文章编号: 1001-0920(2006)08-0923-03

一类非线性控制系统关于非光滑区域生存性的判别

高 岩
(上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

摘 要: 讨论微分包含关于非光滑区域生存性的判别问题 当右端集值映射为多面体, 边界为次可微函数, 且次微分为有限点集凸包时, 基于非光滑分析理论, 给出了在一点处检验生存性条件是否成立的方法 该方法将生存性判别转化为判别线性不等式组的相容性或等价地转化为求解一个线性规划问题 最后讨论了次可微函数上图的生存性问题

关键词: 微分包含; 非线性控制; 生存性; 非光滑分析; 次可微函数
中图分类号: O231. 2; TD350 **文献标识码**: A

Determining the Viability for a Class of Nonlinear Control Systems on a Region with Nonsmooth Boundary

GAO Yan
(School of Management, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China. E-mail: gaoyan1962@yahoo. com. cn)

Abstract: The viability of a differential inclusion on a region with nonsmooth boundary is studied. Based on nonsmooth analysis theory, the viability criterion is verified under the condition that the set-valued mapping in the right hand side is a polytope and the boundary function of the region is subdifferentiable and its subdifferential is a convex hull of finitely many points. This verification can be implemented by determining the consistency of a group of linear inequalities, or equivalently, by solving a linear programming problem. As a special case, the viability of epigraph of a sub-differentiable function is discussed.

Key words: Differential inclusion; Nonlinear control; Viability; Nonsmooth analysis; Sub-differentiable function

1 引 言

生存性是控制理论中的一个重要研究领域, 它在系统的稳定性和稳定化研究以及系统安全域的设计等方面都有着广泛的应用 例如, 在一定条件下, Lyapunov 稳定性等价于 Lyapunov 函数上图的生存性[1,2]. 目前, 关于生存性的研究主要集中在给定一个闭区域, 如何判断其是否为可生存的 尽管人们已提出了分别利用逼近切锥和逼近法锥给出的生存性判别准则, 然而对于一般的非线性控制系统, 这些判别准则很难具体应用[3~5].

考虑微分包含

$$x'(t) \in \mathrm{co}\{f_i(x) \mid i = 1, \cdots, p\}, x \in R^n \quad (1)$$

和区域

$$D = \{x \in R^n \mid g_j(x) \leq 0, j = 1, \cdots, m\}. \quad (2)$$

其中: $f_i(x)$ 为 R^n 到 R^n 上的适当函数, $i = 1, \cdots, p$; co 为凸包 当 $g_j(x)$ 为 R^n 上连续可微函数时, 文献[5]讨论了微分包含(1) 在集合(2) 上的生存性 本文讨论 $g_j(x)$ 为非光滑时微分包含(1) 在集合(2) 上的生存性判别问题, 给出一种可以具体使用的判别生存性的方法

2 可生存性和次可微函数的有关概念和性质

考虑一般形式的微分包含

$$x'(t) \in F(x), x \in R^n, \quad (3)$$

收稿日期: 2005-05-18; **修回日期**: 2005-07-19.
基金项目: 上海市教委重点项目(04EA01); 教育部归国留学人员基金; 上海市重点学科建设项目(T0502).
作者简介: 高岩(1962—), 男, 黑龙江五常人, 教授, 博士生导师, 博士, 从事非光滑优化、混杂系统控制等研究

这里 $F(x)$ 为适当映射[3,4]. 通常的线性和非线性控制系统都是微分包含(3) 的特殊形式. 例如, 当 $F(x) = \{f(x,u) | u \in U\}$ 时, 微分包含(3) 为通常的非线性系统.

定义 1[3]　设 $W \subset R^n$, 如果对任意初始条件 $x_0 \in W$, 存在解 $x(t)$, 使得 $x(t) \in W$, $\forall t \geq 0$, 则称微分包含(3) 在集合 W 上是可生存的.

定义 2[3,4]　设 $K \subset R^n$ 非空, 集合 K 在点 $x \in K$ 的切锥定义为

$$T_K(x) = \{v \in R^n | \lim_{\lambda \to 0^+} \inf d_K(x + \lambda v) = 0\},$$

其中 $d_K(y)$ 为点 $y \in R^n$ 到集合 K 的距离, 即 $d_K(y) = \inf_{s \in K} \| y - s \|$.

命题 1[3,4]　微分包含(3) 在闭集 $W \subset R^n$ 上是可生存的充要条件是对任意 $x \in W$, 有

$$F(x) \cap T_W(x) \neq \varnothing. \qquad (4)$$

对于集合 W 的内点 x, 有 $T_W(x) = R^n$, 这时式(4) 总成立, 于是, 要判别式(4) 是否成立, 只需考虑边界点.

集合 $S \subset R^n$ 的凸包定义为[4,6]

$$\mathrm{co}S = \Big\{x \in R^n \Big| \text{存在整数 } k \text{ 和 } x_1, \cdots, x_k \in S, \lambda_1, \cdots, \lambda_k \geq 0, \text{满足} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \text{使得} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j = x\Big\}$$

设 $f(x)$ 为 R^n 上的方向可微函数, 如果存在凸紧集 $\partial f(x) \in R^n$ 使得其方向导数可表示为

$$f'(x; d) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(f(x + td) - f(x)) = \max_{\zeta \in \partial f(x)} u^{\mathrm{T}} d, \forall d \in R^n,$$

则称 $f(x)$ 是次可微的, $\partial f(x)$ 称为 $f(x)$ 的次微分[6].

次可微函数是一族很广的非光滑函数, 连续函数、凸函数、极大值函数 $\max_{i \in I} h_i(x)$ 和 $\max_{y \in Y} h(x, y)$ (其中 $h_i(x)$ 和 $h(x,y)$ 均为连续可微函数, I 为有限指标集) 均为次可微函数. 较一般形式的次可微函数为

$$\Psi(x) = G(\max_{j \in J_1} h_{1j}(x), \cdots, \max_{j \in J_m} h_{mj}(x)). \qquad (5)$$

其中: G 和 h_{ij} 分别为 R^m 和 R^n 上连续可微函数; J_i 为有限指标集, $i = 1, \cdots, m$. 定义指标集 $J_i(x) = \{k \in J_i | f_{kj}(x) = \max_{j \in J_i} f_{ij}(x)\}$, 则 $\Psi(x)$ 的次微分为[7]

$$\partial\Psi(x) = \mathrm{co}\Big\{\xi \in R^n \Big| \xi = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial G(y_1, \cdots, y_m)}{\partial y_i}\Big|_{y_i = \max_{j \in J_i} f_{ij}(x)} \nabla f_{ij_i}(x), j_i \in J_i(x)\Big\}$$

显然, $\partial\Psi(x)$ 为有限点集凸包.

如果 $h_i(x)$ $(i \in I)$ 为次可微函数, 则 $h(x) = \max_{i \in I} h_i(x)$ 亦为次可微函数, 其次微分为

$$\partial h(x) = \mathrm{co} \bigcup_{i \in I(x)} \partial h_i(x),$$

其中 $I(x) = \{i \in I | h_i(x) = h(x)\}$[6]. 由此易见, 如果每个次微分 $\partial h_i(x)$ 为有限点集的凸包, 则 $\partial h(x)$ 也为有限点集凸包.

3　可生存性的判别方法

下面假设函数 $g_j(x)$ 是次可微的, 且次微分 $\partial g_j(x)$ 为有限点集凸包. 令 $g(x) = \max_{1 \leq j \leq m} g_j(x)$. 由于点 $x \in R^n$ 满足 $\max_{1 \leq j \leq m} g_j(x) \leq 0$ 等价于 $g_j(x) \leq 0$, $j = 1, \cdots, m$, 集合(2) 可等价地表示为 $D = \{x \in R^n | g(x) \leq 0\}$. 因为 $g_j(x)$ 是次可微的, 所以 $g(x)$ 也是次可微的. 又因为 $g_j(x)$ 的次微分为有限点集凸包, 所以 $g(x)$ 的次微分也为有限点集凸包. 记

$$\partial g(x) = \mathrm{co}\{v_1, \cdots, v_q\}. \qquad (6)$$

定义矩阵

$$M = (v_1, \cdots, v_p)^{\mathrm{T}}. \qquad (7)$$

为判别微分包含(1) 在集合(2) 上的生存性, 对于任意给定的 $x \in R^n$, 判别下式是否成立:

$$\mathrm{co}\{f_i(x) | i = 1, \cdots, p\} \cap T_D(x) \neq \varnothing. \qquad (8)$$

下面给出集合 D 在 x 点处的约束品性.

约束品性 1[3]　存在 $y_0 \in R^n$, 使得 $g'(x; y_0) < 0$.

约束品性 2[5]　$\mathrm{cl}\,\mathcal{Y}(x) = \Gamma(x)$ 成立, 其中 $\mathcal{Y}(x) = \{y \in R^n | g'(x; y) < 0\}$, $\Gamma(x) = \{y \in R^n | g'(x; y) \leq 0\}$, cl 为闭包.

命题 2[1,5]　如果集合 D 在 $x \in R^n$ 处满足约束品性 1 或满足约束品性 2, 则有 $T_D(x) = \Gamma(x)$.

定理 1　假设约束品性 1 或约束品性 2 成立, 则有 $T_D(x) = \{y \in R^n | My \leq 0\}$.

证明　根据命题 2, 只需证明对固定的 $x \in R^n$, $g'(x; y) \leq 0$ 等价于 $My \leq 0$. 根据凸分析有关知识得[6]

$$g'(x; y) = \max_{v \in \partial g(x)} v^{\mathrm{T}} y = \max_{1 \leq i \leq q} v_i^{\mathrm{T}} y. \qquad (9)$$

由于 $\max_{1 \leq i \leq q} v_i^{\mathrm{T}} y \leq 0$ 等价于 $v_i^{\mathrm{T}} y \leq 0$, $\forall 1 \leq i \leq q$, 根据矩阵 M 的定义, $v_i^{\mathrm{T}} y \leq 0$, $\forall 1 \leq i \leq m$, 等价于 $My \leq 0$. 由式(9) 得, $g'(x; y) \leq 0$ 等价于 $My \leq 0$. □

根据定理 1, 判别式(8) 可转化为判别

$$\mathrm{co}\{f_i(x) | i = 1, \cdots, p\} \cap \{y \in R^n | My \leq 0\} \neq \varnothing. \qquad (10)$$

构造下述线性不等式组:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i M f_i(x) \leq 0,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,$$
$$\lambda_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, p. \tag{11}$$

其中: $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ 为变量, x 为 R^n 中固定点. 不等式组(11) 有 $m + p$ 个不等式和 1 个等式.

命题 3[5]　令 $U = \mathrm{co}\{u_i | i = 1, \cdots, p\}, V = \{y \in R^n | By \leq 0\}$, 其中: $u_i \in R^n$, B 是 $m \times n$ 阶矩阵. 构造线性不等式组

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i B u_i \leq 0,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,$$
$$\lambda_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, p, \tag{12}$$

其中 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ 为变量. 集合 $U \cap V$ 非空的充要条件是不等式组(12) 有解.

根据命题 3, 式(10) 成立的充要条件为线性不等式组(11) 有解. 这样, 可通过判别线性不等式组(11) 是否有解来检验生存性条件. 当然, 判别线性不等式组是否有解可等价地转化为求解一个线性规划问题[5,8], 因此是非常容易实现的.

例 1　在微分包含(1) 中, 设

$$f_1(x) = (x_1, x_1 - x_2)^{\mathrm{T}},$$
$$f_2(x) = (x_1 + x_2, x_2)^{\mathrm{T}},$$
$$g(x) = \max\{-x_1, -x_2, x_1^2 + x_2^2 - 1\},$$
$$x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}.$$

易见 $g(x)$ 为次可微函数, 集合 $D = \{x \in R^2 | g(x) \leq 0\}$ 为 1/4 单位圆. 考虑点 $x^{(1)} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$ 和 $x^{(2)} = (1, 0)^{\mathrm{T}}$, 根据次微分定义及运算得[6]

$$\partial g(x^{(1)}) = \mathrm{co}\{(-1, 0)^{\mathrm{T}}, (0, 2)^{\mathrm{T}}\},$$
$$\partial g(x^{(2)}) = \mathrm{co}\{(0, -1)^{\mathrm{T}}, (2, 0)^{\mathrm{T}}\}.$$

$f_i(x)$ 在 $x^{(1)}$ 和 $x^{(2)}$ 处的值为

$$f_1(x^{(1)}) = (0, -1)^{\mathrm{T}}, f_2(x^{(1)}) = (1, 1)^{\mathrm{T}},$$
$$f_1(x^{(2)}) = (1, 1)^{\mathrm{T}}, f_2(x^{(2)}) = (1, 0)^{\mathrm{T}}.$$

通过验证可知, 对于点 $x^{(1)}$, 不等式组(11) 有解; 对于点 $x^{(2)}$, 不等式组(11) 无解. 即微分包含在 $x^{(1)} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$ 处满足生存性条件, 在 $x^{(2)} = (1, 0)^{\mathrm{T}}$ 处不满足生存性条件.

4　次可微函数上图的生存性判别

R^n 上函数 $V(x)$ 的上图定义为

$$\mathrm{Epi}(V) = \{(x, w) \in R^{n+1} | V(x) - w \leq 0\}.$$

令 $H(z) = V(x) - w$, 其中 $z = (x, w)$, 则有 $\mathrm{Epi}(V) = \{z \in R^{n+1} | H(z) \leq 0\}$. 设 $V(x)$ 是次可微的, 记 $S(z) = \{(u, -1) | u \in \partial V(s)\}$. 通过计算得 $H'(z; d) = \max_{\xi \in S(z)} \xi^{\mathrm{T}} d$. 根据次可微函数定义, $H(z)$ 是次可微的, 其次微分为 $\partial H(z) = S(z) = \{(u, -1) | u \in \partial V(x)\}$. 假设 $V(x)$ 的次微分为式(6) 的形式, 则 $\partial H(x) = \mathrm{co}\{(v_1, -1), \cdots, (v_p, -1)\}$ 为有限点集凸包. 因此, 本文方法可用来判别上图 $\mathrm{Epi}(V)$ 的生存性问题.

在稳定性和稳定化研究中, 经常遇到的非光滑 Lyapunov 函数是次可微的, 且次微分为有限点集凸包. 例如, Lyapunov 函数 $V(x) = \max_{i \in I} V_i(x)$, 其中 $V_i(x)$ 为连续可微函数, 即为式(5) 的特殊形式, 因此是次可微的, 其次微分为有限点集凸包. 于是可通过 Lyapunov 函数上图的可生存性来研究 Lyapunov 稳定性和稳定化问题.

5　结　　论

本文讨论了一类微分包含在边界条件为次可微函数的非光滑区域上生存性判别问题. 所提出的方法将生存性判别转化为判别一个线性不等式组是否有解或等价地转化为求解一个线性规划问题. 该方法还可用于 Lyapunov 函数上图的生存性判别问题, 这在稳定性和稳定化研究中具有重要意义.

参考文献(References)

[1] Quincampoix M, Seube N. Stabilization of Uncertain Control Systems Through Piecewise Constant Feedback[J]. *J Mathematics Analysis and Applications*, 1998, 218(1): 240-255.

[2] Gao Y, Lygeros J, Quincampoix M, et al. On the Control of Uncertain Impulsive System: Approximate Stabilisation and Controlled Invariance[J]. *Int J Control*, 2004, 77(16): 1393-1407.

[3] Aubin J-P. *Viability Theory*[M]. Boston: Birkhauser, 1991.

[4] Clarke F H, Leda Yu S, Stern R J, et al. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*[M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

[5] 高岩. 一类非线性控制系统可生存性的判别[J]. *信息与控制*, 2005, 34(4): 510-512.
(Gao Y. Determining the Viability for a Class of Nonlinear Control Systems[J]. *Information and Control*, 2005, 34(4): 510-512.)

[6] Demyanov V F, Rubinov A M. *Constructive Nonsmooth Analysis*[M]. Frankfurt am Main: Peterlang, 1995.

[7] Gao Y. Demyanov Difference of Two Sets and Optimality Conditions of Lagrange Multiplier Type for Constrained Quasidifferentiable Optimization[J]. *J Optimization Theory and Applications*, 2000, 104(2): 377-394.

[8] 聂义勇, 贵刚, 宋翔. *整数规划基础*[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2001.
(Nie Y Y, Gui G, Song X. *Integer Programming*[M]. Shenyang: Northeastern University Press, 2001.)