第21卷 第7期 控 制 与 决 策 2006年7月
Vol 21 No. 7 Control and Decision July 2006

文章编号: 1001-0920(2006)07-0739-06

一类高速采样不确定系统的鲁棒H∞滤波器设计

张 瑞, 姚 郁, 陈松林, 马克茂
(哈尔滨工业大学 控制与仿真中心, 哈尔滨 150001)

摘 要: 研究含有多面体参数摄动Delta算子系统的鲁棒H_∞滤波问题. 基于Delta算子系统有界实引理,提出了新的参数依赖型鲁棒H_∞性能准则. 利用该性能准则, 采用线性矩阵不等式技术推导了此类系统全阶鲁棒H_∞滤波器存在的充分条件,并通过求解一个凸优化问题来设计滤波器. 与基于二次稳定的滤波方案相比,该方法具有较小的保守性. 最后以数值示例验证了所提出方法的可行性.

关键词: H_∞滤波; 线性矩阵不等式; 有界实引理
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Robust H∞ Filter Design for a Class of High-speed Sampling Uncertain Systems

ZHANG Rui, YAO Yu, CHEN Song-lin, MA Ke-mao
(Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: ZHANG Rui, E-mail: zhangruimyth@sina.com)

Abstract: The problem of robust H_∞ filtering for Delta operator formulated systems with uncertain parameters residing in a polytope is investigated. Based on the bounded real lemma, new robust H_∞ performance criterion by means of parameter-dependent Lyapunov function is presented. According to the new performance criterion, a sufficient condition for the full-order robust H_∞ filter is derived in terms of linear matrix inequalities. The designed filter can be obtained from the solution of a convex optimization problem. The proposed filter design procedure is less conservative than the strategy based on the quadratic stability notion. A numerical example is given to show the feasibility of the proposed approach.

Key words: H_∞ filtering; Linear matrix inequality; Bounded real lemma

1 引 言

卡尔曼滤波理论在线性估计中受到广泛的关注. 然而该方法对于数学模型和噪声输入的要求非常严格,在实际问题中经常出现滤波发散. 为此,国内外学者针对这一问题进行了大量研究,使得鲁棒滤波理论得到深入的发展. 鲁棒H_∞滤波[1~3]是综合考虑存在模型不确定性和非高斯噪声输入情况下的滤波算法,其滤波器设计的主要依据是使滤波误差系统传递函数的H_∞范数小于给定值.

Delta算子或变换作为一种新的离散化方法[4],在控制和信号处理领域获得了许多成果[5]. Delta算子系统滤波所取得的主要成果中,对不确定参数的描述采用最多的是范数有界不确定性[6~8],但用多面体描述不确定性是一种更为自然的方式[9]. 在研究具有参数不确定性系统时,广泛应用了二次稳定的概念,即对于所有允许的不确定参数,求解一个固定Lyapunov函数. 但在这种严格的条件下导出的结果会有较大的保守性,为此许多学者致力于寻找保守性更弱的条件. Oliveira等[10]针对一类含有多面体参数摄动离散系统,提出一种基于参数依赖型Lyapunov矩阵的鲁棒稳定分析和控制综合的方法. 该方法通过引进新变量,将耦合的系统矩阵和Lyapunov矩阵分离,使得Lyapunov函数与系统不确定性相关联,从而得到保守性更弱的结果. 然而到

收稿日期: 2005-05-16; **修回日期**: 2005-09-02
作者简介: 张瑞(1977—),男,山东胶南人,博士生,从事高速采样系统、鲁棒控制等研究; 姚郁(1963—),男,黑龙江北安人,教授,博士生导师,从事非线性系统、计算机控制等研究.

目前为止,利用Oliveira 等人的思想,解决含多面体不确定性Delta 算子系统鲁棒H_∞滤波问题的研究成果还不多见

本文针对含有多面体不确定性的Delta 算子描述的系统,讨论了鲁棒H_∞滤波问题 设计方法是基于Oliveira 等人的参数依赖型Lyapunov 函数的思想,在Delta 算子有界实引理的基础上推导新的参数依赖型H_∞性能准则,利用该准则推导此类不确定系统的全阶鲁棒H_∞滤波器存在的充分条件,并将滤波器的设计转化为一个凸优化求解问题 最后通过数值示例验证了该滤波器设计方法的可行性

2 问题描述

考虑如下Delta 算子描述的线性系统:

$$\begin{cases}\delta x(k) = Ax(k) + B\omega(k),\\ y(k) = Cx(k) + D\omega(k),\\ z(k) = Lx(k).\end{cases} \tag{1}$$

式中: $x(k) \in \mathrm{R}^n$ 为状态变量, $\omega(k) \in \mathrm{R}^q$ 为噪声输入, $y(k) \in \mathrm{R}^m$ 为测量输出, $z(k) \in \mathrm{R}^p$ 为待估计信号; A, B, C, D, L 为不确定性矩阵,属于多面体集合

$$M \triangleq (A, B, C, D, L) \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

式中

$$\mathbf{R} \triangleq \left\{M \,\middle|\, M = \sum_{i=1}^{N} \tau_i M_i,\ \tau_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N} \tau_i = 1\right\},$$

$M_i \triangleq (A_i, B_i, C_i, D_i, L_i)$ 称为顶点矩阵

构造如下形式的全阶滤波器:

$$\begin{cases}\delta x_f(k) = A_f x_f(k) + B_f y(k),\\ z_f(k) = C_f x_f(k),\end{cases} \tag{3}$$

则滤波误差系统状态方程为

$$\begin{cases}\delta \bar{x}(k) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}\omega(k),\\ \bar{z}(k) = \bar{C}\bar{x}(k).\end{cases} \tag{4}$$

式中

$$\begin{cases}\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ B_f D \end{bmatrix},\\ \bar{C} = [L \quad -C_f],\\ \bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_f(k) \end{bmatrix}, \bar{z}(k) = z(k) - z_f(k).\end{cases} \tag{5}$$

则噪声信号 $\omega(k)$ 到估计误差 $\bar{z}(k)$ 的 γ 传递函数为

$$T(\gamma) = \bar{C}(\gamma I - \bar{A})^{-1}\bar{B}. \tag{6}$$

定义1 式(6)中传递函数 $T(\gamma)$ 的 H_∞ 范数定义为

$$\|T(\gamma)\|_\infty = \sup_{0 \neq \omega \in l_2} \frac{\|\bar{z}\|_{l_2}}{\|\omega\|_{l_2}}. \tag{7}$$

式中

$$\|\bar{z}\|_{l_2} = \left[T\sum_{k=0}^{\infty} \bar{z}^{\mathrm{T}}(k)\bar{z}(k)\right]^{1/2},$$

$$\|\omega\|_{l_2} = \left[T\sum_{k=0}^{\infty} \omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k)\right]^{1/2}.$$

本文要研究的问题是对于系统(1),设计形如式(3)的滤波器,使滤波误差系统(4)稳定,并使噪声信号 $\omega(k)$ 到估计误差 $\bar{z}(k)$ 的 γ 传递函数满足

$$\|T(\gamma)\|_\infty < \alpha,\ \alpha > 0.$$

3 主要结果

3.1 鲁棒H_∞性能准则

引理1(Delta 算子有界实引理)[11] 考虑系统(1),设 $M \in \mathbf{R}$ 为确定性矩阵,则滤波误差系统(4)稳定且 $\|T(\gamma)\|_\infty < \alpha(\alpha > 0)$,其充要条件为存在矩阵 $0 < P = P^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{2n\times 2n}$,满足

$$(T\bar{A} + I)^{\mathrm{T}}P\bar{B}(\alpha^2 I - T\bar{B}^{\mathrm{T}}P\bar{B})^{-1}\bar{B}^{\mathrm{T}}P(T\bar{A} + I) + \bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A} + T\bar{A}^{\mathrm{T}}P\bar{A} + \bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C} < 0, \tag{8}$$

$$\alpha^2 I - T\bar{B}^{\mathrm{T}}P\bar{B} > 0, \tag{9}$$

式中 T 为采样周期

基于引理1,易得如下H_∞滤波的充要条件:

定理1 考虑系统(1),设 $M \in \mathbf{R}$ 为确定性矩阵,则滤波误差系统(4)稳定且 $\|T(\gamma)\|_\infty < \alpha(\alpha > 0)$,其充要条件为存在矩阵 $0 < S = S^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{2n\times 2n}$,满足

$$\begin{bmatrix} -S & \sqrt{T}S\bar{C}^{\mathrm{T}} & S(T\bar{A} + I)^{\mathrm{T}} & 0 \\ \sqrt{T}\bar{C}S & -I & 0 & 0 \\ (T\bar{A} + I)S & 0 & -S & \sqrt{T}\bar{B} \\ 0 & 0 & \sqrt{T}\bar{B}^{\mathrm{T}} & -\alpha^2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{10}$$

证明 取 $S = P^{-1}$,由Schur 补引理得式(10)等价于

$$(T\bar{A} + I)^{\mathrm{T}}(P^{-1} - \alpha^{-2}T\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}})^{-1}(T\bar{A} + I) - P + T\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C} < 0 \tag{11}$$

和式(9). 由矩阵求逆公式

$$(X^{-1} + YZ)^{-1} = X - XY(I + ZXY)^{-1}ZX,$$

则式(11)可写为式(8),定理得证 □

由多面体不确定系统的内在特性,易得不确定系统鲁棒H_∞性能准则

推论1 考虑系统(1),设 $M \in \mathbf{R}$ 为不确定系统矩阵,则滤波误差系统(4)稳定且 $\|T(\gamma)\|_\infty < \alpha(\alpha > 0)$,其充分条件为存在矩阵 $0 < S = S^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{2n\times 2n}$,满足

$$\begin{bmatrix} -S & \sqrt{T}S\bar{C}_i^{\mathrm{T}} & S(T\bar{A}_i + I)^{\mathrm{T}} & 0 \\ \sqrt{T}\bar{C}_i S & -I & 0 & 0 \\ (T\bar{A}_i + I)S & 0 & -S & \sqrt{T}\bar{B}_i \\ 0 & 0 & \sqrt{T}\bar{B}_i^{\mathrm{T}} & -\alpha^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

$$i = 1, 2, \cdots, N. \tag{12}$$

式中$(\bar{A}_i,\bar{B}_i,\bar{C}_i)$为系统(4)的顶点矩阵, 可由系统(1)的顶点矩阵和滤波器矩阵求出

推论 1 为基于二次稳定概念的含多面体不确定性Delta 算子系统的鲁棒H_∞性能准则, 即要求对于系统的所有不确定参数, 存在统一的正定对称矩阵S满足上述条件

定理 2　考虑系统(1), 设$M \in \mathbf{R}$为确定性矩阵, 则滤波误差系统(4)稳定且$\|T(\gamma)\|_\infty < \alpha(\alpha > 0)$, 其充要条件为存在矩阵$0 < S = S^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{2n\times 2n}$, $G \in \mathrm{R}^{2n\times 2n}$, 满足

$$\begin{bmatrix} S - G^{\mathrm{T}} - G & \sqrt{T}\,G^{\mathrm{T}}\bar{C}^{\mathrm{T}} & G^{\mathrm{T}}(T\bar{A} + I)^{\mathrm{T}} & 0 \\ \sqrt{T}\,\bar{C}G & -I & 0 & 0 \\ (T\bar{A} + I)G & 0 & -S & \sqrt{T}\,\bar{B} \\ 0 & 0 & \sqrt{T}\,\bar{B}^{\mathrm{T}} & -\alpha^2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{13}$$

证明　若证明定理成立, 只需证明式(10)与式(13)等价即可

将式(10)进一步写为

$$\begin{bmatrix} S - S - S & \sqrt{T}\,S\bar{C}^{\mathrm{T}} & S(T\bar{A} + I)^{\mathrm{T}} & 0 \\ \sqrt{T}\,\bar{C}S & -I & 0 & 0 \\ (T\bar{A} + I)S & 0 & -S & \sqrt{T}\,\bar{B} \\ 0 & 0 & \sqrt{T}\,\bar{B}^{\mathrm{T}} & -\alpha^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

选择$G = G^{\mathrm{T}} = S$, 代入上式可得式(13), 说明由式(10)可推出式(13).

另一方面, 若式(13)成立, 则有$S - G^{\mathrm{T}} - G < 0$ 考虑到$S > 0$, 可知G可逆 定义矩阵$T_1 = (G - S)^{\mathrm{T}}S^{-1}(G - S)$, 则有$T_1 \geq 0$, $G^{\mathrm{T}}S^{-1}G - G^{\mathrm{T}} - G + S \geq 0$, 进而可得$-G^{\mathrm{T}}S^{-1}G \leq S - G^{\mathrm{T}} - G$. 由式(13)可推出

$$\begin{bmatrix} -G^{\mathrm{T}}S^{-1}G & \sqrt{T}\,G^{\mathrm{T}}\bar{C}^{\mathrm{T}} & G^{\mathrm{T}}(T\bar{A} + I)^{\mathrm{T}} & 0 \\ \sqrt{T}\,\bar{C}G & -I & 0 & 0 \\ (T\bar{A} + I)G & 0 & -S & \sqrt{T}\,\bar{B} \\ 0 & 0 & \sqrt{T}\,\bar{B}^{\mathrm{T}} & -\alpha^2 I \end{bmatrix} < 0.$$

使用$T_2 = \mathrm{diag}\{G^{-1}S, I, I, I\}$对上式进行全等变换, 可得式(10), 说明由式(13)可推出式(10). 定理得证 □

将其推广, 可得另一多面体不确定系统的鲁棒H_∞性能准则

推论 2　考虑系统(1), 设$M \in \mathbf{R}$为不确定系统矩阵, 则滤波误差系统(4)稳定且$\|T(\gamma)\|_\infty < \alpha(\alpha > 0)$, 其充分条件为存在矩阵$G \in \mathrm{R}^{2n\times 2n}$, $0 < S_i = S_i^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{2n\times 2n}$, 满足

$$\begin{bmatrix} S_i - G^{\mathrm{T}} - G & \sqrt{T}\,G^{\mathrm{T}}\bar{C}_i^{\mathrm{T}} & G^{\mathrm{T}}(T\bar{A}_i + I)^{\mathrm{T}} & 0 \\ \sqrt{T}\,\bar{C}_iG & -I & 0 & 0 \\ (T\bar{A}_i + I)G & 0 & -S_i & \sqrt{T}\,\bar{B}_i \\ 0 & 0 & \sqrt{T}\,\bar{B}_i^{\mathrm{T}} & -\alpha^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

$$i = 1, 2, \cdots, N. \tag{14}$$

对于确定性系统而言, 引理 1 与定理 2 等价, 二者的区别在于定理 2 通过引入一个新矩阵变量G, 消除了引理 1 中系统矩阵与Lyapunov 矩阵之间的耦合, 因而将其应用于多面体不确定系统时, 可以得到与系统不确定性相关联的Lyapunov 函数(见推论 2). 即将多面体中任意一点表示为$\bar{M}(\tau) = \sum_{i=1}^{N}\tau_i(\bar{A}_i,\bar{B}_i,\bar{C}_i)$. 其中$\tau = (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_N)$是一$N$维向量, 随多面体中点的不同而变化

不难证明, 若式(14)成立, 则$\bar{M}(\tau)$点处对应的正定矩阵为$S(\tau) = \sum_{i=1}^{N}\tau_i S_i$, 说明整个多面体中Lyapunov 矩阵随$\tau$的不同而变化, 即随$\bar{M}(\tau)$变化而变化 而二次稳定方法为所有顶点共用一个固定Lyapunov 矩阵(见推论 1), 因而推论 2 基于参数依赖型的鲁棒H_∞性能准则具有较低的保守性 类似处理方法参见文献[10, 12].

3.2　鲁棒H_∞滤波器设计

定理 3　考虑系统(1), 设$M \in \mathbf{R}$为确定性矩阵, 则滤波误差系统(4)稳定且$\|T(\gamma)\|_\infty < \alpha(\alpha > 0)$, 形如式(3)的$H_\infty$滤波器存在的充要条件为: 存在矩阵$0 < \bar{S}_{11} = \bar{S}_{11}^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\bar{S}_{12} = \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $0 < \bar{S}_{22} = \bar{S}_{22}^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $R \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $F \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $U \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\bar{A}_f \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\bar{B}_f \in \mathrm{R}^{n\times m}$, $\bar{C}_f \in \mathrm{R}^{p\times n}$, 满足

$$\left[\begin{array}{cccccc} \bar{S}_{11} - R^{\mathrm{T}} - R & \bar{S}_{12} - F - R^{\mathrm{T}} - U & \sqrt{T}\,L^{\mathrm{T}} & TA^{\mathrm{T}}R + TC^{\mathrm{T}}\bar{B}_f^{\mathrm{T}} + R & TA^{\mathrm{T}}F + F & 0 \\ * & \bar{S}_{22} - F^{\mathrm{T}} - F & \sqrt{T}\,L^{\mathrm{T}} - \sqrt{T}\,\bar{C}_f^{\mathrm{T}} & TA^{\mathrm{T}}R + T\bar{A}_f^{\mathrm{T}} + TC^{\mathrm{T}}\bar{B}_f^{\mathrm{T}} + R + U^{\mathrm{T}} & TA^{\mathrm{T}}F + F & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{S}_{11} & -\bar{S}_{12} & \sqrt{T}\,R^{\mathrm{T}}B + \sqrt{T}\,\bar{B}_f D \\ * & * & * & * & -\bar{S}_{22} & \sqrt{T}\,F^{\mathrm{T}}B \\ * & * & * & * & * & -\alpha^2 I \end{array}\right] < 0, \tag{15}$$

式中 * 号为对应块的转置矩阵 所设计的滤波器(3)的参数矩阵可由下式构造:

$$A_f = U^{-1}\bar{A}_f,\ B_f = U^{-1}\bar{B}_f,\ C_f = \bar{C}_f. \tag{16}$$

证明 必要性: 设系统(1) 存在稳定滤波器(3), 且保证滤波误差系统 $\| T(\gamma) \|_\infty < \alpha$ 由定理 2 可知, 存在矩阵 $0 < S = S^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ 和 $G \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ 满足式(13). 由式(13) 知 G 可逆 把 G, G^{-1} 和 S 表示为分块矩阵形式, 有

$$G \triangleq \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, G^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix},$$
$$S \triangleq \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^{\mathrm{T}} & S_{22} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

不失一般性, 假设 G_{21} 和 Z_{21} 可逆[12]. 引入矩阵

$$J_G \triangleq \begin{bmatrix} I & G_{11} \\ 0 & G_{21} \end{bmatrix},\ J_Z \triangleq \begin{bmatrix} Z_{11} & I \\ Z_{21} & 0 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

则 J_G 和 J_Z 可逆, 且有 $GJ_Z = J_G$. 用 $J_1 = \mathrm{diag}\{J_Z, I, J_Z, I\}$ 对式(13) 进行全等变换, 可得

$$\begin{bmatrix} \hat S_{11} - Z_{11}^{\mathrm{T}} - Z_{11} & \hat S_{12} - Z_{11}^{\mathrm{T}} G_{11} - Z_{21}^{\mathrm{T}} G_{21} - I & \sqrt{T} L^{\mathrm{T}} & \Omega_1 & TA^{\mathrm{T}} + I & 0 \\ * & \hat S_{22} - G_{11}^{\mathrm{T}} - G_{11} & \sqrt{T} G_{11}^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} - \sqrt{T} G_{21}^{\mathrm{T}} C_f^{\mathrm{T}} & \Omega_2 & TG_{11}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} + G_{11}^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\hat S_{11} & -\hat S_{12} & \sqrt{T} Z_{11}^{\mathrm{T}} B + \sqrt{T} Z_{21}^{\mathrm{T}} B_f D \\ * & * & * & * & -\hat S_{22} & \sqrt{T} B \\ * & * & * & * & * & -\alpha^2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{19}$$

式中

$$\Omega_1 \triangleq TA^{\mathrm{T}} Z_{11} + TC^{\mathrm{T}} B_f^{\mathrm{T}} Z_{21} + Z_{11},$$
$$\Omega_2 \triangleq TG_{11}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} Z_{11} + TG_{21}^{\mathrm{T}} A_f^{\mathrm{T}} Z_{21} + TG_{11}^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} B_f^{\mathrm{T}} Z_{21} + G_{11}^{\mathrm{T}} Z_{11} + G_{21}^{\mathrm{T}} Z_{21}.$$

定义

$$\hat S \triangleq \begin{bmatrix} \hat S_{11} & \hat S_{12} \\ \hat S_{12}^{\mathrm{T}} & \hat S_{22} \end{bmatrix} = J_Z^{\mathrm{T}} S J_Z. \tag{20}$$

由式(19) 知 G_{11} 可逆 用 $J_2 = \mathrm{diag}\{I, G_{11}^{-1}, I, I, G_{11}^{-1}, I\}$ 对式(19) 进行全等变换, 可得

$$\begin{bmatrix} \bar S_{11} - Z_{11}^{\mathrm{T}} - Z_{11} & \bar S_{12} - Z_{11}^{\mathrm{T}} - Z_{21}^{\mathrm{T}} G_{21} G_{11}^{-1} - G_{11}^{-1} & \sqrt{T} L^{\mathrm{T}} & \Phi_1 & TA^{\mathrm{T}} G_{11}^{-1} + G_{11}^{-1} & 0 \\ * & \bar S_{22} - G_{11}^{-\mathrm{T}} - G_{11}^{-1} & \sqrt{T} L^{\mathrm{T}} - \sqrt{T} G_{11}^{-\mathrm{T}} G_{21}^{\mathrm{T}} C_f^{\mathrm{T}} & \Phi_2 & TA^{\mathrm{T}} G_{11}^{-1} + G_{11}^{-1} & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar S_{11} & -\bar S_{12} & \sqrt{T} Z_{11}^{\mathrm{T}} B + \sqrt{T} Z_{21}^{\mathrm{T}} B_f D \\ * & * & * & * & -\bar S_{22} & \sqrt{T} G_{11}^{-\mathrm{T}} B \\ * & * & * & * & * & -\alpha^2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{21}$$

其中

$$\Phi_1 \triangleq TA^{\mathrm{T}} Z_{11} + TC^{\mathrm{T}} B_f^{\mathrm{T}} Z_{21} + Z_{11},$$
$$\Phi_2 \triangleq TA^{\mathrm{T}} Z_{11} + TG_{11}^{-\mathrm{T}} G_{21}^{\mathrm{T}} A_f^{\mathrm{T}} Z_{21} + TC^{\mathrm{T}} B_f^{\mathrm{T}} Z_{21} + Z_{11} + G_{11}^{-\mathrm{T}} G_{21}^{\mathrm{T}} Z_{21}.$$

定义

$$\bar S \triangleq \begin{bmatrix} \bar S_{11} & \bar S_{12} \\ \bar S_{12}^{\mathrm{T}} & \bar S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & G_{11}^{-\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat S_{11} & \hat S_{12} \\ \hat S_{12}^{\mathrm{T}} & \hat S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & G_{11}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}^{\mathrm{T}} & Z_{21}^{\mathrm{T}} \\ G_{11}^{-\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^{\mathrm{T}} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & G_{11}^{-1} \\ Z_{21} & 0 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

定义如下矩阵变量:

$$\begin{cases} \bar A_f \triangleq Z_{21}^{\mathrm{T}} A_f G_{21} F,\ \bar B_f \triangleq Z_{21}^{\mathrm{T}} B_f,\ \bar C_f \triangleq C_f G_{21} F, \\ R \triangleq Z_{11},\ F \triangleq G_{11}^{-1},\ U \triangleq Z_{21}^{\mathrm{T}} G_{21} F. \end{cases} \tag{23}$$

将定义的变量带入式(21), 则得式(15). 必要性得证

充分性: 假设存在矩阵变量 $\bar S_{11}, \bar S_{12}, \bar S_{22}, R, F, U, \bar A_f, \bar B_f, \bar C_f$ 满足式(15). 由文献[12] 可知 UF^{-1} 非奇异, 进而 $UF^{-1} = Z_{21}^{\mathrm{T}} G_{21}$ 可保证分解出非奇异方阵 Z_{21} 和 G_{21}. 因此, 可唯一构造出滤波器矩阵

$$\begin{cases} A_f \triangleq Z_{21}^{-\mathrm{T}} \bar A_f F^{-1} G_{21}^{-1}, \\ B_f \triangleq Z_{21}^{-\mathrm{T}} \bar B_f,\ C_f \triangleq \bar C_f F^{-1} G_{21}^{-1}. \end{cases} \tag{24}$$

另外, 适当选择矩阵变量, 可将满足式(15) 的矩阵变量表示为式(22) 和(23). 定义可逆矩阵 J_G 和 J_Z 如式(18). 将式(22) 和(23) 定义的矩阵变量代入式(15) 可得式(21). 经适当矩阵变换, 式(21) 等价于

$$\begin{bmatrix} J_Z^{\mathrm{T}} S J_Z - J_Z^{\mathrm{T}} J_G - J_G^{\mathrm{T}} J_Z & \sqrt{T} J_G^{\mathrm{T}} \bar C^{\mathrm{T}} & J_G^{\mathrm{T}} (T\bar A + I)^{\mathrm{T}} J_Z & 0 \\ \sqrt{T} \bar C J_G & -I & 0 & 0 \\ J_Z^{\mathrm{T}} (T\bar A + I) J_G & 0 & -J_Z^{\mathrm{T}} S J_Z & \sqrt{T} J_Z^{\mathrm{T}} \bar B \\ 0 & 0 & \sqrt{T} \bar B^{\mathrm{T}} J_Z & -\alpha^2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{25}$$

用 J_1^{-1} 对式(25) 进行全等变换可得式(13), 由定理 2 可知滤波误差系统(4) 稳定且 $\| T(\gamma) \|_\infty < \alpha$ 充分性得证

从上述充分性证明中可知, 由式(24) 可求出满足要求的滤波器参数矩阵. 然而构造滤波器参数矩阵所需的 Z_{21} 和 G_{21}, 并未包含在线性矩阵不等式(15) 中. 为此, 滤波器(3) 由测量输出 $y(k)$ 到估计信号 $z_f(k)$ 的 γ 传递函数为 $T_{z_f y}(\gamma) = C_f(\gamma I - A_f)^{-1}B_f$. 将式(24) 代入, 并考虑 $U = Z_{21}^{\mathrm{T}}G_{21}F$ 可得

$$\begin{aligned}T_{z_f y}(\gamma) &= \\ &\overline{C}_f F^{-1}G_{21}^{-1}(\gamma I - Z_{21}^{-\mathrm{T}}\overline{A}_f F^{-1}G_{21}^{-1})^{-1}Z_{21}^{-\mathrm{T}}\overline{B}_f = \\ &\overline{C}_f(\gamma I - U^{-1}\overline{A}_f)^{-1}U^{-1}\overline{B}_f.\end{aligned}$$

由此可知, 满足要求的滤波器(3) 的参数矩阵可由式(16) 构造. 定理得证. □

将定理 2 推广, 可得 Delta 算子描述不确定系统鲁棒 H_∞ 滤波器存在的充分条件.

推论 3　考虑系统(1), 设 $M \in \mathbf{R}$ 为不确定系统矩阵, 则滤波误差系统(4) 稳定且 $\|T(\gamma)\|_\infty < \alpha(\alpha > 0)$, 形如式(3) 的 H_∞ 滤波器存在的充分条件为: 存在矩阵 $0 < \overline{S}_{11i} = \overline{S}_{11i}^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\overline{S}_{12i} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $0 < \overline{S}_{22i} = \overline{S}_{22i}^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $R \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $F \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $U \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\overline{A}_f \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\overline{B}_f \in \mathrm{R}^{n\times m}$, $\overline{C}_f \in \mathrm{R}^{p\times n}$, 满足

$$\begin{bmatrix} \overline{S}_{11i} - R^{\mathrm{T}} - R & \overline{S}_{12i} - F - R^{\mathrm{T}} - U & \sqrt{T}L_i^{\mathrm{T}} & TA_i^{\mathrm{T}}R + TC_i^{\mathrm{T}}\overline{B}_f^{\mathrm{T}} + R & TA_i^{\mathrm{T}}F + F & 0 \\ * & \overline{S}_{22i} - F^{\mathrm{T}} - F & \sqrt{T}L_i^{\mathrm{T}} - \sqrt{T}\overline{C}_f^{\mathrm{T}} & TA_i^{\mathrm{T}}R + T\overline{A}_f^{\mathrm{T}} + TC_i^{\mathrm{T}}\overline{B}_f^{\mathrm{T}} + R + U^{\mathrm{T}} & TA_i^{\mathrm{T}}F + F & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\overline{S}_{11i} & -\overline{S}_{12i} & \sqrt{T}R^{\mathrm{T}}B_i + \sqrt{T}\overline{B}_f D_i \\ * & * & * & * & -\overline{S}_{22i} & \sqrt{T}F^{\mathrm{T}}B_i \\ * & * & * & * & * & -\alpha^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

$$i = 1, 2, \cdots, N. \tag{26}$$

且所设计的滤波器(3) 的参数矩阵可由式(16) 构造.

推论 3 将系统(1) 的鲁棒 H_∞ 滤波器存在的充分条件, 转化为一个线性矩阵不等式组的可解性问题. 式(26) 不仅是关于矩阵变量, 也是关于标量 α^2 的线性矩阵不等式组. 因此, 可将 α^2 作为一个优化变量来得到最优扰动衰减水平, 即可通过求解如下凸优化问题:

$$\min_{\overline{S}_{11i}, \overline{S}_{12i}, \overline{S}_{22i}, R, F, U, \overline{A}_f, \overline{B}_f, \overline{C}_f, \rho} \rho,$$

$$\mathrm{s.t.}\ \ (26),\ \rho = \alpha^2. \tag{27}$$

以设计系统(1) 的最优全阶鲁棒 H_∞ 滤波器. 最优扰动衰减水平为 $\alpha^* = \sqrt{\rho^*}$, ρ^* 为 ρ 的最优值, 且满足要求的滤波器(3) 的参数矩阵可由式(16) 构造.

4　数值示例

考虑采样周期 $T = 0.001$ s 的二阶线性 Delta 算子不确定系统

$$\delta x(k) = \begin{bmatrix} -0.0005 & -0.9997 + 0.3\sigma \\ 0.9997 & -0.5004 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -2.0005 & 0 \\ 0.9988 & 0 \end{bmatrix} \omega(k),$$

$$\begin{aligned} y(k) &= [-99.9500 \quad 100.0250]x(k) + \\ &\quad\ [0.1500 \quad 1.0000]\omega(k), \\ z(k) &= [1.0000 \quad 0]x(k), \end{aligned}$$

其中 σ 为不确定参数, 且满足 $-1 \le \sigma \le 1$.

通过求解式(27) 的凸优化问题, 设计该系统的鲁棒 H_∞ 滤波器, 可得最优 α 值为 2.7123 及相应的滤波器参数矩阵

$$A_f = 10^5 \times \begin{bmatrix} 1.4265 & -1.4275 \\ 1.4359 & -1.4369 \end{bmatrix},$$

$$B_f = 10^3 \times \begin{bmatrix} 1.4270 \\ 1.4364 \end{bmatrix},$$

$$C_f = [1.0000 \times 10^0 \quad -2.3109 \times 10^{-8}].$$

进一步对所得滤波器进行验证. 图 1 给出了由式(27) 设计的滤波器构成的滤波误差系统, 在 σ 取不同值时的 H_∞ 扰动衰减性能指标. 图中曲线计算方法为: 令 σ 在区间 $[-1, 1]$ 上取值, 采用定理 1 或定理 2 逐点计算滤波误差系统的 H_∞ 扰动衰减性能指标. 由图可见, 式(27) 设计的滤波器可保证滤波误差系统的 H_∞ 范数小于所设计的指标.

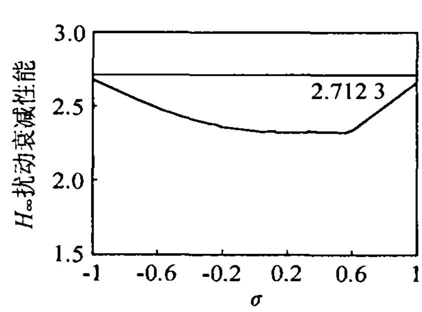

图 1　滤波误差系统的 H_∞ 扰动衰减性能指标

5　结　　语

本文在参数依赖型 Delta 算子系统鲁棒 H_∞ 性能准则的基础上, 给出了含有多面体参数摄动系统的全阶鲁棒 H_∞ 滤波器存在的充分条件. 基于 Oliveira 等人的参数依赖型 Lyapunov 函数思想, 该条件具有较低的保守性. 采用 Delta 算子描述, 所得结果更适合处理高速采样系统的 H_∞ 滤波问题. 数

值示例说明了本文方法的可行性. 在多目标问题中, 参数依赖型 Lyapunov 函数方法具有明显的优势. 如何利用参数依赖型 Lyapunov 函数的思想, 解决具有极点约束或其他性能指标约束的多目标滤波器设计问题, 是有待于进一步研究的课题.

参考文献(References)

[1] De Souza C E, Shaked U, Fu M. Robust H_∞ Filter for Continuous Time Varying Uncertain Systems with Deterministic Input Signals [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1995, 43 (3): 709-719.

[2] Li H, Fu M. A Linear Matrix Inequality Approach to Robust H_∞ Filtering [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1997, 45(9): 2338-2350.

[3] Palhares R M, Peres P L D. Robust H_∞ Filtering Design with Pole Placement Constraint via Linear Matrix Inequalities [J]. *J of Optimization Theory and Applications*, 1999, 102(2): 239-261.

[4] Goodwin G C, Middleton R H, Poor H V. High-speed Digital Signal Processing and Control[J]. *Proc IEEE*, 1992, 80(2): 240-259.

[5] 张端金, 王忠勇, 吴捷. 系统控制和信号处理中的 Delta 算子方法[J]. *控制与决策*, 2003, 18(4): 385-391.
(Zhang D J, Wang Z Y, Wu J. Survey on System Control and Signal Processing Using the Delta Operator [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(4): 385-391.)

[6] 邵锡军, 杨成梧. 具有约束方差的不确定性 Delta 算子系统的鲁棒滤波器设计[J]. *兵工学报*, 2001, 22 (3): 312-316.
(Shao X J, Yang C W. Robust Filter Design of Delta Operator Systems with Time Varying Uncertainty and Error Variance Constraints [J]. *Acta Annamentari*, 2001, 22(3): 312-316.)

[7] 张端金, 王忠勇, 吴捷. Delta 算子描述的离散系统鲁棒滤波[J]. *系统工程与电子技术*, 2003, 25(1): 71-73.
(Zhang D J, Wang Z Y, Wu J. Robust Filtering for Delta Operator Formulated Discrete Time Systems [J]. *System Engineering and Electronics*, 2003, 25 (1): 71-73.)

[8] 张端金, 吴捷. 具有区域极点和方差约束的 Delta 算子系统鲁棒 H_∞ 滤波[J]. *控制与决策*, 2004, 19(1): 12-16.
(Zhang D J, Wu J. Robust H_∞ Filtering for Delta Operator Formulated Systems with Circular Pole and Error Variance Constraints [J]. *Control and Decision*, 2004, 19(1): 12-16.)

[9] 王广雄, 李连锋, 王新生. 鲁棒设计中参数不确定性的描述[J]. *电机与控制学报*, 2001, 5(1): 5-7.
(Wang G X, Li L F, Wang X S. The Description of the Parameter Uncertainty for Robust Design [J]. *Electric Machines and Control*, 2001, 5(1): 5-7.)

[10] De Oliveira M C, Bernussou J, Geromel J C. A New Discrete-time Robust Stability Condition [J]. *System and Control Letters*, 1999, 37(3): 261-265.

[11] 向峥嵘, 陈庆伟, 胡维礼. 不确定 Delta 算子系统的鲁棒 H_∞ 重构控制[J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(4): 641-643.
(Xiang Z R, Chen Q W, Hu W L. Robust H_∞ Reconfigurable Control of a Class of Uncertain Delta Operator Systems with Actuator Failure [J]. *Control Theory and Applications*, 2003, 20(4): 641-643.)

[12] Gao H J, Wang C H. New Approaches to Robust l_2-l_∞ and H_∞ Filtering for Uncertain Discrete-time Systems [J]. *Science in China (Series F)*, 2003, 46(5): 355-370.

(上接第 738 页)

[8] Hespanha J P, Morse A S. Stability of Switched Systems with Average Dwell-time[A]. *Proc of the 38th IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Phoenix, 1999: 2655-2660.

[9] Ishii H, Francis B A. Stabilizing a Linear System by Switching Control with Dwell Time[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(12): 1962-1973.

[10] Haddad W M, Corrado J R. Robust Resilient Dynamic Controllers for Systems with Parametric Uncertainty and Controller Gain Variations [A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. Philadephia, 1998: 2837-2841.

[11] 林瑞全, 杨富文. 基于 H_∞ 控制理论的非脆弱控制的研究[J]. *控制与决策*, 2004, 19(5): 598-600.
(Lin R Q, Yang F W. On Non-fragile Control Based on H_∞ Control Theory [J]. *Control and Decision*, 2004, 19(5): 598-600.)

[12] 关新平, 张群亮, 龙承念. 一类 2-D 不确定离散系统的弹性保成本控制[J]. *控制理论与应用*, 2004, 21(1): 125-128.
(Guan X P, Zhang Q L, Long C N. Resilient Guaranteed Cost Control for a Class of 2-D Uncertain Discrete Systems [J]. *Control Theory and Applications*, 2004, 21(1): 125-128.)