第21卷 第8期
Vol 21 No. 8

控 制 与 决 策
Control and Decision

2006年8月
Aug 2006

文章编号: 1001-0920(2006)08-0853-04

基于单位分解的一类非线性系统的变结构控制设计

王银河, 韩东方
(汕头大学 理学院, 广东 汕头 515063)

摘 要: 采用单位分解概念和技术, 结合变结构控制方法和LMI方法, 讨论一类非线性系统的控制设计问题. 首先利用单位分解在紧致域上能够以任意给定精度逼近连续函数的性质, 将一类非线性系统表示为带有误差的近似模形式; 然后在误差满足某些条件的情况下, 利用变结构控制设计了渐近稳定控制器; 最后以仿真实例说明了该方法的有效性.

关键词: 单位分解; 逼近定理; 变结构控制
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Variable Structure Control for a Class of Nonlinear Systems Based on Partition of Unity

WANG Yin-he, HAN Dong-fang
(Science College, Shantou University, Shantou 515063, China. Correspondent: WANG Yin-he, E-mail: yhwang@stu.edu.cn)

Abstract: The controller design problem is addressed for a class of nonlinear systems by using partition of unity and variable structure control method. A nonlinear control system is represented as an approximate model with errors. Then, a variable structure controller is designed based on the approximate model and under certain error conditions. Asymptotic stability of the closed-loop system is ensured. An example shows the validity of the proposed method.

Key words: Partition of unity; Approximating theorem; Approximate model; Asymptotic stabilization

1 引 言

微分几何概念和方法是对非线性系统进行控制设计的重要工具[1]. 使用微分几何的概念和方法可以将被控系统数学模型转化为各种类型的标准型; 然后从这些标准型出发进行控制设计[1,2]. 单位分解是微分几何中的一个重要概念, 它是与流形上的开覆盖簇紧密相关、具有局部支撑及归一和的函数簇. 利用单位分解的这些特性, 可以将系统状态空间的局部性质拼接起来, 从而得到系统的某些整体性质. 在材料和岩石力学领域已经取得了利用单位分解的特性来改进有限元计算方法的成果[3], 但这些方法不涉及控制设计问题. 在系统控制设计方面已经证明在一个欧氏空间的紧致域上, 单位分解的线性组合具有以任意精度逼近连续函数的能力[4]. 利用这一特性可以逼近被控系统不确定性, 然后结合Lyapunov方法等为某些不确定线性系统设计鲁棒控制器[4~6].

本文采用单位分解概念和技术, 结合变结构控制方法[7]和LMI方法, 讨论了一类非线性系统的控制设计问题. 基本思路是, 首先利用单位分解的逼近性质, 将原系统转化为某种带有误差的近似模标准型; 然后基于这个近似模设计系统的变结构镇定控制器. 所设计的控制器在一定条件下, 能够保证被控系统渐近稳定.

2 系统描述

考虑如下形式的非线性控制系统:

收稿日期: 2005-06-13; **修回日期**: 2005-09-05.
基金项目: 广东省自然科学基金项目(032035).
作者简介: 王银河(1962—), 男, 内蒙古包头人, 教授, 博士, 从事非线性系统的结构分析和控制研究; 韩东方(1979—), 男, 武汉人, 博士生, 从事非线性系统的结构分析和控制研究.

$$\dot{x} = F(x)x + BG(x,t)u. \tag{1}$$

其中: 状态 $x \in \bar{U} \subseteq \mathbf{R}^n$, $\bar{U} \subset \mathbf{R}^n$ 是紧致域; 输入 $u \in R^r$; $F(x) = (f_{ij}(x))_{n\times n}$; $G(x,t) = (g_{il}(x,t))_{r\times r}$ 是在 $\bar{U}$ 上连续的非奇异函数矩阵; B 是一个 $n\times r$ 阶的实数矩阵.

定义 1[8] 设 $\{U_i\}(i = 1, 2, \cdots, N)$ 是 R^n 中紧致域 $\bar{U}$ 的一个开覆盖. 从属于这个开覆盖的 C^∞ 单位分解是指定义在 $U = \sum_{i=1}^{N} U_i$ 上的满足下列条件的一组 C^∞ 函数 $\{\alpha_i\}$:

1) 在 U 上, $\alpha_i \geq 0$;

2) 对于任意的 $1 \leq i \leq N$, 存在 U_i 使 α_i 的支撑集 $\mathrm{supp}(\alpha_i) \subseteq U_i$;

3) 对于任意的 $x \in U$, $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(x) = 1$. 其中集合 $\mathrm{supp}(\alpha_i) \triangleq \overline{\{x \in U \mid \alpha_i(x) \neq 0\}}$.

定理 1[8] 对于紧致域 $\bar{U} \subseteq R^n$ 的任何一个开覆盖 $\{U_i\}$ 都存在一个从属于它的 C^∞ 单位分解 $\{\alpha_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, N$.

定义 2[4] 设 F 是由下列定义在紧致域 $\bar{U}$ 上的某些连续函数组成的集合: $f \in F$ 当且仅当存在一个 $\bar{U}$ 的开覆盖 $\{U_i, i = 1, 2, \cdots, N\}$ 和一个从属于它的 C^∞ 单位分解 $\{\alpha_i\}$, 使得能有 N 个实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$ 满足 $f(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \alpha_i(x)$. 称 F 为基于紧致域 $\bar{U}$ 的单位分解展式集合.

容易验证定义 2 中集合 F 在度量 $d_\infty(f_1, f_2) = \sup_{x\in U} |f_1(x) - f_2(x)|$ 意义下是一个度量空间.

定理 2[4] 对于任意给定的紧致域 $\bar{U} \subset R^n$ 上的实连续函数 g 和任意正实数 $\epsilon > 0$, 一定存在 $f \in F$ 使得

$$\sup_{x\in U} |g(x) - f(x)| < \epsilon \tag{2}$$

在应用定理 2 时, 可以首先选择紧致域的开覆盖, 进而构造出单位分解 $\{\alpha_i\}$, 得到表达式 $f(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \alpha_i(x)$; 然后利用线性估计的理论和技术确定参数 λ_i. 关于如何选取单位分解可参见文献[4,5].

定理 3 设 $\xi_i = \xi_i(x)(1 \leq i \leq m)$ 是 m 个在紧致域 $\bar{U} \subset \mathbf{R}^n$ 上连续的函数, $\epsilon_i > 0$ 是任意给定的 m 个实数, 那么一定存在一个 $\bar{U} \subset \mathbf{R}^n$ 上的开覆盖 $\{U_k\}$ 和从属于它的单位分解 $\{\alpha_k\}$, $k = 1, \cdots, N$, 以及 $m \times N$ 个实数 γ_{ik}, 使下列不等式同时成立:

$$\sup_{x\in U} \left| \xi_i(x) - \sum_{k=1}^{N} \gamma_{ik} \alpha_k(x) \right| < \epsilon_i \tag{3}$$

证明 利用定理 2, 针对 $\xi_i = \xi_i(x)$, $1 \leq i \leq m$, 有从属于 $\bar{U}$ 的开覆盖 $\{U_{ik}\}$ 的单位分解 α_{ik}, $k = 1, \cdots, N_i$, 使对于任意给定的 $\epsilon_i > 0$, 有下列不等式成立:

$$\sup_{x\in U} \left| \xi_i(x) - \sum_{k=1}^{N_i} \lambda_{ik} \alpha_{ik} \right| < \epsilon_i. \tag{4}$$

构造 $\bar{U}$ 的一个开覆盖簇 $\{U_{ik}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq N_i\}$. 容易验证函数簇 $\left\{\frac{1}{m}\alpha_{ik}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq N_i\right\}$ 是从属于 $\{U_{ik}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq N_i\}$ 单位分解. 记 $\bar{\alpha}_{ik} = \frac{1}{m}\alpha_{ik}$, $\bar{\lambda}_{ik} = m\lambda_{ik}$. 式(4) 可改写为

$$\sup_{x\in U} \left| \xi_i(x) - \sum_{k=1}^{N_i} \bar{\lambda}_{ik} \bar{\alpha}_{ik} \right| < \epsilon_i. \tag{5}$$

其中 $\bar{\alpha}_{ik}$ 可按次序排列如下:

$$\begin{aligned}
&\hat{\alpha}_j = \bar{\alpha}_{1j}, 1 \leq j \leq N_1; \\
&\hat{\alpha}_{N_1+j} = \bar{\alpha}_{2j}, 1 \leq j \leq N_2; \\
&\hat{\alpha}_{N_1+N_2+j} = \bar{\alpha}_{3j}, 1 \leq j \leq N_3; \\
&\quad\vdots \\
&\hat{\alpha}_{\sum_{k=1}^{m-1} N_k + j} = \bar{\alpha}_{mj}, 1 \leq j \leq N_m.
\end{aligned} \tag{6}$$

也即式(5) 可表示为

$$\sup_{x\in U} \left| \xi_i(x) - \sum_{s=1}^{N} \hat{\lambda}_{is} \hat{\alpha}_s \right| < \epsilon_i. \tag{7}$$

其中

$$N = \sum_{i=1}^{m} N_i,$$

$$\hat{\lambda}_{is} = \begin{cases} \bar{\lambda}_{is}, & \sum_{k=1}^{i-1} N_k \leq s \leq \sum_{k=1}^{i} N_k, \\ 0, & \text{other.} \end{cases}$$

□

定理 3 说明对于不同的函数可采用同一个单位分解进行逼近, 逼近项的差异在形式上只是单位分解线性组合的系数不同. 下面利用定理 3 将系统(1) 表示为另外一种称之为“带有误差的近似模”形式.

对于系统(1) 中的函数 $f_{ij}(x)$, $i, j = 1, \cdots, n$, 利用定理 3, 有从属于开覆盖 $\{U_k\}$ 的单位分解 $\{\alpha_k\}$, $k = 1, \cdots, N$, 使下列等式成立:

$$f_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{ij}^{k} \alpha_k(x) + e_{ij}(x), \tag{8}$$

其中误差 $e_{ij}(x)$ 满足 $\sup_{x\in U} |e_{ij}(x)| < \epsilon_{ij}$.

假设 1

$$F(x) = (f_{ij}(x))_{n\times n}, G(x) = (g_{il}(x))_{n\times r}$$

在 $\bigcup_{k=1}^{N} U_k$ 上连续.

假设 2 在式(8) 中, 选取 $\lambda_{ij}^{k} = f_{ij}(x^k)$, 其中 $x^k = (x^{k1} \quad x^{k2} \quad \cdots \quad x^{kn})^{\mathrm{T}}$ 是从属于开覆盖 $\{U_k\}$ 的一组采样点, $k = 1, 2, \cdots, N$, $i, j = 1, \cdots, n$.

由式(8), 有

$$F(x)x = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x) A_k x + (e_{ij}(x))_{n\times n} x, \qquad (9)$$

其中$A_k = (\lambda_{ij}^k)_{n\times n}$. 因此, 系统(1) 可表示为以下带有误差的近似模:

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x) A_k x + BG(x,t)u + e, \qquad (10)$$

其中误差$e = (e_{ij}(x))_{n\times n} x$.

3　变结构控制设计

本文需要以下假设:

假设 3　系统(1) (或(10)) 中, 矩阵B 列满秩.

假设 4　系统(10) 中, 存在有界连续向量函数$\bar{e}(x)$ 使误差 $e = (e_{ij}(x))_{n\times n} x$ 满足匹配条件 $e = B\bar{e}(x)$, 其中 $\|\bar{e}(x)\| \le \alpha(x)$, $\alpha(x)$ 是已知的在覆盖域上连续的非负函数.

假设 5　存在正定对称矩阵 P 和 $r\times n$ 阶矩阵 M 使下列线性矩阵不等式(LMI) 同时成立($k = 1, 2, \cdots, N$):

$$A_k P + PA_k^{\mathrm{T}} + BM + M^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} < 0. \qquad (11)$$

对于系统(10), 在上述假设下, 提出以下变结构控制器:

$$u = G^{-1}(x,t)\Big\{-\sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x)(B^{\mathrm{T}}P^{-1}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}P^{-1}A_k x - \tau_1 s - \tau_2 \operatorname{sign} s - a(x)\|x\| \operatorname{sign} s\Big\}, \qquad (12)$$

其中 τ_1 和 τ_2 是正的可调参数. 其余符号如下:

$$s = (B^{\mathrm{T}}P^{-1}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}P^{-1}x. \qquad (13)$$

滑模面为

$$S = \{x \in R^n; s = 0\}. \qquad (14)$$

符号函数

$$\operatorname{sign} s = (\operatorname{sign} s_1 \quad \operatorname{sign} s_2 \quad \cdots \quad \operatorname{sign} s_r)^{\mathrm{T}}, \qquad (15)$$

其中$s = (s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_r)^{\mathrm{T}}$.

定理 4　考虑系统(10) (或(1)), 若假设 1～ 假设 5 成立, 则变结构控制器(12) 能使系统(10) (或(1)) 渐近稳定.

证明　考虑正定函数$W = \|s\|^2 = s^{\mathrm{T}}s$, 它沿系统(10) 关于 t 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|s\|^2) = -2\tau_1 s^{\mathrm{T}}s - 2\tau_2 s^{\mathrm{T}} \operatorname{sign} s - 2(a(x)\|x\| s^{\mathrm{T}} \operatorname{sign} s - s^{\mathrm{T}}\bar{e}). \qquad (16)$$

注意到不等式 $s_i \operatorname{sign} s_i \ge 0$, 等号成立当且仅当 $s_i = 0$, $1 \le i \le r$, 有

$$\Big(\sum_{i=1}^{r} s_i \operatorname{sign} s_i\Big)^2 \ge \sum_{i=1}^{r} s_i^2 \operatorname{sign}^2 s_i \ge \sum_{i=1}^{r} s_i^2. \qquad (17)$$

于是, 利用柯西 - 施瓦兹不等式及假设 4 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|s\|^2) \le -2\tau_1 s^{\mathrm{T}}s - 2\tau_2 s^{\mathrm{T}} \operatorname{sign} s \le 0. \qquad (18)$$

由此, 定理 4 得证. □

4　仿真算例

考虑下面的倒立摆系统[9]:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g\sin x_1 - 0.5m\lambda l x_2^2 \sin 2x_1}{l(4/3 - \lambda m\cos^2 x_1)} + \frac{-\lambda\cos x_1}{l(4/3 - \lambda m\cos^2 x_1)}u. \qquad (19)$$

其中: x_1 为离开垂直线的摆角度, x_2 为角速度, u 为加在小车上的控制力, $\lambda = 1/(M+m)$, 其余符号参见文献[9]. 参照文献[9], 取$m = 2.0$ kg, $M = 8.0$ kg, $2l = 1.0$ m. 容易看出, 倒立摆系统(19) 可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} G(x)u. \qquad (20)$$

其中

$$f_{21} = \frac{g\Delta(x_1)}{l(4/3 - \lambda m\cos^2 x_1)},$$

$$f_{22} = \frac{-0.5m\lambda l x_2 \sin 2x_1}{l(4/3 - \lambda m\cos^2 x_1)},$$

$$G(x) = \frac{-\lambda\cos x_1}{l(4/3 - \lambda m\cos^2 x_1)};$$

连续函数

$$\Delta(x_1) = \begin{cases} \dfrac{\sin x_1}{x_1}, & x_1 \ne 0; \\ 1, & x_1 = 0. \end{cases}$$

考虑紧致域

$$\bar{U} = \left[0 \quad \frac{22}{45}\pi\right] \times [0 \quad 200].$$

选取覆盖

$$U_1 = (-5° \quad 45°) \times (-10 \quad 250),$$

$$U_2 = (30° \quad 60°) \times (-10 \quad 250),$$

$$U_3 = (50° \quad 89°) \times (-10 \quad 250).$$

相应的采样点分别为

$$(0 \quad 0), (45° \quad 200), (88° \quad 200).$$

直接计算得近似模(10) 中的矩阵分别为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 17.294\,1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 14.307\,7 & -16.216\,2 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.566\,9 & -1.046\,5 \end{bmatrix}.$$

取初值$x(0) = [1.5 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ $(1.5 \approx 86°)$, 仿真结果如

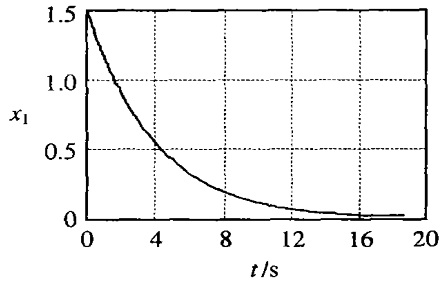

图 1 状态 x_1 响应曲线

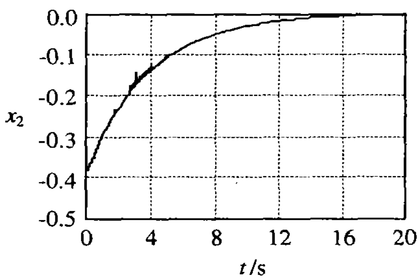

图 2 状态 x_2 响应曲线

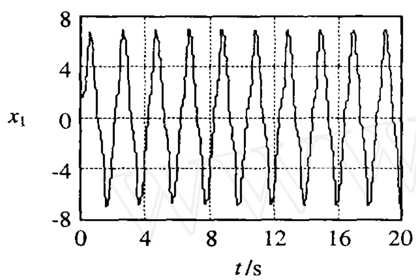

图 3 具有线性控制器的状态 x_1 响应曲线

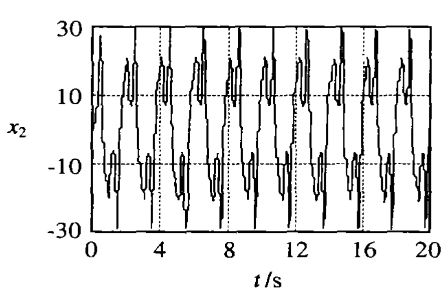

图 4 具有线性控制器的状态 x_2 响应曲线

图1和图2所示. 作为比较, 本文选用线性控制器 $u = 143.33x_1 + 45.33x_2$ (该控制器将系统(19)的近似线性化模型的极点配置到 -2, -2), 其控制效果如图 3 和图 4 所示. 由此可以看出, 本文得到的非线性控制器具有更强的控制能力.

5 结 论

利用单位分解的逼近性质, 可以将非线性系统表示为带有误差的近似模型. 由这个近似模型出发, 可以较为方便地讨论误差满足一定条件的非线性系统的控制设计问题.

参考文献(References)

[1] Isidori A. *Nonlinear Control Systems: An Introduction* [M]. 2nd Edition. New york: Springer-Verlag, 1989.

[2] Moog C H, Perdon A M, Conte G. Canonical Decomposition of Nonlinear Systems[J]. *Automatica*, 1997, 33(8): 1561-1565.

[3] Melenk J M, Babuska I. The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications[J]. *Computer Methods Applications Mech Engrg*, 1996, 139(1): 289-314.

[4] Wang Y H, Li Z Y, Zhang S Y. Approximation Property of Partition of Unity and Its Applications[J]. *J of Control and Applications*, 2004, 2(3): 267-275.

[5] Wang Y H, Li Z Y, Zhang S Y. Universal Approximator and Control Design Based on Partition of Unity[J]. *WSEAS Trans on Circuits and Systems*, 2004, 3(8): 1676-1681.

[6] Wang Y H, Liu Y J, Wang W L. Control Synthesis For a Class of MIMO Nonlinear Systems Based on Partition of Unity[A]. *Proc of the 24th Chinese Control Conf* [C]. Guangzhou, 2005: 908-911.

[7] 高为炳. *变结构控制理论基础*[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 1990.
(Gao W B. *Theory of Variable Structure Control* [M]. Beijing: China Science Technology Press, 1990.)

[8] Boothby W M. *An Introduction to Differentiable Geometry* [M]. 2nd Edition. New York: Academic Press, Inc, 1986.

[9] Baumann W T, Rugh W J. Feedback Control of Nonlinear Systems by Extended Linearization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1986, 31(1): 40-46.

(上接第 852 页)

[10] Burges C J C. Geometry and Invariance in Kernel Based Methods [A]. Advance in Kernel Methods-support Vector Learning[C]. Cambridge: MIT Press, 1999: 89-116.

[11] Smola A, Schölkopf B, Müller K R. The Connection between Regularization Operators and Support Vector Kernels[J]. *Neural Networks*, 1998, 11(4): 637-649.

[12] Ester M, Kriegel H P, Sander J, et al. Density-based Algorithm for Discovering Clusters in Large Spatial Databases with Noise[A]. *Proc of the 2nd Int Conf on Knowledge Discovery and Data Mining* [C]. Portland, 1996: 226-231.