文章编号: 1001-0920(2006)07-0759-04

一类单输入线性切换系统的可镇定性研究

张长学[1,2], 武玉强[1], 宗广灯[1]
(1. 曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165; 2. 山东建筑工程学院 数理系, 济南 250101)

摘 要: 考虑一类单输入线性切换系统的可镇定性问题, 利用变结构控制对系统进行降维. 通过对系统滑动模态的研究, 得出了系统一致可镇定的充分条件和系统存在容许镇定策略的充分条件. 给出了具体的容许镇定策略集合, 并对二阶切换系统给出了详细的容许镇定策略. 仿真实例验证了所提出结论的有效性.

关键词: 切换系统; 变结构控制; 一致可镇定性
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Study on the Stabilizability of a Class of Single-input Switched Linear Systems

ZHANG Chang-xue[1,2], *WU Yu-qiang*[1], *ZONG Guang-deng*[1]
(1. Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu 273165, China; 2. Department of Mathematics and Physics, Sandong Institute of Architecture and Engineering, Jinan 250101, China. Correspondent: ZHANG Chang-xue, E-mail: zcxgy@eyou.com)

Abstract: The stabilizability problem of a class of single-input switched linear systems is considered. The dimension of the system is reduced with the variable structure control. The sufficient conditions of the uniform stabilization and the existence of the admissible stabilizing strategies of systems are obtained through the study of the sliding mode of the reduced systems. And the detailed admissible stabilizing strategy sets are proposed. The completely admissible stabilizing strategies for second order switched systems are given. Numerical simulations show the effectiveness of the proposed method.

Key words: Switched systems; Variable structure control; Uniformly stabilizability

1 引 言

切换系统是一类重要的混合动态系统, 它是由连续(或离散)时间子系统及作用在它们之间的切换信号组成的. 切换系统与一般的连续(或离散)时间系统不同, 有其特殊性. 例如[1], 即使每个子系统都是指数稳定的, 整个切换系统也可能不稳定; 反之, 即使每个子系统都不稳定, 整个切换系统也可能渐近稳定. 因而切换规则的选择是非常重要的.

关于切换系统分析和切换控制的研究越来越受到关注[1~4]. 文献[5]针对线性连续系统的控制器切换问题, 通过引进完备性的概念, 给出了判断系统稳定性的一个条件. [6]利用Lyapunov函数技术, 研究不满足完备性条件下切换系统的渐近稳定性问题. [7]研究了一类切换对称系统的可镇定问题. [8]引入轨迹连续性的概念, 在一个度量空间应用变结构控制的方法, 对一类离散状态系统和混合动态系统进行研究.

切换系统的镇定是一项比较困难的工作, 目前大多或者单独设计控制器, 或者单独设计切换信号. 本文同时对切换信号和控制器进行设计. 为降低研

收稿日期: 2005-06-01; **修回日期**: 2005-10-17.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60574007, 60174042); 高等学校博士学科点科研基金项目(20050446001); 山东省自然科学基金项目(Y2003G02); 曲阜师范大学青年基金项目(xj0511).
作者简介: 张长学(1981—), 男, 山东淄博人, 硕士, 从事切换系统控制、混杂系统控制等研究; 武玉强(1962—), 男, 山东沂水人, 教授, 博士生导师, 从事变结构控制、混杂系统控制等研究.

究高维系统的复杂性, 采用变结构控制的方法, 使问题转化为低维系统的可镇定问题. 通过对系统滑动模态的研究, 得出了系统一致可镇定的充分条件; 通过在滑模面上划分各子系统的可镇定区域, 得出了系统存在容许镇定策略的充分条件. 给出了具体的容许镇定策略集合, 并对二阶切换系统给出了具体的充分条件. 最后对文中的结论进行数值仿真, 结果表明所得出的结论是正确和有效的.

2 问题描述

考虑如下线性连续时间切换系统:

$$\dot{x} = A(i)x + b(i)u,\ x \in \mathbf{R}^n,\ u \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

其中 $i \in \Lambda$ 是切换信号, $\Lambda = \{1, 2, \cdots, N\}$.

假定 1 $b(i) \neq 0,\ i = 1, 2, \cdots, N$.

假定 2 i 可控, 且允许切换间隔时间极小, 不考虑切换时滞.

定义 1 集合

$$S = \{(u, i)\ |u: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},\ i = i(x): \mathbf{R}^n \to \Lambda\}$$

称为系统(1) 的基于状态反馈的控制策略集合. 对于任意的 $(u, i) \in S$, 如果系统(1) 在 $u = u(x)$ 和 $i = i(x)\ (x \in \mathbf{R}^n)$ 的作用下都是稳定的, 则称 S 是系统(1) 的一个容许镇定策略集合. 如果

$$\{(u, i)\ |\exists f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, f \in C^1(\mathbf{R}^n),\ u = f(x), \forall i: \mathbf{R}^n \to \Lambda\}$$

是系统(1) 的一个容许镇定策略集合, 则称切换系统(1) 是可以一致连续镇定的.

引理 1[3] 对于切换系统

$$\dot{x} = A(i)x,\ x \in \mathbf{R}^n,\ i \in \Lambda,$$

如果存在李雅普诺夫函数 $V = x^{\mathrm{T}}Px,\ P > 0$, 使得在任意切换信号作用下, 沿系统轨迹上的任意非零点都有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V < 0$ 成立, 则该切换系统是一致稳定的.

3 单输入切换系统的可镇定性分析

由于 $b(i) \neq 0,\ i = 1, 2, \cdots, N$, 对于任意的 $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$, 存在非奇异阵 $T(i)$, 使得

$$T(i)b(i) = [0\ \ \cdots\ \ 0\ \ \beta(i)]^{\mathrm{T}},\ \beta(i) \neq 0.$$

令 $y \triangleq T(i)x$, 则式(1) 可变为

$$\dot{y} = T(i)A(i)T^{-1}(i)y + T(i)b(i)u,\quad x \in \mathbf{R}^n,\ u \in \mathbf{R},\ i \in \Lambda. \tag{2}$$

由状态变换的等价性可知, 系统(1) 和(2) 的可镇定性是一致的. 记

$$A_T(i) \triangleq T(i)A(i)T^{-1}(i) \triangleq \begin{bmatrix} A_1(i) \\ \alpha(i) \end{bmatrix},$$

$$A_1(i) \in \mathbf{R}^{(n-1)\times n},\ \alpha(i) \in \mathbf{R}^{1\times n},$$

$$y \triangleq [\bar{y}^{\mathrm{T}}\ \ y_n]^{\mathrm{T}},\ \bar{y} \in \mathbf{R}^{n-1},\ y_n \in \mathbf{R}.$$

则式(2) 可变为

$$\dot{\bar{y}} = A_1(i)y,\ \dot{y}_n = \alpha(i)y + \beta(i)u.$$

取切换函数

$$\begin{cases} s(y) = f(\bar{y}) + y_n,\ f: \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{y}}f(\bar{y}) \in C(\mathbf{R}^{n-1}). \end{cases} \tag{3}$$

可得滑模运动方程

$$\dot{\bar{y}} = A_1(i)[\bar{y}\ \ -f(\bar{y})]^{\mathrm{T}}.$$

记

$$A_1(i) \triangleq [A_{11}(i)\ \ A_{12}(i)],$$

$$A_{11}(i) \in \mathbf{R}^{(n-1)\times(n-1)}, A_{12}(i) \in \mathbf{R}^{(n-1)\times 1}.$$

可求出状态反馈 $-f(\bar{y})$, 使得滑动模态

$$\dot{\bar{y}} = A_{11}(i)\bar{y} - A_{12}(i)f(\bar{y}) \tag{4}$$

是稳定的, 于是便确定了切换函数 $s(y)$.

下面求变结构控制 $u = u^{\pm}(y)$, 使得系统(2) 的状态从任意 $y_0 \in \mathbf{R}^n$ 出发, 都能在有限时间内到达切换面 $s(y) = 0$. 令

$$\mathrm{d}s(y)/\mathrm{d}t = -\epsilon\mathrm{sgn}\, s(y) - ks(y),\ \epsilon, k > 0,$$

可得

$$u = u^{\pm}(y) = \frac{-1}{\beta(i)}\Big\{\frac{\mathrm{d}f(\bar{y})}{\mathrm{d}\bar{y}}[A_{11}(i)\bar{y} - A_{12}(i)f(\bar{y})] + \alpha(i)y + \epsilon\mathrm{sgn}\, s(y) + ks(y)\Big\}. \tag{5}$$

在实际应用中, 为消除变结构控制带来的高频振荡, 常将其连续化. 为此令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(s(y)) = -\frac{2\epsilon}{\pi}\tan^{-1}(Ms(y)) - ks(y).$$

其中: $\epsilon > 0,\ k > 0$, 正切函数 $\tan: (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$. 取 M 充分大, 则有

$$u = u(y) = \frac{-1}{\beta(i)}\Big\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{y}}f(\bar{y})[A_{11}(i)\bar{y} - A_{12}(i)f(\bar{y})] + \alpha(i)y + \frac{2\epsilon}{\pi}\tan^{-1}(Ms(y)) + ks(y)\Big\}. \tag{6}$$

由此可得如下定理:

定理 1 若 $n-1$ 维切换系统(4) 是可以一致连续镇定的, 则在变结构控制(3) 和(5) 的作用下, n 维切换系统(2) 是一致稳定的.

一般地, 对系统(4) 取李雅普诺夫函数

$$V(t) = \bar{y}^{\mathrm{T}}P\bar{y},\ P > 0,\ P \in \mathbf{R}^{(n-1)\times(n-1)},$$

则有

$$\dot{V} = 2\bar{y}^{\mathrm{T}}(PA_{11}(i)\bar{y} - PA_{12}(i)f(\bar{y})). \tag{7}$$

定义 2 对于系统(4), 矩阵 $Q_i > 0,\ \forall i \in \Lambda$, 集合

$$Y_i = \{\bar{y}\ |\bar{y}^{\mathrm{T}}P(A_{11}(i)\bar{y} - A_{12}(i)f(\bar{y})) \leq -\bar{y}^{\mathrm{T}}Q_i\bar{y}\} \tag{8}$$

称为子系统 i 对于正定阵 P 和 Q_i 在切换曲面 $s = s(y)$ 上的可镇定区域.

定理 2　如果存在满足条件(3)的函数 $f: \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$ 及正定阵 P 和 Q_i, $i \in \Lambda$, 使得

$$\bigcup_{i\in\Lambda} Y_i = \mathbf{R}^{n-1}, \tag{9}$$

则系统(2)的一个容许镇定策略集合为

$$S = \{(u, i) \mid u \text{ 形如式(4)和(6)},\ i = \arg(\bar{y} \in Y_i)\}. \tag{10}$$

证明　$\forall (u(y), i(\bar{y})) \in S$, 切换系统(2)在 $u = u(y)$ 和 $i = i(\bar{y})$ 的作用下, 在有限时间内到达切换面 $s(y) = 0$, 开始在其上产生滑模运动(4). 由式(9)知, $\forall \bar{y} \in \{y \mid s(y) = 0\}$, 都存在 $\bar{i}(\bar{y}) \in \Lambda$, 使得 $\bar{y} \in Y_{\bar{i}(\bar{y})}$. 取李雅普诺夫函数 $V(t) = \bar{y}^{\mathrm{T}} P \bar{y}$, 由式(7)及定义 2 知, $\dot{V} \le -\bar{y}^{\mathrm{T}} Q_{\bar{i}(\bar{y})} \bar{y}$, 故 $\forall \bar{y} \ne 0$, 有 $\dot{V} < 0$. 所以滑动模态(4)稳定, 即系统(2)是稳定的. □

推论 1　若存在矩阵 $P > 0$, $C \in \mathbf{R}^{1\times(n-1)}$, $Q_i > 0$, $\forall i \in \Lambda$, 使

$$\bigcup_{i\in\Lambda} \{\bar{y} \mid \bar{y}^{\mathrm{T}}(P(A_{11}(i) - A_{12}(i)C) + Q_i)\bar{y} \le 0)\} = \mathbf{R}^{n-1},$$

则式(10)为切换系统(2)的一个容许镇定策略集合.

证明　取 $f(\bar{y}) = C\bar{y}$, 由定义 2 知, 定理 2 中的条件(9)满足, 故结论成立. □

注 1　如果定义 2 中式(8)改为

$$Y_i = \{\bar{y} \mid \bar{y}^{\mathrm{T}} P(A_{11}(i)\bar{y} - A_{12}(i) f(\bar{y})) < 0\},$$

定理 2 中式(9)改为 $\bigcup_{i\in\Lambda} \bar{Y}_i = \mathbf{R}^{n-1}$, 并且式(10)中的切换策略改为 $i = i(\bar{y}) = \arg(\bar{y} \in \bar{Y}_i)$, 则不能保证定理 2 的结论成立. 其中

$$\bar{Y}_i = \{y \in \mathbf{R}^{n-1} \mid \exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in Y_i,\ \lim_{n\to\infty} \| y_n - y \| = 0\},$$

$\|\cdot\|: \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^{+} \cup \{0\}$ 为欧氏范数.

注 2　如果定义 2 中式(8)改为

$$Y_i = \{\bar{y} \mid \bar{y}^{\mathrm{T}} P(A_{11}(i)\bar{y} - A_{12}(i) f(\bar{y})) < 0\},$$

并且定理 2 中式(9)改为 $\bigcup_{i\in\Lambda} Y_i = \mathbf{R}^{n-1} - \{0\}$, 则定理 2 的结论仍然成立.

特别地, 当 $n = 2$ 时, 记 $A_{11}(i) = a_1(i)$, $A_{12}(i) = a_2(i)$, $\bar{y} = y_1$, $y_n = y_2$, $P = \bar{p}$, $Q_i = \bar{q}_i$, 则系统(4)变为 $\dot{y}_1 = a_1(i) y_1 - a_2(i) f(y_1)$. 定义 2 中式(8)变为

$$Y_i = \{y_1 \mid (a_1(i) + \bar{q}_i / \bar{p}) y_1^2 - a_2(i) y_1 f(y_1) \le 0\},$$

定理 2 中式(9)变为 $\bigcup_{i\in\Lambda} Y_i = \mathbf{R}$. 取

$$f(y_1) = c y_1^{q/p},\ p \le q, \tag{11}$$

其中 $p, q \in Z^{+}$ 互质. 记 $\epsilon_i = \bar{q}_i / \bar{p} > 0$, $i \in \Lambda$, 定义 2 中式(8)变为

$$Y_i = \{y_1 \in \mathbf{R} \mid a_2(i) c y_1^{1+q/p} - (a_1(i) + \epsilon_i) y_1^2 \ge 0\}$$

定理 3　当 $n = 2$ 时, 如果存在 $\epsilon_i > 0$, $i \in \Lambda$, $c \in \mathbf{R}$, 以及满足条件(11)的 p 和 q, 使得下列条件之一满足:

$$1)\ \begin{cases} p = q = 1, \\ \exists\, i \in \Lambda, \text{ sit } a_2(i) c \ge a_1(i) + \epsilon_i; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} p < q,\ (-1)^{q/p-1} = -1, \\ \exists\, i \in \Lambda, \text{ sit } a_1(i) + \epsilon_i \le 0,\ a_2(i) c = 0; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} p < q,\ (-1)^{q/p-1} = 1, \\ \exists\, i, j \in \Lambda, \text{ sit } a_1(i) + \epsilon_i \ge 0,\ a_2(i) c > 0, \\ a_1(j) + \epsilon_j \le 0,\ a_2(j) c < 0, \\ \left(\dfrac{a_1(i) + \epsilon_i}{a_2(i) c}\right)^{\frac{p}{q-p}} \le \left(\dfrac{a_1(j) + \epsilon_j}{a_2(j) c}\right)^{\frac{p}{q-p}}; \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} p < q,\ (-1)^{q/p-1} = 1, \\ \exists\, i \in \Lambda, \text{ sit } a_1(i) + \epsilon_i \le 0,\ a_2(i) c \ge 0; \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} p < q,\ (-1)^{q/p-1} = -1, \\ \exists\, i, j \in \Lambda, \text{ sit } a_2(i) c > 0,\ a_2(j) c < 0, \\ \left(\dfrac{a_1(i) + \epsilon_i}{a_2(i) c}\right)^{\frac{p}{q-p}} \le \left(\dfrac{a_1(j) + \epsilon_j}{a_2(j) c}\right)^{\frac{p}{q-p}}. \end{cases}$$

则系统(2)的一个容许镇定策略集合为式(10).

4　数值仿真

考虑如下线性切换系统:

$$\dot{x} = A(i(x))x + b(i(x))u,\ x \in \mathbf{R}^2,\ u \in \mathbf{R}^1.$$

其中: $i \in \Lambda = \{1, 2\}$, 子系统矩阵为

$$A(1) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ b(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A(2) = \begin{bmatrix} -0.9 & -0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ b(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

此时对应的一维线性切换系统(4)的系数为 $a_1(1) = 0.1$, $a_2(1) = 0.1$, $a_1(2) = -0.9$, $a_2(2) = -0.2$. 取 $p = 1$, $q = 3$, $c = 10$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.1$, 则有

$$p < q,\ (-1)^{q/p-1} = (-1)^2 = 1.$$

因此存在 $i = 1, 2 \in \Lambda$, 使得

$$a_1(1) + \epsilon_1 = 0.2 \ge 0,\ a_2(1) c = 1 > 0,$$

$$a_1(2) + \epsilon_2 = -0.8 \le 0,\ a_2(2) c = -2 < 0,$$

$$\left(\frac{a_1(1) + \epsilon_1}{a_2(1) c}\right)^{\frac{p}{q-p}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2} \le \left(\frac{a_1(2) + \epsilon_2}{a_2(2) c}\right)^{\frac{p}{q-p}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{1/2}.$$

所以定理 3 的条件(2)满足. 此时有

$$Y_1 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x_1| \ge (1/5)^{1/2}\},$$

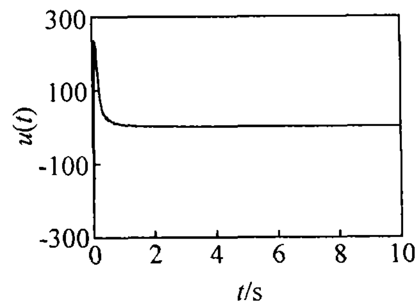

图1 柔化控制律u随时间的变化

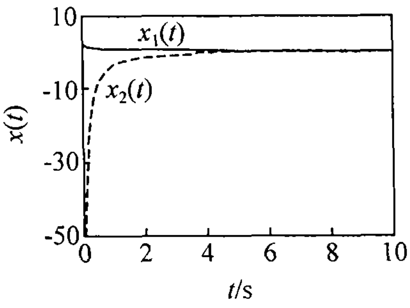

图2 状态x(t)随时间的变化

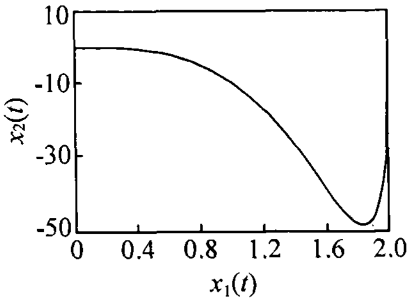

图3 状态x(t)的相平面

$$Y_2 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x_1| \le (2/5)^{1/2}\}.$$

由定理3知, 取 $f(x_1) = cx_1^{q/p} = 10x_1^3$, 原系统在切换律 $i = \arg(x \in Y_i)$ 及控制律(3)和(5)作用下是稳定的. 取式(6)中 $\epsilon = 5, k = 50, M = 100, x_0 = [2\quad -5]^{T}$, 仿真结果如图1～图3所示.

5 结 语

本文研究一类单输入线性切换系统的可镇定问题. 应用变结构控制的方法, 将问题转化为维数较低的单输入切换系统的可镇定问题, 根据李雅普诺夫稳定性理论, 以及切换系统稳定性的有关结果, 得出了系统一致可镇定以及存在容许镇定策略的充分条件, 并给出了相应的控制器和容许镇定策略集合. 本文方法为检验线性单输入切换系统是否可镇定, 以及寻求合适的镇定策略提供了一种行之有效的方法.

参考文献(References)

[1] Decarlo R, Branicky M S, Lennartson B. Perspective and Results on the Stability and Stabilizability of Hybrid Systems[J]. *Proc of the IEEE*, 2000, 88(7): 1069-1082.

[2] Liberzon D, Morse A S. Basic Problems in Stability and Design of Switched Systems[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, 19(1): 59-70.

[3] Liberzon D. *Switching in Systmes and Control*[M]. Boston: Birkhauser, 2003.

[4] Branicky M S. Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(4): 475-482.

[5] Skafidas E, Evans R J, Savkin A V, et al. Stability Result for Switched Controller Systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(4): 553-564.

[6] 刘玉忠, 张霄力, 赵军. 一类线性开关系统的渐近稳定性[J]. *控制与决策*, 2002, 17(1): 111-113, 116.
(Liu Y Z, Zhang X L, Zhao J. Asymptotic Stability of a Class of Linear Switched Systems[J]. *Control and Decision*, 2002, 17(1): 111-113, 116.)

[7] Xie G M, Fu Q, Wang L. Stabilization of Switched Symmetric Systems[A]. *Proc of the* 2004 *American Control Conf* [C]. Boston, 2004: 4535-4536.

[8] Murat Dogruel, Umit Ozguner, Sergey Drakunov. Sliding-mode Control in Discrete-state and Hybrid Systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(3): 414-419.

(上接第758页)

[5] Likar B, Pernus F. A Hierarchical Approach to Elastic Registration Based on Mutual Information[J]. *Image and Vision Computing*, 2001, 19(1-2): 33-44.

[6] Reddy B S, Chatterji B N. A FFT-based Technique for Translation, Rotation and Scale-invariant Image Registration[J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1996, 5(8): 1266-1271.

[7] Averbuch A, Keller Y. FFT Based Image Registration [A]. *IEEE Conf on Acoustics, Speech and Signal Processing*[C]. Florida, 2002, 4: 13-17.

[8] Li H, Manjunath B S, Mitra S K. A Contour Based Approach to Multi-sensor Image Registration [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 1995, 4(3): 320-334.

[9] Dai X L, Khorram S. A Feature-based Image Registration Algorithm Using Improved Chain-code Representation Combined with Invariant Moments[J]. *IEEE Trans on Geoscience and Remote Sensing*, 1999, 37(5): 2351-2362.

[10] Heeger D J, Jepson A D. Subspace Methods for Recovering Rigid Motion: Algorithm and Implementation[J]. *Int J Computer Vision*, 1992, 7(2): 95-117.

[11] Li H, Manjunath B, Mitra S K. A Controur-based Approach to Multisensor Image Registration [J]. *IEEE Trans on Image Process*, 1995, 4(3): 320-334.