12} \\ -\epsilon^{-1}A_{21} & sI_{n2} - \epsilon^{-1}A_{22} - \alpha_\epsilon I_{n2} \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} \epsilon^{-1} I_{n1} & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} I_{n2} \end{bmatrix} \times \\ &\begin{bmatrix} s\epsilon I_{n1} - \epsilon\alpha_\epsilon I_{n1} - \epsilon A_{11} & -\epsilon A_{12} \\ -A_{21} & s\epsilon I_{n2} - A_{22} - \epsilon\alpha_\epsilon I_{n2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{11}$$

因此 $\epsilon^{-n} q_\epsilon(s\epsilon) = p_\epsilon(s)$, 又因为 $\epsilon > 0$, 所以

$$\begin{aligned} &p_\epsilon(s) = 0 \Leftrightarrow \\ &\det\begin{bmatrix} s\epsilon I_{n1} - \epsilon\alpha_\epsilon I_{n1} - \epsilon A_{11} & -\epsilon A_{12} \\ -A_{21} & s\epsilon I_{n2} - A_{22} - \epsilon\alpha_\epsilon I_{n2} \end{bmatrix} = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

即
$$p_\epsilon(s)=0\Leftrightarrow q_\epsilon(s\epsilon)=0.$$

令 s_j 为 $p_\epsilon(s)=0$ 的根, 则根据式(12), 显然 s_j 为 $p_\epsilon(s)=0$ 的根当且仅当 ϵs_j 为 $q_\epsilon(s\epsilon)=0$ 的根, $j=1,2,\cdots,n$. 因为当 $\epsilon\to 0$ 时, $q_\epsilon(t)\to q_0(t)=t^{n_1}\det(tI_{n_2}-A_{22})$, 又因为多项式的根连续依赖于多项式系数, 所以当 $\epsilon\to 0$ 时 ϵs_j 趋于 $q_0(t)=0$ 的根, 即 ϵs_j 中有 n_1 个根趋于零, 另有 n_2 个根趋于 μ_i. 因此, 存在 n_2 个 $q_\epsilon(s\epsilon)=0$ 的根满足 $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\epsilon s_i=\mu_i$, $i=1,2,\cdots,n_2$. 由于 $\epsilon>0$, 又因为 $\lambda(A_{22})$ 位于负半平面且为有限值, 故当 $\epsilon\to 0$ 时, $p_\epsilon(s)=0$ 有 n_2 个根的实部趋向于负无穷.

又因为 A_ϵ 可逆, 故 $s=0$ 不为 $p_\epsilon(s)=0$ 的根. 所以, 对于 $\forall\epsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}&p_\epsilon(s)=0\Leftrightarrow\\&\det\begin{bmatrix}I_{n_1}-s^{-1}(\alpha_\epsilon I_{n_1}+\epsilon A_{11}) & -s^{-1}A_{12}\\ -(s\epsilon)^{-1}A_{21} & I_{n_2}-s^{-1}(\epsilon^{-1}A_{22}+\alpha_\epsilon I_{n_2})\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow\\&\det\begin{bmatrix}I_{n_1}-s^{-1}(\alpha_\epsilon I_{n_1}+\epsilon A_{11}) & -s^{-1}A_{12}\\ -s^{-1}A_{21} & \epsilon I_{n_2}-s^{-1}(A_{22}+\epsilon\alpha_\epsilon I_{n_2})\end{bmatrix}=\hat q_\epsilon(s^{-1})=0.\end{aligned}\tag{13}$$

令 $s^{-1}=t$, $p_\epsilon(s)=0\Leftrightarrow\hat q_\epsilon(t)=0$, 且 $\epsilon^{n_2}p_\epsilon(s)=\hat q_\epsilon(s^{-1})$, 则

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0}\hat q_\epsilon(t)=\det\begin{bmatrix}I_{n_1}-t(A_{11}+\alpha_0 I_{n_1}) & -tA_{12}\\ -tA_{21} & -tA_{22}\end{bmatrix}=\\&(-1)^{n_2}\det(tA_{22})\det(I_{n_1}-t(A_{11}+\\&\alpha_0 I_{n_1}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})),\end{aligned}\tag{14}$$

故 $p_\epsilon(s)=0$ 有 n_1 个根的实部趋于有限值.

综上, 若 A_{22} 的特征值在负半平面, 当 $\epsilon\to 0$ 时, $p_\epsilon(s)=0$ 所有根的极限值的实部都有有限上界. 而根据代数多项式的性质[2], 可知 $p_\epsilon(s)=p(\epsilon,s)=0$ 的根是 ϵ 的连续函数, 所以存在常数 M_0, $\epsilon_0>0$ 使得对一切 $\epsilon_0>\epsilon>0$ 均有 $\lambda(\overline{E}_\epsilon^{-1})\subset\{z:\mathrm{Re}\,z\le M_0\}$, 故定理成立. □

从定理 1 可以看出, 若系统(1) 中 A_{22} 的特征值在负半平面, 则当 ϵ 趋于零时, 系统的极限解存在, 并根据文献[9] 可知, 该极限解恰为极限系统的广义状态解. 对于 A_{22} 特征值在虚轴及正半平面的情形还需要作进一步讨论.

从以上结论容易看出, 本文中所提出的奇异摄动系统广义状态解收敛的代数条件与文献[6] 中奇异摄动系统的稳定性条件有一定的联系, 两者都要求 A_{22} 的特征值在负半平面; 但是广义状态解收敛并不要求摄动系统稳定, 即广义状态解收敛的条件要比系统稳定的条件更弱. 因此, 这种方法能涵盖更加广泛的系统. 对于非正规问题[10] 的研究也提供了一种可能的途径.

3　算　　例

考察系统

$$\begin{aligned}\dot x_1&=2x_1+x_2+x_3+u,\\ \epsilon\dot x_2&=-x_2+3x_3+2u,\\ \epsilon\dot x_3&=-2x_2-x_3+u.\end{aligned}\tag{15}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&-1&3\\0&-2&-1\end{bmatrix},\quad E_\epsilon=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\epsilon&0\\0&0&\epsilon\end{bmatrix},$$

$A_{22}=\begin{bmatrix}-1&3\\-2&-1\end{bmatrix}$ 的特征值实部小于零.

取 $\alpha_0=0$ 时, $\det(\alpha_0 E+A)\neq 0$; 取 $\alpha_\epsilon=\epsilon$ 时,

$\overline{E}_\epsilon^{-1}=\begin{bmatrix}\epsilon+2&1&1\\0&\epsilon-\epsilon^{-1}&3\epsilon^{-1}\\0&-2\epsilon^{-1}&\epsilon-\epsilon^{-1}\end{bmatrix}$. 容易验证, 当 $\epsilon\to 0$ 时, $\lambda_1\to 2$, $\mathrm{Re}(\lambda_{2,3})\to-\infty$. 通过算例可以验证本文所得结论的有效性.

4　结　　论

本文讨论了线性奇异摄动系统广义状态解在广义函数空间上的收敛性问题, 在已有结论的基础上给出了奇异摄动系统广义状态解收敛的代数条件. 从所给代数条件可以看出, 奇异摄动系统广义状态解的收敛性与摄动系统解的稳定性之间存在一定关系. 讨论奇异摄动系统广义状态解的收敛性有助于对该系统性能的进一步研究.

参考文献(References)

[1] Nguyen Huu Du. Implicit-system Approach to the Robust Stability for a Class of Singularly Perturbed Linear Systems [J]. *Systems and Control Letters*, 2005, 54(1), 33-41.

[2] Zoran Gajic, High Accuracy Techniques for Singularly Perturbed Optimal Control and Filtering Problems[J]. *Int Conf on Continuous, Discrete & Impulsive Systems* [C]. London, 2001: 1-55.

[3] 刘华平, 孙富春, 何克忠, 等. 奇异摄动控制系统: 理论与应用[J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(1): 1-7.
(Liu H P, Sun F C, He K Z, et al. Survey of Singularly Perturbed Control Systems: Theory and Application [J]. *Control Theory and Applications*, 2003, 20(1): 1-7.)

[4] 刘华平, 孙富春, 李春文, 等. 时滞模糊奇异摄动系统的 H_2 次优控制[J]. *控制理论与应用*, 2005, 22(1): 86-91.

(Liu H P, Sun F C, Li C W, et al. H-two Sub-optimal Control for Fuzzy Time-delay Singularly Perturbed Systems[J]. *Control Theory and Applications*, 2005, 22(1): 86-91.)

[5] 王宪杰, 高存臣. 线性不确定奇异摄动系统的稳定控制鲁棒界[J]. *控制与决策*, 2003, 18(4): 487-493.

(Wang X J, Gao C C. Robust Bounds of Stable Controllers for Linear Uncertain Singular Perturbation System[J]. *Control and Decision*, 2003, 18(4): 487-493.)

[6] 许可康. *控制系统中的奇异摄动*[M]. 北京: 科学出版社, 1986.

(Xu K K. *Singular Perturbation in Control Systems* [M]. Beijing: Science Press, 1986.)

[7] Daniel Cobb. On the Solution of Linear Differential Equations with Singular Coefficients[J]. *J of Differential Equations*, 1982, 46(2): 310-323.

[8] Bruce A Francis. Convergence in the Boundary Layer for Singularly Perturbed Equations[J]. *Automatica*, 1982, 18(2): 57-62.

[9] 邹云, 杨成梧. 奇异摄动系统的极限解[J]. *自动化学报*, 1993, 19(3), 356-360.

(Zou Y, Yang C W. On the Interpretations for the Solutions of Differential Equations with Singular Coefficients[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1993, 19(3): 356-360.)

[10] Alexander Vigodner. Limits of Singularly Perturbed Control Problems with Statistical Dynamics of Fast Motions[J]. *SIAM J of Control Optimization*, 1997, 35(1): 1-28.

[11] Gelfand J M, Shilov G E. *Generalized Functions* [M]. New York: Academic Press, 1964.

[12] 黄琳. *系统与控制理论中的线性代数*[M]. 北京: 科学出版社, 1984.

(Huang L. *The Linear Algebra in System and Control Theory* [M]. Beijing: Science Press, 1984.)

(上接第 716 页)

[5] 仲崇权, 张立勇, 杨素英, 等. 基于最小二乘原理的多传感器加权融合算法[J]. *仪器仪表学报*, 2003, 24(4): 427-430.

(Zhong C Q, Zhang L Y, Yang S Y, et al. A Weighted Fusion Algorithm of Multisensor Based on the Principle of Least Squares[J]. *Chinese J of Scientific Instrument*, 2003, 24(4): 427-430.)

[6] 凌林本, 李滋刚, 陈超英, 等. 多传感器数据融合时权的最优分配准则[J]. *中国惯性技术学报*, 2000, 8(2): 36-39.

(Ling L B, Li Z G, Chen C Y, et al. Optimal Weight Distribution Principle Used in the Fusion of Multisensor Data[J]. *J of Chinese Inertial Technology*, 2000, 8(2): 36-39.)

[7] Fukunaga K, Flick T E. A Test of the Gaussian-ness of a Data Set Using Clustering[J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1986, 8(2): 240-247.

[8] John M Richardson, Kenneth A March. Fusion of Multisensor Data[J]. *The Int J of Robotics Research*, 1988, 7(6): 78-96.

[9] 钱同惠, 沈其聪, 葛晓滨. *模糊逻辑及其工程应用*[M]. 北京: 电子工业出版社, 2001: 255-287.

(Qian T H, Shen Q C, Ge X B. *Fuzzy Logic with Engineering Applications* [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2001: 255-287.)

[10] 施雨, 李耀武. *概率论与数理统计应用*[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998: 35-50.

(Shi Y, Li Y W. *Probability and Statistics* [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1998: 35-50.)

[11] 涂国平. 多传感器数据融合的稳健处理方法[J]. *数据采集与处理*, 1998, 13(1): 85-87.

(Tu G P. A Robust Method for the Data Fusion[J]. *J of Data Acquisition and Processing*, 1998, 13(1): 85-87.)