第21卷 第9期
Vol 21 No. 9

控 制 与 决 策
Control and Decision

2006年9月
Sep. 2006

文章编号: 1001-0920(2006)09-1059-06

一类分布式时滞LPV系统的鲁棒H∞滤波

吴立刚, 王常虹, 高会军, 曾庆双
(哈尔滨工业大学 空间控制与惯性技术研究中心, 哈尔滨 150001)

摘 要: 研究一类同时具有分布式和离散型时滞的线性参数变化系统的鲁棒H_∞滤波问题. 基于参数线性矩阵不等式方法, 推导了滤波误差系统渐近稳定和具有H_∞扰动衰减水平γ的时滞相关充分条件. 同时应用投影定理, 通过引入附加矩阵变量, 解除了系统矩阵与依赖于参数的Lyapunov函数矩阵之间的耦合, 使所得到的条件更适合于滤波器的综合. 推导了系统鲁棒H_∞滤波器存在的充分条件, 并将滤波器的设计转化为一组线性矩阵不等式的求解. 数值实例证明了所提出设计方案的可行性.

关键词: 鲁棒H_∞滤波; 线性参数变化系统; 分布式时滞; 时滞相关; 参数线性矩阵不等式
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Robust H∞ Filtering for a Class of LPV Systems with Distributed Delays

WU Li-gang, WANG Chang-hong, GAO Hui-jun, ZENG Qing-shuang
(Space Control and Inertial Technology Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: WU Li-gang, E-mail: ligangwu@hit.edu.cn)

Abstract: The robust H_∞ filtering for a class of continuous-time linear parameter-varying (LPV) systems with distributed and discrete delays in states is studied. Based on the parameterized linear matrix inequality (PLMI) method, a delay-dependent sufficient condition is proposed for the filtering error system, which guarantees robust asymptotic stability and a desired H_∞ noise attenuation level γ. By applying the Projection Lemma, and introducing some slack matrices, the Lyapunov matrices and the system dynamic matrices are decoupled. Furthermore, the existence condition of delay-dependence for the robust H_∞ filter is also established, and the admissible filter can be found by solving a group of linear matrix inequalities (LMIs). An example is provided to demonstrate the feasibility of the proposed filtering scheme.

Key words: Robust H_∞ filtering; Linear parameter-varying (LPV) systems; Distributed delay; Delay-dependent; Parameterized linear matrix inequalities (PLMIs)

1 引 言

滤波是根据可测量的输出信号来估计系统内部的状态变量或状态变量的线性组合. 近年来, 鲁棒H_∞滤波受到人们广泛的关注[1~3], 与传统的Kalman滤波相比, H_∞滤波不必要求外部扰动信号为高斯白噪声, 而只要求其能量有界. 另外, 线性参数变化(LPV)系统的理论近年来也得到了飞速发展, 已广泛应用于工业、通讯、航天等多个领域. 与非时滞LPV系统已经取得的大量成果相比较[4~6], 对时滞LPV系统的研究才刚刚起步. 目前所取得的成果主要集中于系统的稳定性分析和控制器的设计问题[7~9], 而对于时滞LPV系统滤波问题的研究则较少, 因而有待于探索和进一步的研究, 尤其对于含有复杂多类时滞的系统.

本文针对一类同时具有分布式时滞和离散型时滞的线性参数变化连续时间系统, 研究了它的全阶

收稿日期: 2005-05-08; **修回日期**: 2005-06-25.
基金项目: 国家自然科学基金项目(69874008).
作者简介: 吴立刚(1977—), 男, 江西宜黄人, 博士生, 从事时滞系统和鲁棒控制等研究; 王常虹(1961—), 男, 辽宁鞍山人, 教授, 博士生导师, 从事智能控制和鲁棒控制等研究.

鲁棒 H_∞ 滤波问题. 首先设计了滤波器, 并基于参数线性矩阵不等式的方法, 推导了滤波误差系统鲁棒渐近稳定和具有 H_∞ 扰动衰减水平 γ 的时滞相关的充分条件. 基于文献[10] 的思想, 通过引入附加矩阵变量, 得到了更适合于滤波器设计的新的充分条件. 在新的条件下, 研究了滤波器的设计问题, 提出了适合于该类系统的全阶鲁棒 H_∞ 滤波器存在的充分条件. 并应用文献[7] 提出的近似基函数和网格技术, 将滤波器的设计转化为对有限个线性矩阵不等式的求解. 最后, 通过仿真实例验证了该方案的可行性.

2 系统描述

考虑如下分布式时滞 LPV 系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \\ A(r)x(t) + A_{h1}(r)x(t-h(r)) + \\ A_{h2}(r)\int_{\eta(r(t))} x(s)\mathrm{d}s + B(r)\omega(t), \\ y(t) = \\ C(r)x(t) + C_{h1}(r)x(t-h(r)) + \\ C_{h2}(r)\int_{\eta(r(t))} x(s)\mathrm{d}s + D(r)\omega(t), \\ z(t) = \\ H(r)x(t) + H_{h1}(r)x(t-h(r)) + \\ H_{h2}(r)\int_{\eta(r(t))} x(s)\mathrm{d}s + L(r)\omega(t), \\ x(t) = \phi(r), \forall t \in [-\delta_{\max}, 0]. \end{cases} \tag{1}$$

式中: $x(t) \in R^n$ 为系统状态向量, $y(t) \in R^m$ 为测量输出, $z(t) \in R^p$ 为要估计的信号, $\omega(t) \in R^q$ 为扰动输入. 假定系统矩阵 $A(\cdot), A_{h1}(\cdot), A_{h2}(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), C_{h1}(\cdot), C_{h2}(\cdot), D(\cdot), H(\cdot), H_{h1}(\cdot), H_{h2}(\cdot), L(\cdot)$ 和滞后 $h(\cdot), \eta(\cdot)$ 为时变参数 $r(t)$ 的函数, 且满足

$$\begin{aligned} &0 < h(r) \leq \delta_1 < \infty, \\ &0 \leq \dot{h}(r) \leq \sigma_1 < 1, \forall t; \\ &0 < \eta(r) \leq \delta_2 < \infty, \\ &0 \leq \dot{\eta}(r) \leq \sigma_2 < 1, \forall t \end{aligned} \tag{2}$$

这里: 参数向量 $r(t) = [r_1(t), r_2(t), \cdots, r_s(t)]^{\mathrm{T}}$ 满足 $r_i(t)$ 实时可测且 $r_i(t) \in [\underline{r_i}, \overline{r_i}]$, 参数的变化率 $\dot{r}_i(t) = \tau_i(t) \in [\underline{\tau_i}, \overline{\tau_i}]$. $\delta_{\max} = \max\{\delta_1, \delta_2\}$, $\phi(\cdot) \in C^n[-\delta_{\max}, 0]$ 为系统的初始条件. 为表述方便, 全文均采用 r 和 r_i 分别表示 $r(t)$ 和 $r_i(t)$.

设计如下形式的全阶鲁棒 H_∞ 滤波器:

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_f(r)x_f(t) + B_f(r)y(t), \\ z_f(t) = C_f(r)x_f(t) + D_f(r)y(t). \end{cases} \tag{3}$$

其中: $x_f(t) \in R^n$ 为状态估计向量, $z_f(t) \in R^p$ 为估计信号. 由式(1) 和(3) 可得滤波误差系统的方程为

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = \\ \bar{A}(r)e(t) + \bar{A}_{h1}(r)Ke(t-h(r)) + \\ \bar{A}_{h2}(r)K\int_{\eta(r)} e(s)\mathrm{d}s + \bar{B}(r)\omega(t), \\ \dot{\tilde{z}}(t) = \\ \bar{C}(r)e(t) + \bar{C}_{h1}(r)Ke(t-h(r)) + \\ \bar{C}_{h2}(r)K\int_{\eta(r)} e(s)\mathrm{d}s + \bar{D}(r)\omega(t). \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned} &e(t) := \mathrm{col}\{x(t), x_f(t)\}; \\ &\tilde{z}(t) := z(t) - x_f(t); \\ &\bar{A}(r) := \begin{bmatrix} A(r) & 0 \\ B_f(r)C(r) & A_f(r) \end{bmatrix}; \\ &\bar{A}_{hj}(r) := \begin{bmatrix} A_{hj}(r) \\ B_f(r)C_{hj}(r) \end{bmatrix}; \\ &\bar{B}(r) := \begin{bmatrix} B(r) \\ B_f(r)D(r) \end{bmatrix}; \\ &\bar{C}(r) := \\ &[H(r) - D_f(r)C(r) \quad -C_f(r)]; \\ &\bar{C}_{hj}(r) := \\ &H_{hj}(r) - D_f(r)C_{hj}(r), j = 1, 2; \\ &\bar{D}(r) := L(r) - D_f(r)D(r), \\ &K := [I \quad 0]. \end{aligned} \tag{5}$$

因此, 本文所研究的问题可描述为: 对系统(1), 设计形如式(3) 的鲁棒 H_∞ 滤波器, 使得对于任意的参数变化轨迹, 滤波误差系统(4) 渐近稳定且满足

$$J = \int_0^\infty [\tilde{z}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{z}(t) - \gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)]\mathrm{d}t < 0, \tag{6}$$

其中 $\gamma > 0$ 为给定常数.

本文主要结论的推导将用到以下引理.

引理 1[10] 给定一个对称矩阵 $\Pi \in R^{m\times m}$ 以及两个具有适当维数的一般矩阵 M 和 N, 存在一个矩阵 W 使得线性矩阵不等式

$$\Pi + M^{\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}}N + N^{\mathrm{T}}WM < 0 \tag{7}$$

成立的充分必要条件是如下不等式成立:

$$\mathbf{N}_M^{\mathrm{T}}\Pi\mathbf{N}_M < 0, \mathbf{N}_N^{\mathrm{T}}\Pi\mathbf{N}_N < 0, \tag{8}$$

其中 $\mathbf{N}_M$ 和 $\mathbf{N}_N$ 分别为 M 和 N 的直交补.

3 主要结果

3.1 滤波误差分析

滤波误差系统渐近稳定和满足条件(6) 的时滞相关充分条件如下.

定理 1 考虑滤波误差系统(4), 给定常数 $\gamma > 0$ 和 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ 满足式(2), 如果存在连续可微的正定对称矩阵 $P(r) \in R^{2n\times 2n}$, 正定对称矩阵 $Q_1 \in R^{n\times n}, Q_2 \in R^{n\times n}$ 和 $Z \in R^{n\times n}$, 使得参数线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11}-K^{\mathrm T}ZK & \Omega_{12}+K^{\mathrm T}Z & P(r)\bar A_{h2}(r) & P(r)\bar B(r) & \bar C^{\mathrm T}(r) & \delta_1\bar A^{\mathrm T}(r)K^{\mathrm T}Z \\ * & \Omega_{22}-Z & 0 & 0 & \bar C_{h1}^{\mathrm T}(r) & \delta_1\bar A_{h1}^{\mathrm T}(r)K^{\mathrm T}Z \\ * & * & -Q_2 & 0 & \bar C_{h2}^{\mathrm T}(r) & \delta_1\bar A_{h2}^{\mathrm T}(r)K^{\mathrm T}Z \\ * & * & * & -\gamma^2 I & \bar D^{\mathrm T}(r) & \delta_1\bar B^{\mathrm T}(r)K^{\mathrm T}Z \\ * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & -Z \end{bmatrix} < 0, \tag{9}$$

对于所有参数变化轨迹成立.那么在零值初始状态条件下,对于任意非零的$\omega(t)\in L_2[0,\infty)$,滤波误差系统(4)渐近稳定且满足式(6)的$H_\infty$性能.其中

$$\Omega_{11}:=P(r)\bar A(r)+\bar A^{\mathrm T}(r)P(r)+K^{\mathrm T}Q_1K+\delta_2^2K^{\mathrm T}Q_2K+\sum_{i=1}^{s}(\tau_i\partial P/\partial r_i);$$

$$\Omega_{12}:=P(r)\bar A_{h1}(r);$$

$$\Omega_{22}:=-\left(1-\sum_{i=1}^{s}\tau_i\frac{\partial h}{\partial r_i}\right)Q_1.$$

限于篇幅,这里不给出具体的证明过程.证明可选取以下Lyapunov-Krasovskii函数:

$$V(t):=V_1(t)+V_2(t)+V_3(t)+V_4(t),$$

$$V_1(t):=e^{\mathrm T}(t)P(r)e(t)+\int_{t-h(r)}^{t}e^{\mathrm T}(s)K^{\mathrm T}Q_1Ke(s)\,\mathrm ds,$$

$$V_2(t):=\int_{-\delta_2}^{0}\Big[\int_{t+s}^{t}e^{\mathrm T}(\theta)K^{\mathrm T}\mathrm d\theta\Big]Q_2\Big[\int_{t+s}^{t}Ke(\theta)\,\mathrm d\theta\Big]\mathrm ds,$$

$$V_3(t):=\int_{-\delta_2}^{0}\int_{t+s}^{t}(\theta-t+s)e^{\mathrm T}(\theta)K^{\mathrm T}Q_2Ke(\theta)\,\mathrm d\theta\,\mathrm ds,$$

$$V_4(t):=\delta_1\int_{-\delta_1}^{0}\int_{t+s}^{t}\dot e^{\mathrm T}(\theta)K^{\mathrm T}ZK\dot e(\theta)\,\mathrm d\theta\,\mathrm ds.$$

其中:$P(r)>0, Q_1>0, Q_2>0, Z>0$.

式(9)中含有Lyapunov函数矩阵与系统矩阵之间的耦合,因此条件(9)实际为参数$r(t)$的非线性矩阵不等式.为解决此问题,基于文献[10]的思想,通过引进附加矩阵来达到解耦的目的,从而可得到如下改进的稳定条件:

定理 2　考虑滤波误差系统(4),给定常数$\gamma>0$和$\delta_1>0$, $\delta_2>0$满足式(2),如果存在连续可微的正定对称矩阵$P(r)\in R^{2n\times 2n}$,正定对称矩阵$Q_1\in R^{n\times n}$, $Q_2\in R^{n\times n}$, $Z_1\in R^{n\times n}$和一般矩阵$W\in R^{2n\times 2n}$,使得参数线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -(W+W^{\mathrm T}) & P(R)+W^{\mathrm T}\bar A(r) & W^{\mathrm T}\bar A_{h1}(r) & W^{\mathrm T}\bar A_{h2}(r) & W^{\mathrm T}\bar B(r) & 0 & W^{\mathrm T} & \delta_1K^{\mathrm T}Z \\ * & -P(r)+\Gamma_{22} & K^{\mathrm T}Z & 0 & 0 & \bar C^{\mathrm T}(r) & 0 & 0 \\ * & * & \Omega_{22}-Z & 0 & 0 & \bar C_{h1}^{\mathrm T}(r) & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_2 & 0 & \bar C_{h2}^{\mathrm T}(r) & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2I & \bar D^{\mathrm T}(R) & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -P(r) & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -Z \end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

对于所有参数变化轨迹成立.那么在零初始状态条件下,对于任意非零的$\omega(t)\in L_2[0,\infty)$,滤波误差系统(4)渐近稳定且满足式(6)的$H_\infty$性能.其中

$$\Gamma_{22}:=K^{\mathrm T}Q_1K+\delta_2^2K^{\mathrm T}Q_2K+\sum_{i=1}^{s}(\tau_i\partial P/\partial r_i).$$

证明　式(10)中的第1个7×7维的对角线子参数线性矩阵不等式等价于

$$\Pi+M^{\mathrm T}WN+N^{\mathrm T}W^{\mathrm T}M<0. \tag{11}$$

其中

$$\Pi:=\begin{bmatrix} 0 & P(r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -P(r)+\Gamma_{22} & K^{\mathrm T}Z & 0 & 0 & \bar C^{\mathrm T}(r) & 0 \\ * & * & \Omega_{22}-Z & 0 & 0 & \bar C_{h1}^{\mathrm T}(r) & 0 \\ * & * & * & -Q_2 & 0 & \bar C_{h2}^{\mathrm T}(r) & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2I & \bar D^{\mathrm T}(r) & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -P(r) \end{bmatrix},$$

$$N:=[I\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0],$$

$$M:=[-I\ \ \bar A(r)\ \ \bar A_{h1}(r)\ \ \bar A_{h2}(r)\ \ \bar B(r)\ \ 0\ \ I].$$

矩阵N和M的直交补可分别选择为$\mathbf N_N$和$\mathbf N_M$,即

$$\mathbf{N}_N := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_M := \begin{bmatrix} \bar{A}(r) & \bar{A}_{h1}(r) & \bar{A}_{h2}(r) & \bar{B}(r) & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

因此, 应用引理 1 的投影定理, 式(11) 等价于

$$\mathbf{N}_M^{\mathrm{T}} \Pi \mathbf{N}_M < 0, \tag{12a}$$

$$\mathbf{N}_N^{\mathrm{T}} \Pi \mathbf{N}_N < 0. \tag{12b}$$

再由 Schur 补可知, 式 12(a) 等价于式(9) 中第 1 个 5×5 维的对角线子参数线性矩阵不等式, 而式 12(b) 却包含于式 12(a) 中. 因此, 定义对角矩阵

$$\Gamma(r) := \begin{bmatrix} \mathbf{N}_M^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{13}$$

用矩阵 $\Gamma(r)$ 对参数线性矩阵不等式(10) 进行等价变换, 即在式(10) 两边同时分别左乘和右乘 $\Gamma(r)$ 及其转置, 便可得到定理 1 中的式(9). 因此, 条件(10) 能够保证滤波误差系统(4) 渐近稳定且满足式(6) 所定义的 H_∞ 性能. □

3.2 鲁棒 H_∞ 滤波器设计

基于定理 2 的结论, 给出鲁棒 H_∞ 滤波器的设计:

定理 3 考虑滤波误差系统(4), 给定常数 $\gamma > 0$ 和 $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ 满足式(2), 若存在连续可微的正定对称矩阵 $\bar{P}(r) \in R^{2n\times 2n}$ 和对称正定矩阵 $Q_1 \in R^{n\times n}$, $Q_2 \in R^{n\times n}$, $Z \in R^{n\times n}$, 一般矩阵 $R \in R^{n\times n}$, $S \in R^{n\times n}$, $T \in R^{n\times n}$, $\bar{A}_f(r) \in R^{n\times n}$, $\bar{B}_f(r) \in R^{n\times m}$, $\bar{C}_f(r) \in R^{p\times n}$, $\bar{D}_f(r) \in R^{p\times m}$, 使得参数线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}
-R-R^{\mathrm{T}} & -S-T^{\mathrm{T}} & \Xi_{13} & \Xi_{14} & \Xi_{15} & \Xi_{16} & \Xi_{17} & 0 & R^{\mathrm{T}} & T^{\mathrm{T}} & \delta_1 Z \\
* & -T-T^{\mathrm{T}} & \Xi_{23} & \Xi_{24} & \Xi_{25} & \Xi_{26} & \Xi_{27} & 0 & S^{\mathrm{T}} & T^{\mathrm{T}} & 0 \\
* & * & \Xi_{33} & \Xi_{34} & Z & 0 & 0 & \Xi_{38} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & 0 & -\bar{C}_f^{\mathrm{T}}(r) & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & \Omega_{22}-Z & 0 & 0 & \Xi_{58} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -Q_2 & 0 & \Xi_{68} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & \Xi_{78} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\bar{P}_{11}(r) & -\bar{P}_{12}(r) & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -\bar{P}_{22}(r) & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -Z
\end{bmatrix} < 0, \tag{14}$$

对于所有参数变化轨迹成立. 其中

$$\Xi_{13} := \bar{P}_{11}(r) + R^{\mathrm{T}}A(r) + \bar{B}_f(r)C(r),$$
$$\Xi_{23} := \bar{P}_{12}^{\mathrm{T}}(r) + S^{\mathrm{T}}A(r) + \bar{B}_f(r)C(r),$$
$$\Xi_{33} := -\bar{P}_{11}(r) + Q_1 + \delta_2 Q_2 + \sum_{i=1}^{s}(\tau_i \partial \bar{P}_{11}/\partial r_i),$$
$$\Xi_{14} := \bar{P}_{12}(r) + \bar{A}_f(r),$$
$$\Xi_{24} := \bar{P}_{22}(r) + \bar{A}_f(r),$$
$$\Xi_{34} := -\bar{P}_{12}(r) + \sum_{i=1}^{s}(\tau_i \partial \bar{P}_{12}/\partial r_i),$$
$$\Xi_{44} := -\bar{P}_{22}(r) + \sum_{i=1}^{s}(\tau_i \partial \bar{P}_{22}/\partial r_i),$$
$$\Xi_{15} := R^{\mathrm{T}}A_{h1}(r) + \bar{B}_f(r)C_{h1}(r),$$
$$\Xi_{25} := S^{\mathrm{T}}A_{h1}(r) + \bar{B}_f(r)C_{h1}(r),$$
$$\Xi_{16} := R^{\mathrm{T}}A_{h2}(r) + \bar{B}_f(r)C_{h2}(r),$$
$$\Xi_{26} := S^{\mathrm{T}}A_{h2}(r) + \bar{B}_f(r)C_{h2}(r),$$
$$\Xi_{17} := R^{\mathrm{T}}B(r) + \bar{B}_f(r)D(r),$$
$$\Xi_{27} := S^{\mathrm{T}}B(r) + \bar{B}_f(r)D(r),$$
$$\Xi_{38} := H^{\mathrm{T}}(r) - C^{\mathrm{T}}(r)\bar{D}_f^{\mathrm{T}}(r),$$
$$\Xi_{58} := H_{h1}^{\mathrm{T}}(r) - C_{h1}^{\mathrm{T}}(r)\bar{D}_f^{\mathrm{T}}(r),$$
$$\Xi_{68} := H_{h2}^{\mathrm{T}}(r) - C_{h2}^{\mathrm{T}}(r)\bar{D}_f^{\mathrm{T}}(r),$$
$$\Xi_{78} := L^{\mathrm{T}}(R) - D^{\mathrm{T}}(r)\bar{D}_f^{\mathrm{T}}(r).$$

那么保证滤波误差系统(4) 渐近稳定的 H_∞ 滤波器存在. 此外, 若上述参数线性矩阵不等式(14) 有可行解, 则滤波器的参数可由下式求得:

$$\begin{bmatrix} A_f(r) & B_f(r) \\ C_f(r) & D_f(r) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_f(r) & \bar{B}_f(r) \\ \bar{C}_f(r) & \bar{D}_f(r) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

证明 若存在形如式(3) 的滤波器, 使得滤波误差系统(4) 渐近稳定且满足式(6) 的 H_∞ 性能指标, 则由定理 2 可知, 存在连续可微的正定对称矩阵 $P(r) \in R^{2n\times 2n}$, 正定对称矩阵 $Q_1 \in R^{n\times n}$, $Q_2 \in R^{n\times n}$, $Z \in R^{n\times n}$ 和一般矩阵 $W \in R^{2n\times 2n}$ 使得式(10) 成立

将矩阵 $P(r)$ 和 W 写成以下分块形式:

$$P(r) \triangleq \begin{bmatrix} P_{11}(r) & P_{12}(r) \\ P_{12}^{\mathrm{T}}(r) & P_{22}(r) \end{bmatrix},$$

$$W \triangleq \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_4 & W_3 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

不失一般性, 假设 W_3 和 W_4 可逆, 可定义矩阵

$$\Phi \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & W_3^{-1} W_4 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$\bar{P}(r) \triangleq \begin{bmatrix} \bar{P}_{11}(r) & \bar{P}_{12}(r) \\ \bar{P}_{12}^{\mathrm{T}}(r) & \bar{P}_{22}(r) \end{bmatrix} = \Phi^{\mathrm{T}} P(r) \Phi, \tag{18}$$

则 Φ 可逆. 用 $\mathrm{diag}\{\Phi, \Phi, I, I, I, I, \Phi, I\}$ 对式(10) 进行全等变换, 可得到新的参数线性矩阵不等式. 为方便, 可记变换后的不等式为 $\Theta < 0$, 其中

$$\Phi^{\mathrm{T}} W \Phi = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 W_3^{-1} W_4 \\ W_4^{\mathrm{T}} W_3^{-\mathrm{T}} W_4 & W_4^{\mathrm{T}} W_3^{-\mathrm{T}} W_4 \end{bmatrix},$$

$$\Phi^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} Z = \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi^{\mathrm{T}} W^{\mathrm{T}} \bar{A}(r) \Phi =$$
$$\begin{bmatrix} W_1^{\mathrm{T}} A(r) + W_4^{\mathrm{T}} B_f(r) C(r) & W_4^{\mathrm{T}} A_f(r) W_3^{-1} W_4 \\ W_4^{\mathrm{T}} W_3^{-\mathrm{T}} W_2^{\mathrm{T}} A(r) + W_4^{\mathrm{T}} B_f(r) C(r) & W_4^{\mathrm{T}} A_f(r) W_3^{-1} W_4 \end{bmatrix},$$

$$\Phi^{\mathrm{T}} W^{\mathrm{T}} \bar{A}_{hk}(r) =$$
$$\begin{bmatrix} W_1^{\mathrm{T}} A_{hk}(r) + W_4^{\mathrm{T}} B_f(r) C_{hk}(r) \\ W_4^{\mathrm{T}} W_3^{-\mathrm{T}} W_2^{\mathrm{T}} A_{hk}(r) + W_4^{\mathrm{T}} B_f(r) C_{hk}(r) \end{bmatrix},$$

$$\Phi^{\mathrm{T}} W^{\mathrm{T}} \bar{B}(r) =$$
$$\begin{bmatrix} W_1^{\mathrm{T}} B(r) + W_4^{\mathrm{T}} B_f(r) D(r) \\ W_4^{\mathrm{T}} W_3^{-\mathrm{T}} W_2^{\mathrm{T}} B(r) + W_4^{\mathrm{T}} B_f(r) D(r) \end{bmatrix},$$

$$\Phi^{\mathrm{T}} \bar{C}^{\mathrm{T}}(r) =$$
$$\begin{bmatrix} H^{\mathrm{T}}(r) - C^{\mathrm{T}}(r) D_f^{\mathrm{T}}(r) \\ -W_4^{\mathrm{T}} W_3^{-\mathrm{T}} C_f^{\mathrm{T}}(r) \end{bmatrix}, k = 1, 2 \tag{19}$$

定义

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_f(r) & \bar{B}_f(r) \\ \bar{C}_f(r) & \bar{D}_f(r) \end{bmatrix} \triangleq$$
$$\begin{bmatrix} W_4^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_f(r) & B_f(r) \\ C_f(r) & C_f(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_3^{-1} W_4 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$
$$R \triangleq W_1, S \triangleq W_2 W_3^{-1} W_4, T \triangleq W_4^{\mathrm{T}} W_3^{-\mathrm{T}} W_4. \tag{20}$$

将式(16)～(20) 代入 $\Theta < 0$ 中, 便可得到式(14).

另外, 可由式(16) 得滤波器参数为

$$\begin{bmatrix} A_f(r) & B_f(r) \\ C_f(r) & D_f(r) \end{bmatrix} \triangleq$$
$$\begin{bmatrix} W_4^{-\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_f(r) & \bar{B}_f(r) \\ \bar{C}_f(r) & \bar{D}_f(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_4^{-1} W_3 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{21}$$

然而, 式(14) 不含有构造滤波器所需的矩阵变量 W_3 和 W_4. 为此, 将滤波器(3) 由测量输出 $y(t)$ 到估计信号 $z_f(t)$ 的传递函数表示为

$$T_{z_f y} = C_f(r)(sI - A_f(r))^{-1} B_f(r) + D_f(r). \tag{22}$$

再将式(21) 的参数表示代入式(22), 得

$$\begin{aligned} T_{z_f y} &= C_f(r)(sI - A_f(r))^{-1} B_f(r) + D_f(r) = \\ &\bar{C}_f(r) W_4^{-1} W_3 (sI - W_4^{-\mathrm{T}} \bar{A}_f(r) W_4^{-1} W_3)^{-1} \times \\ &W_4^{-\mathrm{T}} \bar{B}_f(r) + \bar{D}_f(r) = \\ &\bar{C}_f(r)(sI - T^{-1} \bar{A}_f(r))^{-1} T^{-1} \bar{B}_f(r) + \bar{D}_f(r). \end{aligned} \tag{23}$$

由此可知, 满足要求的滤波器(3) 的参数矩阵可由式(15) 构造. □

4　仿真实例

考虑形如式(1) 的分布式时滞 LPV 系统, 并已知如下参数矩阵:

$$A(r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 + 0.2r_1 \\ -2 & -3 + 0.1r_2 \end{bmatrix},$$

$$A_{h1}(r) = \begin{bmatrix} 0.2r_1 & 0.1 \\ -0.2 + 0.1r_2 & -0.3 \end{bmatrix},$$

$$A_{h2}(r) = \begin{bmatrix} 0.2r_1 & 0.1 \\ -0.2 + 0.1r_2 & -0.3 \end{bmatrix},$$

$$B(r) = \begin{bmatrix} -0.6 + 0.1r_1 \\ 0.2r_2 \end{bmatrix},$$

$$C(r) = [-0.8 + 0.2r_1 \quad 0.2 - 0.1r_1],$$
$$C_{h1}(r) = [0.6 - 0.1r_1 \quad -0.3 - 0.1r_1],$$
$$C_{h2}(r) = [-0.2 + 0.1r_1 \quad 0.8 - 0.2r_1],$$
$$H(r) = [0.2 - 0.1r_1 \quad -0.1 + 0.2r_1],$$
$$H_{h1}(r) = [-0.2 + 0.1r_1 \quad 0.3 + 0.1r_1],$$
$$H_{h2}(r) = [0.1 + 0.2r_1 \quad -0.1 - 0.2r_1],$$
$$D(r) = 0.2 + 0.1r_1, L(r) = 0.3 + 0.2r_1.$$

其中: $r_1(t) = \sin(t)$ 和 $r_2(t) = |\cos(5t)|$ 为 2 个时变参数, 满足 $\dot{r}_1(t) \in [-1, 1]$, $\dot{r}_2(t) \in [-5, 5]$; 时变时滞 $h(r) = \delta_1 r_2(t)$, $\eta(r) = \delta_2 r_2(t)$, 参数 $\delta_1 = 1.5$ 和 $\delta_2 = 1.0$ 代表各自的最大时滞. 借助于文献[7]的近似基函数和网格技术, 将定理 3 中无限维线性矩阵不等式条件(14) 转化为有限维线性矩阵不等式组, 有如下条件:

$$Y(r) = \sum_{j=1}^{K} f_j(r) Y_j > 0. \tag{24}$$

这里选择如下基函数:

$$f_1(r) = 1, f_2(r) = r_1(t), f_3(r) = r_2(t). \tag{25}$$

在参数取 $\delta_1 = 1.5$ 和 $\delta_2 = 1.0$ 时, 应用 Matlab 的 LMI-Toolbox 解经过网格化的定理 3 中的线性矩阵

不等式组条件. 当 $\gamma = 0.650$ 时, 得到以下可行解:

$$\bar{A}_{f0} = \begin{bmatrix} -2.3253 & -2.9247 \\ -3.2595 & -4.6414 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_{f0} = \begin{bmatrix} 0.0100 \\ -0.2230 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_{f1} = \begin{bmatrix} 0.0179 & 0.0797 \\ 0.0780 & 0.2475 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_{f1} = \begin{bmatrix} -0.2297 \\ -0.2746 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_{f2} = \begin{bmatrix} -0.1413 & -0.2004 \\ -0.0237 & -0.1585 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_{f2} = \begin{bmatrix} -0.1890 \\ -0.3516 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.8163 & 1.0474 \\ 1.4357 & 2.2236 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_{f0} = [0.2400 \quad 0.1529],$$

$$\bar{C}_{f1} = [0.0818 \quad -0.0586],$$

$$\bar{C}_{f2} = [-0.1557 \quad -0.1851],$$

$$\bar{D}_{f0} = -0.3186,$$

$$\bar{D}_{f1} = 0.0779,$$

$$\bar{D}_{f2} = 0.0261.$$

因此, 根据式(15), 求得 H_∞ 滤波器参数为

$$A_f(r) = \begin{bmatrix} -1.5768 & 0.5147 \\ -0.7231 & -2.3298 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2320 & -0.5719 \\ 0.1444 & 0.3807 \end{bmatrix}\sin(t) + \begin{bmatrix} -0.8998 & -0.7003 \\ 0.4131 & 0.2586 \end{bmatrix}|\cos(5t)|;$$

$$B_f(r) = \begin{bmatrix} 1.1002 \\ -0.6185 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.3746 \\ -0.0530 \end{bmatrix}\sin(t) + \begin{bmatrix} 0.2713 \\ -0.2859 \end{bmatrix}|\cos(5t)|;$$

$$C_f(r) = [0.2400 \quad 0.1529] + [0.0818 \quad -0.0586]\sin(t) + [-0.1557 \quad -0.1851]|\cos(5t)|;$$

$$D_r = -0.3186 + 0.0779\sin(t) + 0.0261|\cos(5t)|.$$

5 结 语

本文研究了一类同时具有分布式时滞和离散时滞的线性参数变化系统的鲁棒 H_∞ 滤波问题. 基于参数线性矩阵不等式的方法, 提出了滤波误差系统渐近稳定的时滞相关的充分条件. 并应用投影定理解除了系统矩阵与依赖于参数的 Lyapunov 函数矩阵之间的耦合, 使所得到的条件更适合于系统的分析和综合. 在此基础上, 提出了鲁棒全阶 H_∞ 滤波器存在的充分条件. 该滤波器能够保证相对于所有能量有界的外界扰动信号, 滤波误差系统具有一定的 H_∞ 扰动衰减水平. 本文所得结果可以推广到具有多重时滞的 LPV 系统. 数值仿真验证了所提出方法的可行性.

参考文献(References)

[1] Gao H, Wang C. A Delay-dependent Approach to Robust H_∞ Filtering for Uncertain Discrete-time State-delay Systems [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2004, 52(6): 1631-1640.

[2] Park J H, Kwon O, Won S. LMI Approach to Robust H_∞ Filtering for Neutral Delay Differential Systems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, 150(1): 235-244.

[3] Fridman E, Shaked U, Xie L. Robust Filtering of Linear Systems with Time-varying Delay [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(1): 159-165.

[4] Apkarian P, Adams R J. Advanced Gain-scheduling Technology for Uncertain Systems [J]. *IEEE Trans on Control System Technology*, 1998, 6(1): 21-32.

[5] Apkarian P, Gahinet P, Becker G. Self-scheduled H_∞ Control of Linear Parameter-varying Systems: A Design Example [J]. *Automatica*, 1995, 31(9): 1251-1261.

[6] Wu F, Yang X, Packard A, et al. Induced L_2-norm Control of LPV Systems with Bounded Parameter Variation Rates [A]. *Proc of American Control Conf* [C]. Scattle: ACC, 1995: 2375-2383.

[7] Wu F, Grigoriadis K M. LPV Systems with Parameter-varying Time Delays: Analysis and Control [J]. *Automatica*, 2001, 37(2): 221-229.

[8] 郑连伟, 郭立山, 刘晓平. 一类线性参数变化时滞系统的 H_∞ 控制[J]. *控制与决策*, 2001, 16(5): 595-598.
(Zheng L W, Guo L S, Liu X P. H_∞ Control of a Class of Linear Parameter-varying Delay Systems[J]. *Control and Decision*, 2001, 16(5): 595-598.)

[9] Zhang X P, Tsiotras P, Knospe C. Stability Analysis of LPV Time-delayed Systems[J]. *Int J of Control*, 2002, 75(7): 538-558.

[10] Apkarian P, Adams R J. Continuous-time Analysis, Eigen-structure Assignment, and H_2 Synthesis with Enhanced Linear Matrix Inequalities (LMI) Characterizations [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1990, 35(7): 898-907.