第 21 卷 第 8 期　　控 制 与 决 策　　2006 年 8 月
Vol 21 No. 8　　Control and Decision　　Aug. 2006

文章编号: 1001-0920(2006)08-0903-05

三角模糊数互补判断矩阵的一致性及其排序研究

巩在武, 刘思峰
(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016)

摘　要: 研究三角模糊数互补判断矩阵的性质和排序问题. 建立了三角模糊数互反判断矩阵与互补判断矩阵之间的相互转化关系, 给出了三角模糊数互补判断矩阵完全一致性、严格强传递性以及弱传递性的概念, 并研究了它们之间的关系, 论证了完全一致性等定义的合理性, 构建了基于最小二乘的三角模糊数互补判断矩阵排序方法. 算例分析表明, 该方法是可行而有效的.

关键词: 三角模糊数; 互补判断矩阵; 完全一致性; 严格强传递性; 排序
中图分类号: N945.5; C934　　**文献标识码**: A

Consistency and Priority of Triangular Fuzzy Number Complementary Judgment Matrix

GONG Zai-wu, LIU Si-feng
(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China. Correspondent: GONG Zai-wu, E-mail: zwgong26@163.com)

Abstract: The proprieties and priority problems of triangular fuzzy number complementary judgment matrix are studied. Transformation relation between triangular fuzzy number reciprocal judgment matrix and triangular fuzzy number complementary judgment matrix is set up. The concepts of complete consistency, restricted max-max transitivity and weak transitivity for triangular fuzzy number complementary judgment matrix are introduced with their relations studied. The reasonableness of the concept of complete consistency for triangular fuzzy number complementary judgment matrix is discussed. Priority of triangular fuzzy number complementary judgment matrix is set up based on least square method and is illustrated by a numerical number.

Key words: Triangular fuzzy number; Complementary judgment matrix; Complete consistency; Restricted max-max transitivity; Priority

1 引　　言

美国运筹学家 Saaty 教授提出的层次分析法 (AHP)[1,2], 是一种将定性分析与定量分析相结合的方法. 它广泛应用于社会、经济、政治、人的行为以及科学管理等领域的各种复杂问题的分析中, 将非常复杂的系统分析简化为各种因素之间的成对比较判断和简单排序计算, 从而使很多难以用参数数学模型方法解决的复杂系统分析成为可能. 在对决策方案进行排序和择优时, 需要专家对方案进行比较, 构造互反判断矩阵或模糊判断矩阵. 有关判断矩阵的排序与一致性问题的研究一直是最为重要的研究课题[3~5]. 目前互反判断矩阵与模糊判断矩阵的排序与一致性问题的研究成果十分丰富, 并已经趋于完善和成熟.

在实际决策过程中, 由于受决策者的知识结构、判断水平等诸多主观因素的影响, 加上客观事物本身的模糊性和不确定性, 专家所掌握的信息不足以把握事物的真实状态[6]. 因此, 专家在构造判断矩阵时往往会给出一些未确知的判断值, 比如用三角模糊数的形式给出判断值. 对于此类问题的研究具有

收稿日期: 2005-06-13; **修回日期**: 2005-11-10.
基金项目: 国家自然科学基金项目(70473037); 国家教育部博士学科点科研基金项目(20020287001).
作者简介: 巩在武(1975—), 男, 山东临沂人, 博士, 从事决策分析、灰色系统理论的研究; 刘思峰(1955—), 男, 河南平舆人, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论等研究.

重要理论价值和现实意义. 关于三角模糊数判断矩阵的研究一般都建立在上述互补或互反判断矩阵现有的理论基础上[7~11]. 但是, 由于三角模糊数运算的复杂性和特殊性, 许多经典判断矩阵的理论并非完全适用于三角模糊数判断矩阵. 因此, 需要对三角模糊数判断矩阵相关理论进行推广和创新. 本文主要研究三角模糊数互补判断矩阵的性质和排序问题.

2 主要结果

2.1 相关概念及性质

设 $X = \{X_1, \cdots, X_n\}$ 为方案集, 记 $N = \{1, \cdots, n\}$. 专家需要对决策方案进行两两比较. 专家按互反型和互补(模糊) 型标度进行赋值, 分别得到互反判断矩阵和互补(模糊) 判断矩阵. 若矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 满足 $b_{ii} = 1, b_{ij} = 1/b_{ji}, b_{ij} > 0, i, j \in N$, 则称 B 为互反判断矩阵. 若 B 为互反判断矩阵, 且满足 $b_{ij} = b_{ik}b_{kj}, i, k, j \in N$, 则称 B 为完全一致性互反判断矩阵. 若 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm T}$ 为完全一致性互反判断矩阵 B 的排序向量, 则 $b_{ij} = \omega_i/\omega_j, i, j \in N$. 若矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ii} = 0.5, a_{ij} + a_{ji} = 1, a_{ij} \geq 0, i, j \in N, i \neq j$, 则称 A 为互补判断矩阵. 若互补判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ik}a_{kj}a_{ji} = a_{ij}a_{jk}a_{ki}, i, j, k \in N, i \neq j \neq k$, 则称 A 为完全一致性互补判断矩阵. 互补判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 和互反判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 可通过公式 $a_{ij} = b_{ij}/(1 + b_{ij})$ 互相转换, $i, j \in N$.

下面给出三角模糊数的一些运算和性质[7]: 设 $a = (a_l, a_m, a_n), b = (b_l, b_m, b_n)$, 则

$$a \oplus b = (a_l, a_m, a_n) \oplus (b_l, b_m, b_n) = (a_l + b_l, a_m + b_m, a_n + b_n);$$

$$a \otimes b = (a_l, a_m, a_n) \otimes (b_l, b_m, b_n) = (a_lb_l, a_mb_m, a_nb_n);$$

$$a \geq b \Leftrightarrow a_l \geq b_l, a_m \geq b_m, a_n \geq b_n;$$

$$a = b \Leftrightarrow a_l = b_l, a_m = b_m, a_n = b_n;$$

$$1/a = (1/a_n, 1/a_m, 1/a_l).$$

对于任意实数 a, 都可以写成三角模糊数的形式, 即 $a = (a, a, a)$. 这里称 a_l, a_m, a_n 分别为三角模糊数 a 的最小元素、中间元素、最大元素.

若三角模糊数矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 中的元素满足 $a_{ij} = (a_{lij}, a_{mij}, a_{uij}), a_{ji} = (a_{lji}, a_{mji}, a_{uji})$, 且 $a_{lij} + a_{uji} = a_{mij} + a_{mji} = a_{uij} + a_{lji} = 1, a_{uij} \geq a_{mij} \geq a_{lij} > 0, i, j \in N$, 则称矩阵 A 是三角模糊数互补判断矩阵; 若三角模糊数矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 中的元素满足 $b_{ij} = (b_{lij}, b_{mij}, b_{uij}), b_{ji} = (b_{lji}, b_{mji}, b_{uji})$, 且 $b_{lij} \cdot b_{uji} = b_{mij} \cdot b_{mji} = b_{uij} \cdot b_{lji} = 1, b_{uij} \geq b_{mij} \geq b_{lij} > 0, i, j \in N$, 则称矩阵 B 是三角模糊数互反判断矩阵.

2.2 完全一致性三角模糊数互补判断矩阵

定义 1 若三角模糊数互反判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 的排序向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm T}, \omega_i = (\omega_{li}, \omega_{mi}, \omega_{ui})$, 满足 $b_{ij} = \omega_i/\omega_j, i, j \in N$, 则称矩阵 B 是完全一致性三角模糊数互反判断矩阵.

下面讨论三角模糊数互反判断矩阵与三角模糊数互补判断矩阵之间的相互转换关系.

定理 1 三角模糊数互补判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 与三角模糊数互反判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 之间可通过如下公式相互转换:

$$a_{ij} = (1 + b_{ji})^{-1}, \ i, j \in N. \tag{1}$$

证明 设 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 为三角数模糊互反判断矩, 令 $a_{ij} = (1 + b_{ji})^{-1}$, 即

$$(a_{lij}, a_{mij}, a_{uij}) = \frac{1}{1 + (b_{lji}, b_{mji}, b_{uji})} = (1/(1 + b_{uji}), 1/(1 + b_{mji}), 1/(1 + b_{lji})),$$

则

$$(a_{lji}, a_{mji}, a_{uji}) = \left(\frac{1}{1 + b_{uij}}, \frac{1}{1 + b_{mij}}, \frac{1}{1 + b_{lij}}\right).$$

从而有

$$a_{lij} + a_{uji} = (1 + b_{uji})^{-1} + (1 + b_{lij})^{-1} = (1 + b_{uji})^{-1} + (1 + b_{uji}^{-1})^{-1} = 1.$$

同理可得 $a_{mij} + a_{mji} = 1, a_{uij} + a_{lji} = 1$. 同时, 显然有 $a_{uij} \geq a_{mij} \geq a_{lij}$ 对所有的 $i, j \in N$ 成立. 从而 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是三角模糊数互补判断矩阵.

采用类似的方法可以证明, 三角模糊数互补判断矩阵可通过式(1), 即 $b_{ij} = a_{ji}^{-1} - 1$ 转换为三角模糊数互反判断矩阵. □

下面讨论三角模糊数互补判断矩阵完全一致性的概念.

设 $V = (v_1, \cdots, v_n)^{\mathrm T}$ 是完全一致性三角模糊数互反判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 的排序向量, 显然有 $b_{ij} = v_i/v_j$, 其中 $v_i = (v_{li}, v_{mi}, v_{ui}), i, j \in N$. 令 $a_{ij} = 1/(1 + b_{ji})$, 即

$$a_{ij} = 1/(1 + v_j/v_i) = \left(\frac{v_{li}}{v_{li} + v_{uj}}, \frac{v_{mi}}{v_{mi} + v_{mj}}, \frac{v_{ui}}{v_{lj} + v_{ui}}\right).$$

若设 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm T}$ 是三角模糊数互补判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的排序向量, 且有

$$a_{ij} = (a_{lij}, a_{mij}, a_{uij}) = \left(\frac{\omega_{li}}{\omega_{li} + \omega_{uj}}, \frac{\omega_{mi}}{\omega_{mi} + \omega_{mj}}, \frac{\omega_{ui}}{\omega_{lj} + \omega_{ui}}\right),$$

则这里显然不满足 $a_{ij}a_{jk}a_{ki} = a_{ji}a_{kj}a_{ik}$. 对 $\forall i, j, k \in N$, 有

$$\frac{1}{a_{ij}} - 1 = \left(\frac{1}{a_{uij}} - 1, \frac{1}{a_{mij}} - 1, \frac{1}{a_{lij}} - 1\right) =$$

$$(\omega_{lj}/\omega_{ui},\ \omega_{mj}/\omega_{mi},\ \omega_{uj}/\omega_{li}),$$

则

$$\Big(\frac{1}{a_{uij}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{ujk}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{uki}}-1\Big)=$$

$$\frac{\omega_{lj}}{\omega_{ui}}\frac{\omega_{lk}}{\omega_{uj}}\frac{\omega_{li}}{\omega_{uk}}=\frac{\omega_{li}}{\omega_{uj}}\frac{\omega_{lj}}{\omega_{uk}}\frac{\omega_{lk}}{\omega_{ui}}=$$

$$\Big(\frac{1}{a_{uji}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{ukj}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{uik}}-1\Big).\tag{2}$$

同理可证

$$\Big(\frac{1}{a_{lij}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{ljk}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{lki}}-1\Big)=$$

$$\Big(\frac{1}{a_{lji}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{lkj}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{lik}}-1\Big),\tag{3}$$

$$\Big(\frac{1}{a_{mij}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{mjk}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{mki}}-1\Big)=$$

$$\Big(\frac{1}{a_{mji}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{mkj}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{mik}}-1\Big),\tag{4}$$

即

$$\Big(\frac{1}{a_{ij}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{jk}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{ki}}-1\Big)=$$

$$\Big(\frac{1}{a_{ji}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{kj}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{ik}}-1\Big),\tag{5}$$

从而得到完全一致性三角模糊数互补判断矩阵的概念

定义 2　若三角模糊数互补判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中的元素满足条件(5), 则称该判断矩阵具有完全一致性(或一致传递性). 具有完全一致性的三角模糊数互补判断矩阵称为完全一致性三角模糊数互补判断矩阵

同完全一致性互补判断矩阵类似, 三角模糊数互补判断矩阵的一致传递性同样反映了人们思维的一致性 为了更好地说明这个问题, 下面给出比一致传递性更强的一个概念 —— 严格强传递性

定义 3　三角模糊数互补判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中的元素满足 $a_{ij}\geq(1/2,1/2,1/2)$, $a_{jk}\geq(1/2,1/2,1/2)$, 则有如下结论:

1) 若 $a_{lij}\geq a_{ljk}$, $a_{mij}\geq a_{mjk}$, $a_{uij}\geq a_{ujk}$, 即 $a_{ij}\geq a_{jk}$, 则 $a_{lik}\geq a_{lij}$ 或 $a_{mik}\geq a_{mij}$ 或 $a_{uik}\geq a_{uij}$;

2) 若 $a_{ljk}\geq a_{lij}$, $a_{mjk}\geq a_{mij}$, $a_{ujk}\geq a_{uij}$, 即 $a_{jk}\geq a_{ij}$, 则 $a_{lik}\geq a_{ljk}$ 或 $a_{mik}\geq a_{mjk}$ 或 $a_{uik}\geq a_{ujk}$.

称矩阵 A 具有严格强传递性

定义 3 的含义是, 若方案 X_i 优于 X_j 的程度为 a_{ij}, 方案 X_j 优于 X_k 的程度为 a_{jk}, 则 X_i 优于 X_k 的程度 a_{ik} 至少为三角模糊数 $\max\{a_{ij},a_{jk}\}$ 中相应的 3 个元素的最大者

定理 2　完全一致性三角模糊数互补判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 具有严格强传递性

证明　设 $a_{ij}\geq(1/2,1/2,1/2)$, $a_{jk}\geq(1/2,1/2,1/2)$. 结论 1) 的证明与结论 2) 完全相同, 这里只证明结论 2).

用反证法 不妨设 $a_{ik}<a_{jk}$, 有 $a_{lik}<a_{ljk}$, $a_{uik}<a_{ujk}$, $a_{mik}<a_{mjk}$, 则 $1-a_{lik}>1-a_{ljk}$, 即 $a_{uki}>a_{ukj}$, 所以有

$$\frac{1}{a_{uik}}-1>\frac{1}{a_{ujk}}-1,\ \frac{1}{a_{ukj}}-1>\frac{1}{a_{uki}}-1.\tag{6}$$

又因为 $a_{ij}\geq(1/2,1/2,1/2)$, 所以 $a_{ji}\leq(1/2,1/2,1/2)$, 从而

$$0<\frac{1}{a_{uij}}-1\leq 1,\ \frac{1}{a_{uji}}-1\geq 1.\tag{7}$$

由式(2) 和(7) 可知

$$1\cdot\Big(\frac{1}{a_{ujk}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{uki}}-1\Big)\geq$$

$$\Big(\frac{1}{a_{uij}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{ujk}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{uki}}-1\Big)=$$

$$\Big(\frac{1}{a_{uji}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{ukj}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{uik}}-1\Big)\geq$$

$$1\cdot\Big(\frac{1}{a_{ukj}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{uik}}-1\Big),$$

即

$$\Big(\frac{1}{a_{ujk}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{uki}}-1\Big)\geq\Big(\frac{1}{a_{ukj}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{uik}}-1\Big).\tag{8}$$

然而, 由式(6) 可知

$$\Big(\frac{1}{a_{ujk}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{uki}}-1\Big)<\Big(\frac{1}{a_{ukj}}-1\Big)\Big(\frac{1}{a_{uik}}-1\Big),\tag{9}$$

恰与式(9) 矛盾, 所以 $a_{lik}\geq a_{ljk}$, $a_{uik}\geq a_{ujk}$ 成立 同理可证 $a_{mik}\geq a_{mjk}$ 成立 □

定理 2 说明, 三角模糊数 a_{ik} 中至少有一个元素比 a_{ij} 和 a_{jk} 两数的最大者中相应元素大 通过定理 2 可以看出, 所给的三角模糊数互补判断矩阵完全一致性的定义是合理的

中分传递性是完全一致性互补判断矩阵的另外一条极为重要的性质, 它体现了人们决策思维的心理特征, 符合思维决策的一致性 对于三角数模糊互补判断矩阵, 同样需要建立中分传递性的概念, 并且完全一致性三角模糊数互补判断矩阵也应该具有中分传递性, 从而体现人们思维的一致性 如下定义和定理说明了这个基本的事实:

定义 4 设三角数模糊互补判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 若对任意的 $i,j,k\in N$, $i\neq j\neq k$, 都有: 当 $0.5\leq\lambda\leq 1$, 若 $a_{ij}\geq(\lambda,\lambda,\lambda)$, $a_{jk}\geq(\lambda,\lambda,\lambda)$, 则 $a_{uik}\geq\lambda$; 当 $0<\lambda\leq 0.5$, 若 $a_{ij}\leq(\lambda,\lambda,\lambda)$, $a_{jk}\leq(\lambda,\lambda,\lambda)$, 则 $a_{lik}\leq\lambda$ 则称矩阵 A 具有中分传递性

定义 4 的含义是, 若方案 X_i 优于 X_j 的程度为 $a_{ij}\geq(\lambda,\lambda,\lambda)$, 方案 X_j 优于 X_k 的程度为 $a_{jk}\geq(\lambda,\lambda,\lambda)$, 则 X_i 优于 X_k 的程度 a_{ik} 至少满足其最大元素大于 λ; 若方案 X_j 优于 X_i 的程度为 $a_{ij}\leq(\lambda,\lambda,\lambda)$, 方案 X_k

优于 X_j 的程度为 $a_{jk} \leq (\lambda, \lambda, \lambda)$, 则 X_k 优于 X_i 的程度 a_{ik} 至少满足其最小元素小于 λ.

定理 3 完全一致性三角模糊数互补判断矩阵具有中分传递性.

证明 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为完全一致性三角模糊数互补判断矩阵, 且对任意 $i, j, k \in N$, 有 $i \neq j \neq k$. 当 $0.5 \leq \lambda \leq 1$, 若 $a_{ij} \geq (\lambda, \lambda, \lambda)$, $a_{jk} \geq (\lambda, \lambda, \lambda)$, 则由定理 2 可知 $a_{uik} \geq \lambda$; 当 $0 \leq \lambda \leq 0.5$, 若 $a_{ij} \leq (\lambda, \lambda, \lambda)$, $a_{jk} \leq (\lambda, \lambda, \lambda)$, 则 $a_{ji} \geq (1-\lambda, 1-\lambda, 1-\lambda)$, $a_{kj} \geq (1-\lambda, 1-\lambda, 1-\lambda)$. 采用反证法证明, 假设 $a_{lik} > \lambda$, 即 $a_{ik} > (\lambda, \lambda, \lambda)$, $a_{ki} < (1-\lambda, 1-\lambda, 1-\lambda)$ 成立. 显然可得

$$\frac{1}{a_{lij}} - 1 \geq \frac{1}{\lambda} - 1, \frac{1}{a_{ljk}} - 1 \geq \frac{1}{\lambda} - 1,$$
$$\frac{1}{a_{lji}} - 1 \leq \frac{1}{1-\lambda} - 1, \frac{1}{a_{lkj}} - 1 \leq \frac{1}{1-\lambda} - 1. \tag{10}$$

由式(3) 和(10) 知

$$\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)\left(\frac{1}{a_{lik}} - 1\right) \geq$$
$$\left(\frac{1}{a_{lji}} - 1\right)\left(\frac{1}{a_{lkj}} - 1\right)\left(\frac{1}{a_{lik}} - 1\right) =$$
$$\left(\frac{1}{a_{lij}} - 1\right)\left(\frac{1}{a_{ljk}} - 1\right)\left(\frac{1}{a_{lki}} - 1\right) \geq$$
$$\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{a_{lki}} - 1\right).$$

整理得

$$\frac{1}{a_{lik}} - 1 \geq \left(\frac{1}{a_{lki}} - 1\right)\frac{(1-\lambda)^4}{\lambda^4}.$$

由 $1/a_{lki} - 1 > 1/(1-\lambda) - 1$ 知

$$a_{lik} < \lambda^3[\lambda^3 + (1-\lambda)^3]^{-1}.$$

很容易证明, 对 $0 < \lambda \leq 0.5$, $\lambda^3[\lambda^3 + (1-\lambda)^3]^{-1} \leq \lambda$ 恒成立, 即 $a_{lik} < \lambda^3[\lambda^3 + (1-\lambda)^3]^{-1} \leq \lambda < a_{lik}$. 矛盾, 从而 $a_{lik} \leq \lambda$ 成立. □

定理 3 说明, 当 $0.5 \leq \lambda \leq 1$, 若 $a_{ij} \geq (\lambda, \lambda, \lambda)$, $a_{jk} \geq (\lambda, \lambda, \lambda)$, 则至少 a_{ik} 中的最大元素 a_{uik} 比 λ 大; 当 $0 < \lambda \leq 0.5$, 若 $a_{ij} \leq (\lambda, \lambda, \lambda)$, $a_{jk} \leq (\lambda, \lambda, \lambda)$, 则至少 a_{ik} 中的最小元素 a_{lik} 比 λ 小.

定义 5 三角模糊数互补判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 中的元素若满足如下条件:

$$a_{ij} \geq (1/2, 1/2, 1/2),$$
$$a_{jk} \geq (1/2, 1/2, 1/2) \Rightarrow a_{uik} \geq 1/2;$$

或

$$a_{ij} \leq (1/2, 1/2, 1/2),$$
$$a_{jk} \leq (1/2, 1/2, 1/2) \Rightarrow a_{lik} \leq 1/2.$$

则称三角模糊判断矩阵具有弱传递性.

推论 1 完全一致性三角模糊数互补判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 具有弱传递性.

证明 由定理 3, 只需令 $\lambda = 1/2$ 即可得证. □

2.3 三角模糊数互补判断矩阵的排序方法

假设 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^T$ 是三角模糊数互补判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的排序向量, 其中 $\omega_i = (\omega_{li}, \omega_{mi}, \omega_{ui})$, $i \in N$, 则当 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是完全一致性矩阵时, $a_{ij} = (a_{lij}, a_{mij}, a_{uij}) = (\omega_{li}(\omega_{li} + \omega_{uj})^{-1}, \omega_{mi}(\omega_{mi} + \omega_{mj})^{-1}, \omega_{ui}(\omega_{lj} + \omega_{ui})^{-1})$. 即

$$\begin{cases} a_{lij}(\omega_{li} + \omega_{uj}) = \omega_{li}, \\ a_{mij}(\omega_{mi} + \omega_{mj}) = \omega_{mi}, \\ a_{uij}(\omega_{ui} + \omega_{lj}) = \omega_{ui}, \\ \quad i, j \in N. \end{cases} \tag{11}$$

但是, 在实际决策过程中所给的三角模糊数互补判断矩阵往往并不是完全一致的, 即式(11) 很难成立. 因此, 引入偏差函数

$$\begin{cases} g_{lij} = [a_{lij}(\omega_{li} + \omega_{uj}) - \omega_{li}]^2, \\ g_{mij} = [a_{mij}(\omega_{mi} + \omega_{mj}) - \omega_{mi}]^2, \\ g_{uij} = [a_{uij}(\omega_{ui} + \omega_{lj}) - \omega_{ui}]^2. \end{cases}$$

显然, 上述偏差函数总是越小越好. 建立如下目标优化模型:

$$\begin{cases} \min g_{lij} = [a_{lij}(\omega_{li} + \omega_{uj}) - \omega_{li}]^2, \\ \min g_{mij} = [a_{mij}(\omega_{mi} + \omega_{mj}) - \omega_{mi}]^2, \\ \min g_{uij} = [a_{uij}(\omega_{ui} + \omega_{lj}) - \omega_{ui}]^2, \\ \qquad 0 < \omega_{li} \leq \omega_{mi} \leq \omega_{ui} \leq 1; \\ 0 < \sum_{j=1}^{n} \omega_{lj} \leq 1 \leq \sum_{j=1}^{n} \omega_{uj}, \quad i, j \in N. \end{cases}$$

因为目标函数之间没有偏好关系, 因此建立下列非线性规划模型:

$$\min J = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} [a_{lij}(\omega_{li} + \omega_{uj}) - \omega_{li}]^2 + [a_{mij}(\omega_{mi} + \omega_{mj}) - \omega_{mi}]^2 + [a_{uij}(\omega_{ui} + \omega_{lj}) - \omega_{ui}]^2.$$

s.t.

$$\begin{cases} 0 < \omega_{li} \leq \omega_{mi} \leq \omega_{ui} \leq 1; \\ 0 < \sum_{i=1}^{n} \omega_{li} \leq 1 \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_{ui}, \quad i \in N. \end{cases} \tag{12}$$

3 算例分析

设某决策者针对方案集合 $\{X_1, X_2, X_3\}$ 给出的三角模糊数互补判断矩阵为

$$\begin{bmatrix} (0.5, 0.5, 0.5) & (0.4, 0.6, 0.8) & (0.3, 0.6, 0.8) \\ (0.2, 0.4, 0.6) & (0.5, 0.5, 0.5) & (0.2, 0.5, 0.6) \\ (0.2, 0.4, 0.7) & (0.4, 0.5, 0.8) & (0.5, 0.5, 0.5) \end{bmatrix}$$

根据模型(12), 利用求解非线性规划的数学软件 LINGO 可得

$$(\omega_{l1}, \omega_{m1}, \omega_{u1}) = (0.20, 0.43, 0.61),$$
$$(\omega_{l2}, \omega_{m2}, \omega_{u2}) = (0.14, 0.28, 0.28),$$

$$(\omega_3, \omega_{h3}, \omega_{l3}) = (0.17, 0.29, 0.50).$$

利用文献[10]给出的公式

$$\omega_i^{(\alpha)} = \frac{1}{2}[(1-\alpha)\omega_{li} + \omega_{hi} + \alpha\omega_{ui}],$$

$$i = 1, 2, 3,$$

计算三角模糊数的 ω_i ($i = 1, 2, 3$) 的期望值, 其中 α 值的选择取决于决策者的风险态度. 当 $\alpha > 0.5$ 时, 称决策者是追求风险的; 当 $\alpha = 0.5$ 时, 表示决策者是风险中立的; 当 $\alpha < 0.5$ 时, 表示决策者是厌恶风险的. 利用 $\omega_i^{(\alpha)}$ ($i = 1, 2, 3$) 值可得到如下相应的方案排序:

$$\omega_1^{\alpha} = 0.32 + 0.20\alpha;$$

$$\omega_2^{\alpha} = 0.21 + 0.07\alpha;$$

$$\omega_3^{\alpha} = 0.23 + 0.17\alpha.$$

显然对任意的 $0 \le \alpha \le 1$, 都有 $\omega_1 > \omega_3 > \omega_2$.

4　结　语

严格强一致性和中分传递性是模糊判断矩阵所特有的重要性质, 它反映了人们思维的一致性. 因此, 完全一致性三角模糊数互补判断矩阵也应同样具有严格强一致性和中分传递性. 本文正是从这个最基本的思想出发, 给出了新的完全一致性三角模糊数互补判断矩阵的概念, 同时给出了严格强一致性和弱一致性的定义. 在此基础上证明了它们之间的关系, 从而论证了所给的完全一致性概念的合理性. 三角模糊数互补判断矩阵排序方法的研究也是一个非常重要的课题, 为此本文给出了基于最小二乘的三角模糊数排序方法. 算例分析表明了该方法的可行性和有效性.

迄今为止, 对三角模糊数判断矩阵的研究还很不完善, 对其基础理论的研究和探讨将是一个很有意义的课题.

参考文献(References)

[1] Saaty T L. *The Analytic Hierarchy Process* [M]. New York: McGraw-Hill, 1980.

[2] 王莲芬, 许树柏. *层次分析法引论*[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1990.
(Wang L F, Xu S B. *The Introduction to the Analytic Hierarchy Process* [M]. Beijing: The Chinese People University Publication House, 1990.)

[3] Tanino T. Fuzzy Preference Orderings in Group Decision Making[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1984, 12(1): 117-131.

[4] 樊治平, 姜艳萍, 肖四汉. 模糊判断矩阵的一致性及其性质[J]. *控制与决策*, 2001, 16(1): 69-71.
(Fan Z P, Jiang Y P, Xiao S H. Consistency of Judgment Matrix and Its Properties[J]. *Control and Decision*, 2001, 16(1): 69-71.)

[5] 宋光兴, 杨德礼. 确定模糊判断矩阵排序向量的两类方法[J]. *系统工程理论方法应用*, 2004, 13(2): 161-166.
(Song G X, Yang D L. Two Kinds of Approaches for Determining the Priority Weight Vector of Fuzzy Judgment Matrix [J]. *Systems Engineering-theory Methodology Applications*, 2004, 13(2): 161-166.)

[6] 万玉成, 盛昭瀚. 基于未确知三值判断的层次分析法[J]. *系统工程理论与实践*, 2004, 24(12): 89-93.
(Wan Y C, Sheng Z H. The Analytic Hierarchy Process Based on the Unascertained Three-valued Judgments[J]. *Systems Engineering-theory & Practice*, 2004, 24(12): 89-93.)

[7] Kwiesielewicz M. A Note on the Fuzzy Extension of Satty's Priority Theory[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, 95(2): 161-172.

[8] 姜艳萍, 樊治平. 一种三角模糊数互补判断矩阵的排序方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2002, 24(7): 34-36.
(Jiang Y P, Fan Z P. A Ranking Method for Reciprocal Judgment Matrix with Triangular Fuzzy Numbers[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2002, 24(7): 34-36.)

[9] 徐泽水. 三角模糊数互补判断矩阵的一种排序方法[J]. *模糊系统与数学*, 2003, 16(1): 47-50.
(Xu Z S. A Method for Priorities of Triangular Fuzzy Number Complementary Judgment Matrices[J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2003, 16(1): 47-50.)

[10] 徐泽水. 三角模糊数互补判断矩阵排序方法研究[J]. *系统工程学报*, 2004, 19(1): 85-88.
(Xu Z S. Priority Method of Triangular Fuzzy Number of Complementary Judgment Matrix[J]. *J of Systems Engineering*, 2004, 19(1): 85-88.)

[11] 姜艳萍, 樊治平. 三角模糊数互补判断矩阵排序的一种实用方法[J]. *系统工程*, 2002, 20(2): 89-92.
(Jiang Y P, Fan Z P. A Practical Ranking Method for Reciprocal Judgment Matrix with Triangular Fuzzy Numbers[J]. *Systems Engineering*, 2002, 20(2): 89-92.)