

文章编号: 1001-0920(2006)08-0879-06

基于语言判断矩阵的专家群体判断一致性分析

陈 侠^{1,2}, 樊治平¹, 陈 岩¹

(1. 东北大学 工商管理学院, 沈阳 110004; 2 沈阳航空工业学院 理学系, 沈阳 110034)

摘 要: 针对群决策中基于语言判断矩阵的专家群体判断一致性问题, 提出了一种分析方法. 首先给出有关语言判断矩阵, 导出矩阵和相容性的若干定义, 得出了语言判断矩阵具有完全一致性或满意一致性的充要条件, 其相应的导出矩阵也具有同样的结论; 然后通过定义有关专家群体判断各个方案以及专家群体判断的一致性指标, 给出了专家群体判断一致性的判别方法及专家群体判断不一致的调整方法; 最后通过一个算例说明了所提出方法的有效性.

关键词: 群决策; 语言判断矩阵; 导出矩阵; 一致性; 相容性

中图分类号: N 945 25; C 945

文献标识码: A

Consistency Analysis of Expert Group's Judgments Based on Linguistic Judgment Matrices

CH EN Xia^{1,2}, FAN Zhi-ping¹, CH EN Yan¹

(1. School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2 Department of Natural Sciences, Shenyang Institute of Aeronautical Engineering, Shenyang 110034, China Correspondent: CHEN Xia, E-mail: chxaa-1208@163.com)

Abstract: An analytic method is proposed for the consistence problem of expert group's judgments based on linguistic judgment matrices. Concepts of the linguistic judgment matrix, educed matrix and compatibility are introduced. A linguistic judgment matrix is shown to be complete consistent or weak consistent if and only if the corresponding educed matrix is complete or weak consistent. Then, a judgment approach to the consistency of expert group's judgment and an improving approach to the non-consistency of expert group's judgment are proposed based on definitions of the consistency level of each alternative and the consensus index of expert group's judgment. Finally, a numerical example shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: Group decision making; Linguistic judgment matrix; Educed matrix; Consistency; Compatibility

1 引 言

近年来, 有关群决策理论与方法的研究一直受到许多学者的重视. 在群决策分析中, 专家给出的两两方案比较的判断矩阵是一种常见的偏好信息形式, 其中基于互反判断矩阵或模糊互补判断矩阵的群决策研究已取得丰富的成果^[1~6]. 目前, 有关基于语言判断矩阵形式偏好信息的群决策方法已引起人们的关注, 发现了一些有价值的研究成果^[7~9, 12~14].

但需要指出的是, 在实际的群决策过程中, 由于各个专家受到知识结构、评判水平和个人偏好等众多因素的影响, 专家群体判断结果是否能达成一致是一个值得关注的问题. 因此, 研究群决策中基于语言判断矩阵偏好信息的专家群体判断一致性问题具有重要意义^[10, 11].

文献^[10, 11]分别给出了基于语言判断矩阵的专家群体一致性分析方法, 但没有给出如何判断专

收稿日期: 2005-07-08; 修回日期: 2005-12-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(70371050); 教育部高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划项目(教人司[2002]123); 教育部高等学校博士学科点专项科研基金项目(20040145018); 辽宁省教育厅高等学校科学研究项目(20042108).

作者简介: 陈侠(1962—), 女, 辽宁新民人, 副教授, 博士生, 从事决策理论与应用等研究; 樊治平(1961—), 男, 江苏镇江人, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与应用、信息技术与管理等研究.

家群体是否达成一致以及专家群体判断不一致的调整方法 本文通过数学变换方式将专家给出的语言判断矩阵转换成相应的导出矩阵,通过定义基于语言判断矩阵的专家群体判断各个方案以及专家群体判断的一致性指标,给出了一种基于语言判断矩阵的专家群体判断一致性的判别方法以及专家群体判断不一致的调整方法

2 有关判断矩阵的若干定义及性质

记 $I = \{1, 2, \dots, n\}, n \geq 2; J = \{1, 2, \dots, m\}, m \geq 2; U = \{0, 1, \dots, T\}$. 在所考虑的群决策问题中,设一个有限方案集为 $X = \{x_i | i \in I\}$, 其中 x_i 表示第 i 个决策方案; 专家集为 $E = \{e_k | k \in J\}$, 其中 e_k 表示第 k 个专家; 语言短语评价(或语言符号)集合为 $S = \{s_i | i \in U\}$. 本文考虑一个由 9 个元素构成的有序语言短语集 S , 可描述为

- $$S = \{s_0 = I(\text{Impossible}), s_1 = \text{EU (Extremely Unlikely)}, s_2 = \text{VLC (Very Low Chance)}, s_3 = \text{SC (Small Chance)}, s_4 = \text{M (It May)}, s_5 = \text{MC (Meaningful Chance)}, s_6 = \text{ML (Most Likely)}, s_7 = \text{EL (Extremely Likely)}, s_8 = \text{C (Certain)}\}.$$

可见,集合 S 中有 $T + 1$ 个元素 根据人们的习惯,一般 $T/2 \in S$, 并要求 S 具有如下性质:

- 1) 有序性: 当 $i < j$ 时, 有 $s_i < s_j$ 或 $s_j > s_i$, 即表示 s_i 劣于 s_j 或 s_j 优于 s_i ;
- 2) 存在一个逆运算 neg : $\text{neg}(s_i) = s_{T-i}$;
- 3) 极大化运算: 当 $s_i < s_j$ 时, 有 $\max\{s_i, s_j\} = s_j$;
- 4) 极小化运算: 当 $s_i < s_j$ 时, 有 $\min\{s_i, s_j\} = s_i$;

假设专家针对方案集 X 给出的两两方案比较的偏好信息是一类语言判断矩阵的偏好形式,下面给出这种形式偏好信息的简单描述^[7-9].

专家 e_k 针对方案集 X 给出的偏好信息由一个矩阵 $P_k \subset X \times X$ 描述,相应的隶属函数 $\mu_p: X \times X \rightarrow S$, 其中 $\mu_p(x_i, x_j) = p_{ij}^k \in S$, p_{ij}^k 可理解为从预先定义好的语言短语集 S 中选择一个元素作为对方案 x_i 优于方案 x_j 的程度的描述 根据语言评价集 S 中元素的含义,若矩阵 P_k 中的元素 $p_{ij}^k = s_l, s_l \in S$, 则可作如下规定:

- 1) $p_{ij}^k = s_{T/2}$, 表示方案 x_i 与 x_j 无差别, 记为 $x_i \sim x_j$;
 - 2) $s_0 < p_{ij}^k < s_{T/2}$, 表示方案 x_j 优于 x_i , 记为 $x_j > x_i$, 且 l 越小, 方案 x_j 优于方案 x_i 的程度越大;
 - 3) $s_{T/2} < p_{ij}^k < s_T$, 表示方案 x_i 优于 x_j , 记为 $x_i > x_j$, 且 l 越大, 方案 x_i 优于方案 x_j 的程度越大
- 记 $x_i \geq x_j$ 表示专家认为方案 x_i 不劣于 x_j , 即 $x_i > x_j$ 或 $x_i \sim x_j$.

定义 1^[12] 设 $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{T/2}, s_{(T/2)+1}, \dots, s_T\}$ 为有序语言短语集, $s_i \in S$ 表示第 i 个语言短语, 它所对应的下标 i 和序数 i 所对应的有序语言短语可分别由下面的函数 I 和 I^{-1} 得到:

$$I: S \rightarrow N; \quad (1a)$$

$$I(s_i) = i, s_i \in S; \quad (1b)$$

$$I^{-1}: N \rightarrow S; \quad (1c)$$

$$I^{-1}(i) = s_i, i \in U. \quad (1d)$$

定义 2^[12,13] 设专家 e_k 给出的语言判断矩阵为 $P_k = (p_{ij}^k)_{n \times n}$, 若对于 $\forall i, j, l \in I$, 其元素满足下列关系:

$$I(p_{ii}^k) + I(p_{ij}^k) = I(p_{ij}^k) + T/2, \quad (2)$$

则称矩阵 P_k 具有完全一致性 若对于 $\forall i, j, l \in I$, 当 $p_{ii}^k = s_{T/2}$ 和 $p_{ij}^k = s_{T/2}$ 时, 有 $p_{ij}^k = s_{T/2}$, 或当 $p_{ii}^k = s_{T/2}$ 和 $p_{ij}^k = s_{T/2}$ 时, 有 $p_{ij}^k = s_{T/2}$, 则称矩阵 P_k 具有满意一致性

定义 3 设专家 e_k 给出的语言判断矩阵 $P_k = (p_{ij}^k)_{n \times n}$, 相应的矩阵 $Q_k = (q_{ij}^k)_{n \times n}$ 中的元素为

$$q_{ij}^k = \left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{I(p_{ij}^k) - T/2}{T/2} + 1}, \quad \forall i, j \in I, \quad (3)$$

则称矩阵 Q_k 为判断矩阵 P_k 的导出矩阵

可以看出, $q_{ij}^k = \left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{I(p_{ij}^k) - T/2}{T/2} + 1}$ 是指数函数, $\forall i, j \in I$, 由于 $1 < (T/2)^{1/2} < 8$, q_{ij}^k 为单调增加函数, 且容易得出 q_{ij}^k 与 p_{ij}^k 的语义具有如下一一对应的关系, 即当 $p_{ij}^k = s_l$ 的 l 值变大, q_{ij}^k 的值也变大, 当 $p_{ij}^k = s_T$ 时, $q_{ij}^k = T/2$; 当 $p_{ij}^k = s_l$ 的 l 值变小, q_{ij}^k 的值也变小, 当 $p_{ij}^k = s_0$ 时, $q_{ij}^k = 2/T$. 反之亦然 因此, 导出矩阵 Q_k 可视为语言判断矩阵 P_k 的一种转换形式 不难证明导出矩阵 Q_k 满足以下性质:

- 1) Q_k 为正矩阵, 即其元素满足 $q_{ij}^k > 0, \forall i, j \in I$;
- 2) Q_k 为互反矩阵, 即其元素满足 $q_{ij}^k = 1/q_{ji}^k, \forall i, j \in I$.

定理 1 语言判断矩阵 $P_k = (p_{ij}^k)_{n \times n}$ 具有完全一致性的充分必要条件是: 其导出矩阵 $Q_k = (q_{ij}^k)_{n \times n}$ 的各行(列)成比例, 即矩阵 Q_k 的秩为 1.

证明 若 P_k 具有完全一致性, 则由式(3), 有

$$I(p_{ii}^k) + I(p_{ij}^k) = I(p_{ij}^k) + T/2, \forall i, j, l \quad I \text{ 设}$$

$$I(p_{ii}^k) = T/2 + \eta(\omega) - \eta(\omega),$$

$$I(p_{ji}^k) = T/2 + \eta(\omega) - \eta(\omega).$$

其中: ω 为方案 x_i 的权重, 满足

$$\omega \geq 0, \sum_{i=1}^n \omega = 1;$$

$\eta(x) \in [-T/2, T/2]$ 为区间 $[0, 1]$ 上的非降函数
由式(3) 可得

$$q_{ii}^k = \left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{\eta(\omega_i) - \eta(\omega_j) - (T/2)}{T/2}} + 1,$$

$$q_{ji}^k = \left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{\eta(\omega_j) - \eta(\omega_i) - (T/2)}{T/2}} + 1,$$

即有

$$\frac{q_{ii}^k}{q_{ji}^k} = \left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{\eta(\omega_i) - \eta(\omega_j)}{T/2}}, \forall i, j \quad I,$$

所以 Q_k 中任意两行元素成比例, 即矩阵 Q_k 的秩为 1.

反之, 若矩阵 Q_k 的秩为 1, 则有 $q_{ii}^k/q_{ji}^k = l_{ij}^k, l_{ij}^k$ 为非零常数, $\forall i, j, l \quad I$. 由式(3) 可得 $q_{ii}^k = 1, \forall i \quad I$, 所以有 $q_{ij}^k = l_{ij}^k$, 于是有 $q_{ii}^k = l_{ij}^k q_{ji}^k = q_{ij}^k q_{ji}^k$, 即有 $q_{ij}^k = q_{ii}^k q_{ji}^k$. 再由式(3) 可得

$$\left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{\eta(\omega_i) - \eta(\omega_j) - (T/2)}{T/2}} + 1 = \left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{\eta(\omega_i) - \eta(\omega_j) - (T/2)}{T/2}} + 1 + \frac{\eta(\omega_j) - \eta(\omega_i) - (T/2)}{T/2} + 1,$$

即有

$$q_{ij}^k = \left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{I(p_{ij}^k) - T}{T/2}} + 1 = \left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{I(p_{ii}^k) - T}{T/2} + 1} + \frac{I(p_{ij}^k) - T}{T/2} + 1,$$

所以有

$$\frac{I(p_{ii}^k) - T}{T/2} + 1 = \frac{I(p_{ii}^k) - T}{T/2} + 1 + \frac{I(p_{ij}^k) - T}{T/2} + 1,$$

即有

$$I(p_{ii}^k) + I(p_{ij}^k) = I(p_{ij}^k) + T/2, \forall i, j, l \quad I.$$

再由式(2) 可知, 语言判断矩阵 P_k 具有完全一致性

定理 2 语言判断矩阵 $P_k = (p_{ij}^k)_{n \times n}$ 具有满意一致性的充分必要条件是, 若对于 $\forall i, j, l \quad I$, 当 $q_{ii}^k = 1, q_{ij}^k = 1$ 时, 有 $q_{ij}^k = 1$, 或当 $q_{ii}^k = 1, q_{ij}^k = 1$ 时, 有 $q_{ij}^k = 1$.

证明 这里仅证明必要条件, 充分条件同理易证

若语言判断矩阵 P_k 具有满意一致性, 由定义 2 可知, 对于 $\forall i, j, l \quad I$, 当 $p_{ii}^k = s_{T/2}, p_{ij}^k = s_{T/2}$ 时, 有 $p_{ij}^k = s_{T/2}$. 由式(1b) 可得, 当 $I(p_{ii}^k) = T/2, I(p_{ij}^k) = T/2$ 时, 有 $I(p_{ij}^k) = T/2$. 再由式(3) 可得, 当

$$\left(\frac{I(p_{ii}^k) - T}{T/2} + 1\right) = 0, \left(\frac{I(p_{ij}^k) - T}{T/2} + 1\right) = 0$$

时, 有 $\left(\frac{I(p_{ii}^k) - T}{T/2} + 1\right) = 0$. 再由指数性质可知, 当 $q_{ii}^k = 1, q_{ij}^k = 1$ 时, 有 $q_{ij}^k = 1$.

若对于 $\forall i, j, l \quad I$, 当 $p_{ii}^k = s_{T/2}, p_{ij}^k = s_{T/2}$ 时, 有 $p_{ij}^k = s_{T/2}$. 同理可证, 当 $q_{ii}^k = 1, q_{ij}^k = 1$ 时, 有 $q_{ij}^k = 1$.

定义 4^[1-3] 设 $Q_k = (q_{ij}^k)_{n \times n}$ 为导出矩阵, $\forall k \quad J, \lambda_k$ 表示专家 e_k 的权重或重要程度, 且满足 $\lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$. 令 $Q^* = (q_{ij}^*)_{n \times n}$, 其中

$$q_{ij}^* = \sum_{k=1}^m (q_{ij}^k)^{\lambda_k}, \forall i, j \quad I, \quad (4)$$

则称 Q^* 为导出矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_m 的群体判断矩阵

根据文献[15], 下面给出有关导出矩阵相容性和满意相容性的定义

定义 5 设 $Q_k = (q_{ij}^k)_{n \times n}$ 和 $Q_l = (q_{ij}^l)_{n \times n}$ 为两个导出矩阵, 称由

$$SI(Q_k, Q_l) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}^k q_{ji}^l, \forall i, j \quad I \quad (5)$$

表示的 $SI(Q_k, Q_l)$ 为矩阵 Q_k 和矩阵 Q_l 的相容性指标. 若对于 $\forall i, j \quad I$, 满足 $q_{ij}^k = q_{ij}^l$, 则称矩阵 Q_k 和 Q_l 具有完全相容性. 当 n 不太大时, 若满足 $1 - SI(Q_k, Q_l) \leq 1$, 则称矩阵 Q_k 和 Q_l 具有满意相容性.

不难证明, 若两个判断矩阵 Q_k 和 Q_l 具有完全相容性, 则矩阵 Q_k 和 Q_l 的相容性指标为 1, 即 $SI(Q_k, Q_l) = 1$.

不难看出, 相容性指标的定义相当于两个矩阵的对称元素之积的平均值. 为了便于基于语言判断矩阵的专家群体判断一致性分析及专家群体判断不一致的调整, 下面利用语言判断矩阵的导出矩阵, 给出专家群体判断中各个元素、各个方案及专家群体判断的分析方法.

3 专家群体判断一致性的判别方法及不一致的调整方法

定义 6 设 $P_k = (p_{ij}^k)_{n \times n}$ 和 $P_l = (p_{ij}^l)_{n \times n}$ 为两个语言判断矩阵, $Q_k = (q_{ij}^k)_{n \times n}$ 和 $q_l = (q_{ij}^l)_{n \times n}$ 分别为 P_k 和 P_l 所对应的导出矩阵, 若对于 $\forall i, j \quad I$, 满足 $q_{ij}^k = q_{ij}^l$, 则称矩阵 P_k 和 P_l 具有完全相容性, 即 $SI(Q_k, Q_l) = 1$.

定义 7 设 $P_k = (p_{ij}^k)_{n \times n}$ 为语言判断矩阵, $\forall k \quad J, Q_k = (q_{ij}^k)_{n \times n}$ 为 P_k 所对应的导出矩阵, $Q^* = (q_{ij}^*)_{n \times n}$ 为由式(4) 确定的矩阵 Q_k 的群体判断矩阵,

则称 CR_{ij} 为各个矩阵 Q_k 中的元素 q_{ji}^k 与矩阵 Q^* 中的元素 q_{ij}^* 的相容性指标

$$CR_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m q_{ij}^* q_{ji}^k / m, i, j \in I. \quad (6)$$

定义8 设 CR_{ij} 为由式(6)确定的各个矩阵 Q_k 中的元素 q_{ji}^k 与矩阵 Q^* 中的元素 q_{ij}^* 的相容性指标, 则称 $CP = (CR_{ij})_{n \times n}$ 为专家群体判断的相容性关系矩阵

定义9 设 CR_{ij} 为由式(6)确定的各个矩阵 Q_k 中的元素 q_{ji}^k 与矩阵 Q^* 中的元素 q_{ij}^* 的相容性指标, 则称 CR_i 为专家群体判断 x_i 方案的一致性指标

$$CR_i = \left(\sum_{j=1}^n CR_{ij} \right) / n, i \in I. \quad (7)$$

定义10 设 CR_i 为由式(7)确定的专家群体判断 x_i 方案的一致性指标, 则称 RC 为专家群体判断的一致性指标

$$RC = \left(\sum_{i=1}^n CR_i \right) / n. \quad (8)$$

若 RC 满足 $1 \leq RC \leq 1.1$, 则称专家群体判断具有满意一致性

定理3 设 $P_k = (p_{ij}^k)_{n \times n}$ 为语言判断矩阵, $Q_k = (q_{ij}^k)_{n \times n}$ 为 P_k 所对应的导出矩阵, 若各个专家导出矩阵的任意两个元素均具有完全相容性, 则专家群体判断的一致性指标 $RC = 1$

证明 若各个专家的导出矩阵 $P_k (k = 1, 2, \dots, m)$ 中任意两个元素均具有完全相容性, 则由定义6可知, 对于 $\forall i, j \in I, \forall k, l \in J$, 满足 $q_{ij}^k = q_{ij}^l$; 由定义3和定义4可知, $Q^* = Q_k, \forall k \in J$; 由式(6)可知, $CR_{ij} = 1, \forall i, j \in I$, 则由式(7)可得 $CR_i = 1, \forall i \in I$, 并由式(8)计算可得 $RC = 1$, 即专家群体判断一致性指标为1

定理4 若对于 $\forall j \in I$, 各个专家导出矩阵的元素 q_{ji}^k 与矩阵 Q^* 中的元素 q_{ij}^* 的相容性指标满足 $1 \leq CR_{ij} \leq 1.1$, 则专家群体判断 x_i 方案的一致性指标为 $1 \leq CR_i \leq 1.1, i \in I$; 若 $\forall i \in I$, 专家群体判断任意 x_i 方案的一致性指标满足 $1 \leq CR_i \leq 1.1$, 则专家群体判断具有满意一致性, 即专家群体判断的一致性指标为 $1 \leq RC \leq 1.1$

证明 若对于 $\forall j \in I, 1 \leq CR_{ij} \leq 1.1, \forall j \in I$, 由式(7)可得

$$1 = n/n \leq CR_i = \left(\sum_{j=1}^n CR_{ij} \right) / n$$

$$[(1.1) \times n] / n = 1.1,$$

即 $1 \leq CR_i \leq 1.1$; 若对于 $\forall i \in I$, 有 $1 \leq CR_i \leq 1.1$, 由式(8)可得

$$1 = n/n \leq RC = \left(\sum_{i=1}^n CR_i \right) / n$$

$$[(1.1) \times n] / n = 1.1,$$

即 $1 \leq RC \leq 1.1$. 则由定义10可知, 专家群体判断具有满意一致性

综上所述, 这里给出基于语言判断矩阵的专家群体判断一致性的判别方法. 若专家群体判断的一致性指标不满足 $1 \leq RC \leq 1.1$ (即 $RC > 1.1$), 则认为关于专家群体判断的结果没有达成一致, 即关于专家群体判断不具有满意一致性. 为了使专家群体判断具有满意一致性, 需要对个别专家给出的偏好信息进行调整. 为此, 可首先找出一致性最差的方案, 令 $CR_{i^*} = \max_{i \in I} CR_i, i^* \in I$, 即找出关于专家群体判断的相容性关系矩阵 CP 中每一行的平均值最大的元素, 则说明专家群体判断 x^* 方案的一致性水平最差, 于是认为 x^* 方案的偏好信息需要被调整. 其次, 再找出 x^* 方案中相容性最差的元素 $CR_{i^*j^*}$, 即找出专家群体判断相容性关系矩阵 $CP = (CR_{ij})_{n \times n}$ 中第 i^* 行的最大元素 $CR_{i^*j^*}$, 令 $CR_{i^*j^*} = \max_{j \in I} CR_{i^*j}$, 于是认为专家群体判断相容性关系矩阵 $CP = (CR_{ij})_{n \times n}$ 中的第 i^* 行的元素 $CR_{i^*j^*}$ 需要被调整. 最后, 再找出各个矩阵 Q_k 的元素 q_{ji}^k 与矩阵 Q^* 中的元素 q_{ij}^* 的相容性指标 $CR_{i^*j^*}$ 中最差的元素 $q_{ij}^{k^*}$, 由于 $CR_{i^*j^*} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m q_{ij}^* q_{ji}^k / m$, 令 $q_{ij}^{k^*} = \max_{k \in M} q_{ij}^* q_{ji}^k, i^*, j^* \in I, k^* \in J$, 即找出 $\max_{k \in M} q_{ij}^{k^*}; Q_k^*$ 中的元素 $q_{ij}^{k^*}$ 所对应的是 P_k^* 中元素 $p_{ij}^{k^*}$, 因此认为 P_k^* 中的元素 $p_{ij}^{k^*}$ 需要被调整, 其调整的语言评价值为越接近 Q^* 的元素 $q_{ij}^{k^*}$, 所对应的语言评价值越好. 由于 P_k^* 为具有互补性质的语言判断矩阵, 同时也需要调整 $p_{ji}^{k^*}$. 若调整后的语言评价值 $p_{ij}^{k^*} = s_l$, 则 $p_{ji}^{k^*}$ 满足 $p_{ji}^{k^*} = s_{l-1}$. 经过语言判断矩阵的适当调整, 从而调整了专家群体判断的一致性指标 RC 值, 直到满足 $1 \leq RC \leq 1.1$ 的要求为止

根据上述分析, 基于语言判断矩阵的专家群体判断的不一致性调整方法可按如下步骤进行:

Step1: 根据式(6)~(8), 求出专家群体判断的一致性指标 RC 值, 若满足 $1 \leq RC \leq 1.1$, 转 Step6; 否则, 进行下一步.

Step2: 根据式(6)和(7), 找出 Step1 中各个方案一致性指标最差的 CR_{i^*} , 令 $CR_{i^*} = \max_{i \in I} CR_i$, 即找出专家群体判断的相容性关系矩阵 CP 中每一行的平均值最大的元素 CR_{i^*} , 则认为对 x_{i^*} 方案的偏好信息需要被调整

Step3: 根据式(6), 找出 x_{i^*} 方案中相容性最差

的元素 $CR_{i^*j^*}$, 即找出专家群体判断一致性关系矩阵 $CP = (CR_{ij})_{n \times n}$ 中第 i^* 行的最大元素 $CR_{i^*j^*}$, 令 $CR_{i^*j^*} = \max_{1 \leq j \leq n} CR_{i^*j}$, 则认为专家群体判断相容性关系矩阵 CP 中的第 i^* 行的元素 $CR_{i^*j^*}$ 需要被调整

Step4: 根据式(6), 找出矩阵 $CP = (CR_{ij})_{n \times n}$ 中的元素 $CR_{i^*j^*}$ 中使得相容性最差的元素 $q_j^{k^*i^*}$, 令 $q_i^{k^*j^*} q_j^{k^*i^*} = \max_{1 \leq k \leq m} q_i^{k^*j^*} q_j^{k^*i^*}, i^*, j^* \in I, k^* \in J$, 即找出 $\max_{1 \leq k \leq m} q_j^{k^*i^*}$. 因为 Q_k^* 中的元素 $q_j^{k^*i^*}$ 所对应的是 P_k^* 中元素 $p_j^{k^*i^*}$, 于是认为 P_k^* 中的元素 $p_j^{k^*i^*}$ 需要被调整, 其调整的语言评价值为越接近 Q^* 的元素 $q_j^{k^*i^*}$, 所对应的语言评价越好, 设调整后的语言评价值为 $p_j^{k^*i^*} = s_k$ 因为 P_k^* 为互补的语言判断矩阵, 所以同时也需要调整 $p_i^{k^*j^*}$, 满足 $1 - q_i^{k^*j^*} q_j^{k^*i^*} = 1 - p_i^{k^*j^*} p_j^{k^*i^*} = sr_{-i}$

Step5: 根据式(6)~(8), 重新计算专家群体一致性指标 RC , 若 $RC > 1.1$, 转 Step2; 否则进行下一步

Step6: 结束

4 算 例

设 S 为前述的由 9 个元素构成的语言短语集, 假设 4 位专家(即 e_1, e_2, e_3, e_4) 针对 4 个方案(即 x_1, x_2, x_3, x_4) 分别给出下列具有语言判断矩阵形式的偏好信息:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \begin{bmatrix} M & MC & MC & I \\ SC & M & MC & SC \\ SC & SC & M & SC \\ C & MC & MC & M \end{bmatrix}, \\
 P_2 &= \begin{bmatrix} M & SC & VLC & SC \\ MC & M & VLC & SC \\ ML & ML & M & MC \\ MC & MC & SC & M \end{bmatrix}, \\
 P_3 &= \begin{bmatrix} M & ML & MC & C \\ VLC & M & SC & MC \\ SC & MC & M & ML \\ I & SC & VLC & M \end{bmatrix}, \\
 P_4 &= \begin{bmatrix} M & ML & MC & EU \\ VLC & M & SC & SC \\ SC & MC & M & VLC \\ EL & MC & ML & M \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

由式(2), 计算可得专家给出的语言判断矩阵 $P_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 均具有满意一致性 这里考虑每个专家的权重相等, 即 $\lambda_k = 0.25, \forall k \in J$. 由式(3)和(4), 可将语言判断矩阵 $P_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 转换为相应的导出矩阵 $Q_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 和群体判断矩阵

Q^* , 分别为

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 4^{1/4} & 4^{1/4} & 4^{-1} \\ 4^{-1/4} & 1 & 4^{1/4} & 4^{-1/4} \\ 4^{-1/4} & 4^{-1/4} & 1 & 4^{-1/4} \\ 4 & 4^{1/4} & 4^{1/4} & 1 \end{bmatrix}, \\
 Q_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 4^{-1/4} & 4^{-1/2} & 4^{-1/4} \\ 4^{1/4} & 1 & 4^{-1/2} & 4^{-1/4} \\ 4^{1/2} & 4^{1/2} & 1 & 4^{1/4} \\ 4^{1/4} & 4^{1/4} & 4^{-1/4} & 1 \end{bmatrix}, \\
 Q_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 4^{1/2} & 4^{1/4} & 4 \\ 4^{-1/2} & 1 & 4^{-1/4} & 4^{1/4} \\ 4^{-1/4} & 4^{1/4} & 1 & 4^{1/2} \\ 4^{-1} & 4^{-1/4} & 4^{-1/2} & 1 \end{bmatrix}, \\
 Q_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 4^{1/2} & 4^{1/4} & 4^{-3/4} \\ 4^{-1/2} & 1 & 4^{-1/4} & 4^{-1/4} \\ 4^{-1/4} & 4^{1/4} & 1 & 4^{-1/2} \\ 4^{3/4} & 4^{1/4} & 4^{1/2} & 1 \end{bmatrix}, \\
 Q^* &= \begin{bmatrix} 1 & 4^{1/4} & 4^{1/16} & 4^{-1/4} \\ 4^{-1/4} & 1 & 4^{-3/16} & 4^{-1/8} \\ 4^{-1/16} & 4^{3/16} & 1 & 1 \\ 4^{1/4} & 4^{1/8} & 1 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

由式(6), 计算出专家群体判断的相容性关系矩阵 CP 为

$$CP = \begin{bmatrix} 1 & 1.104 & 1.124 & 1.501 \\ 1.082 & 1 & 1.067 & 1.041 \\ 1.087 & 1.166 & 1 & 1.155 \\ 1.878 & 1.051 & 1.155 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据专家群体判断的相容性关系矩阵 CP , 计算得到专家群体判断各个方案一致性水平及群体判断的一致性指标分别为 $CR_1 = 1.182, CR_2 = 1.048, CR_3 = 1.102, CR_4 = 1.271, RC = 1.151 > 1.1$, 由此看出, 没有满足专家群体判断一致性指标的要求 于是, 由上述专家群体判断不一致的调整方法可知, 针对 $\max_{1 \leq k \leq m} CR_k$ 所对应的 x_4 方案的偏好信息需要被调整, 并针对专家群体判断一致性关系矩阵 CP 中第 4 行中最大的元素 CR_{41} 需要被调整, 并取 $\max_{1 \leq k \leq m} q_{41}^k q_{14}^k$ 的 q_{14}^3 所对应的是 p_{14}^3 作为需要调整的元素, 其调整的语言评价越好越接近 q_{14}^3 , 所对应的语言评价越好. 比如取 $p_{14}^3 = s_3, p_{41}^3 = s_5$, 于是再由式(3), (4)和(6), 将判断矩阵 P_3 和群体判断矩阵 Q^* 及专家群体判断一致性关系矩阵 CP^* 分别变为

$$P_3^* = \begin{bmatrix} - & ML & MC & SC \\ VLC & - & SC & MC \\ SC & MC & - & ML \\ MC & SC & VLC & - \end{bmatrix},$$

$$Q^* = \begin{bmatrix} 1 & 4^{1/4} & 4^{1/16} & 4^{-9/16} \\ 4^{-1/4} & 1 & 4^{-3/16} & 4^{-1/8} \\ 4^{-1/16} & 4^{3/16} & 1 & 1 \\ 4^{9/16} & 4^{1/8} & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$CP^* = \begin{bmatrix} 1 & 1.104 & 1.124 & 1.107 \\ 1.082 & 1 & 1.067 & 1.041 \\ 1.087 & 1.166 & 1 & 1.155 \\ 1.100 & 1.051 & 1.155 & 1 \end{bmatrix}.$$

重新计算专家群体判断各个方案及群体判断的一致性指标,分别为 $CR_1 = 1.084$, $CR_2 = 1.048$, $CR_3 = 1.102$, $CR_4 = 1.100$, $RC = 1.078 < 1.1$ 。可见,满足了专家群体判断一致性指标的要求,即专家群体判断具有满意一致性。

5 结 语

本文研究了基于语言判断矩阵形式偏好信息的专家群体判断一致性问题,并给出了相应的分析方法。该方法通过指数变换方式将语言判断矩阵转换为导出矩阵,不仅给出了基于语言判断矩阵的专家群体判断各个元素、各个方案一致性指标的分析方法,而且给出了专家群体判断一致性的判别方法,同时也给出了专家群体判断不一致的调整方法。本文的方法具有概念清晰、直观简洁和易于计算等特点。

参考文献(References)

- [1] Saaty T L. *The Analytic Hierarchy Process* [M]. New York: McGraw-Hill, 1980.
- [2] Warfield J N. Spreadthink: Explaining Ineffective Groups[J]. *System Research*, 1995, 12(1): 5-14.
- [3] Saaty T L. Physics as a Decision Theory[J]. *European J of Operational Research*, 1990, 48(1): 98-104.
- [4] Orłowski S A. Decision making with a Fuzzy Preference Relation[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1978, 1: 155-167.
- [5] Taniguchi T. Fuzzy Preference Ordering in Group Decision Making[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1984, 12: 117-131.
- [6] Herrera-Viedma E, Herrera F, Chiclana F. A Consensus Model for Multiperson Decision Making with Different Preference Structures[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 2002, 32(3): 394-402.
- [7] Kacprzyk J. Group Decision Making with a Fuzzy

- Linguistic Majority[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 18: 105-118.
- [8] Delgado M, Verdegay J L, Vila M A. On Aggregation Operations of Linguistic Label[J]. *Int J of Intelligent Systems*, 1993, 8: 351-370.
- [9] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. A Sequential Selection Process in Group Decision Making with Linguistic Assessment[J]. *Information Science*, 1995, 85: 223-239.
- [10] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. A Model of Consensus in Group Decision Making under Linguistic Assessments[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 78: 73-87.
- [11] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. Linguistic Measures Based on Fuzzy Coincidence for Reaching Consensus in Group Decision Making[J]. *J of Approximate Reasoning*, 1997, 16: 309-334.
- [12] 陈岩, 樊治平. 语言判断矩阵的一致性及相关问题研究[J]. *系统工程理论与实践*, 2004, 24(4): 136-141. (Chen Y, Fan Z P. Study on Consistency and the Related Problems for Judgment Matrix with Linguistic Assessment [J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2004, 24(4): 136-141.)
- [13] 樊治平, 肖四汉. 基于自然语言符号表示的比较矩阵的一致性及其排序方法[J]. *系统工程理论与实践*, 2002, 22(5): 87-91. (Fan Z P, Xiao S H. The Consistency and Ranking Method for Comparison Matrix with Linguistic Assessment [J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2002, 22(5): 87-91.)
- [14] 王欣荣, 樊治平. 一种基于自然语言评价信息的多指标群决策方法[J]. *系统工程学报*, 2003, 18(2): 173-176. (Wang X R, Fan Z P. A Method for Multicriteria Group Decision Making with Linguistic Assessment [J]. *J of Systems Engineering*, 2003, 18(2): 173-176.)
- [15] 王莲芬. 相容性与群组决策[J]. *系统工程理论与实践*, 2000, 20(2): 92-96. (Wang L F. Compatibility and Group Decision Making [J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2000, 20(2): 92-96.)