文章编号: 1001-0920(2006)09-1065-03

一般非线性系统的相关阶与线性化

韩志涛[1a], 井元伟[1b], 段晓东[2], 张嗣瀛[1b]
(1. 东北大学 a. 理学院, b. 信息科学与工程学院, 沈阳 110004;
2. 大连民族学院 计算机系, 辽宁 大连 116000)

摘 要: 讨论了一般非线性控制系统的线性化问题. 基于一般非线性系统相关阶的概念, 以微分几何方法为工具, 给出一般非线性系统可线性化的一个充要条件, 分析了相关阶、特征函数和系统维数的关系, 并严格证明了线性化判据的必要性.

关键词: 一般非线性系统; 相关阶; 线性化; 特征矩阵
中图分类号: N941. 4 **文献标识码**: A

Relative Degree and Linearization of General Nonlinear System

HAN Zhi-tao[1a], *JING Yuan-wei*[1b], *DUAN Xiao-dong*[2], *ZHANG Si-ying*[1b]
(1a. College of Science, 1b. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. Department of Computer, Dalian Nationalitiy University, Dalian 116000, China. Correspondent: HAN Zhi-tao, E-mail: hanzhitao2001@126. com)

Abstract: The linearization problem of general nonlinear control systems is discussed. Based on the concept of relative degree of general nonlinear systems, a necessary and sufficient condition for the linearization of general nonlinear control systems is presented by means of the differential geometry method. The relationship between relative degree, index matrix and dimension of systems is analyzed. The necessity of linearization criteria is proved theoritically.

Key words: General nonlinear system; Relative degree; Linearization; Index matrix

1 引 言

近几十年来, 由于微分几何等数学工具的引入, 非线性控制系统理论取得了较大的进展, 一系列重要的非线性控制系统问题都得到深入研究. 在非线性系统的几何理论中, 相关阶[1,2]的概念已成为研究非线性系统的重要工具. 借助其概念, 许多重要问题如解耦、线性化[3~7]、渐近稳定性、输出调节[8]等都得到了较好的解决.

相关阶的概念主要针对仿射非线性系统, 在更一般的系统中讨论这些问题在理论和应用上均有重要意义. 仿射非线性系统的相关阶已得到广泛应用: 文献[9]首次给出了一般非线性系统的相关阶概念, 给出了相应的标准型, 并用它研究了局部反馈渐近镇定[10,11]等问题, 但利用一般系统相关阶的概念研究线性化问题还较为少见. 本文利用非线性系统相关阶的概念研究了一般非线性系统的线性化问题, 给出了用相关阶判别一般非线性系统可线性化的充要条件.

2 预备知识和相关阶概念

考虑如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ y = h(x). \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p$ 分别表示系统的状态、输入和输出.

定义 1 系统(1) 在点 (x_0, u_0) 具有相关阶 $\{r_1, \cdots, r_p\}$, 若

收稿日期: 2005-06-16; **修回日期**: 2005-10-26.
基金项目: 国家自然科学基金项目(69974008).
作者简介: 韩志涛(1963—), 男, 吉林公主岭人, 教授, 博士生, 从事非线性控制系统的研究; 井元伟(1956—), 男, 辽宁西丰人, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统、相似性结构分析等研究.

1) 在点(x_0, u_0)的某个邻域

$$\frac{\partial}{\partial u_j}(L_{f(x,u)}^{t} h_i(x)) = 0,$$

$$1 \le j \le m, 1 \le i \le p, t \le r_i - 1; \quad (2)$$

2) $p \times m$ 阶矩阵

$$A(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} L_{f(x,u)}^{r_1} h_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial u_m} L_{f(x,u)}^{r_1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u_1} L_{f(x,u)}^{r_p} h_p(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial u_m} L_{f(x,u)}^{r_p} h_p(x) \end{bmatrix} \quad (3)$$

在点(x_0, u_0)的秩为p.

定义 2 系统(1)在点(x_0, u_0)的某个邻域内可局部线性化是指存在坐标变换$z = \Phi(x)$和可逆的反馈$u = u(x, v)$使系统(1)在新坐标下表示为

$$\begin{cases} \mathring{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x, u(x,v))_{x=\Phi^{-1}(z)} = Az + Bv, \\ y = h(x)_{x=\Phi^{-1}(z)} = Cz, \end{cases} \quad (4)$$

且式(4)为能控系统.

3 主要结果

定理 1 设系统(1)有相同数量的输入和输出, $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^m$, 则系统(1)在点$(x_0, u_0)$的某个邻域内可局部线性化的充要条件是:

1) 系统的相关阶满足$r_1 + \cdots + r_m = n$;

2) $m \times m$ 阶特征矩阵

$$A(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} L_{f(x,u)}^{r_1} h_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial u_m} L_{f(x,u)}^{r_1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u_1} L_{f(x,u)}^{r_m} h_m(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial u_m} L_{f(x,u)}^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix}$$

在点(x_0, u_0)的秩为m.

证明 1) 充分性: 取系统(1)的新坐标为

$$\xi_t^i = L_{f(x,u)}^{t} h_i(x),$$

$$1 \le i \le m, t \le r_i - 1.$$

由文献[1]和假设条件ξ_t^i与u无关且线性无关, 在新坐标下有

$$\dot{\xi}_0^1 = \xi_1^1, \ \dot{\xi}_1^1 = \xi_2^1,$$
$$\vdots$$
$$\dot{\xi}_{r_1-2}^1 = \xi_{r_1-1}^1, \ \dot{\xi}_{r_1-1}^1 = L_{f(x,u)}^{r_1} h_1(x);$$
$$\vdots$$
$$\dot{\xi}_0^m = \xi_1^m, \ \dot{\xi}_1^m = \xi_2^m,$$
$$\vdots$$
$$\dot{\xi}_{r_m-2}^m = \xi_{r_m-1}^m, \ \dot{\xi}_{r_m-1}^m = L_{f(x,u)}^{r_m} h_m(x).$$

再设

$$\begin{cases} v_1 = L_{f(x,u)}^{r_1} h_1(x), \\ \quad \vdots \\ v_m = L_{f(x,u)}^{r_m} h_m(x). \end{cases}$$

由ξ_t^i与u线性无关可知矩阵$A(x,u)$在点(x_0, u_0)的秩为m, 则在点(x_0, u_0)的邻域内, 根据隐函数存在定理可以解出$u_i = u_i(x, v)$, 在此反馈下原系统是一个线性能控系统.

2) 必要性: 设系统(1)经过坐标变换和反馈变为线性能控系统, 即有$z = \Phi(x)$和可逆的反馈$u = u(x, v)$使系统(1)在新坐标下表示为

$$\begin{cases} \mathring{z} = Az + Bv, \\ y = Cz. \end{cases} \quad (5)$$

式(5)为Brunowsky标准型

$$A = \mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_m),$$
$$B = \mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_m).$$

其中A_i是$r_i \times r_i$矩阵, 且

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix};$$

b_i是$r_i \times 1$向量, 且$b_i = \mathrm{col}(0, \cdots, 0, 1)$.

现在对向量$z = \Phi(x)$进行分解, 有$z = \mathrm{col}(z_1, \cdots, z_m)$, 且$y_i = (1, 0, \cdots, 0) z_i$, 其中$\dim(z_i) = r_i$. 直接计算可知线性系统

$$\begin{cases} z = Az + Bv, \\ y = Cz, \end{cases}$$

对以上的输出$y_i = h_i$有特征指数$\{r_1, \cdots, r_m\}$, 且$r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$. 即

$$L_{g_j} L_f^t h_i(z) = L_{b_j} L_{Az}^t h_i(z) = 0,$$

$$0 \le t \le r_i - 1, 1 \le i, j \le m.$$

当$t = r_i$时, 对$\forall 1 \le i \le m$, 存在z_0和$1 \le j \le m$, 使$L_{b_j} L_{Az}^{r_i} h_i(z_0) \ne 0$. 注意到$L_{Az+Bv} h_i(z) = L_{Az} h_i(z) + L_B h_i(z) v$, $h_i(z)$是线性函数, 有

$$L_{Az+Bv}^t h_i(z) = L_{Az}^t h_i(z) + L_B L_{Az}^{t-1} h_i(z) v. \quad (6)$$

其中

$$L_B h_i(z) = (L_{b_1} h_i(z), \cdots, L_{b_m} h_i(z)),$$

$$v = \mathrm{col}(v_1, \cdots, v_m).$$

由式(6)可以看出式(7)与式(8)等价:

$$\frac{\partial}{\partial v_j} L_{Az+Bv}^t h_i(z) = 0,$$

$$1 \le i, j \le m, t \le r_i, \quad (7)$$

$$L_B L_{Az}^t h_i(z) = 0, t \le r_i. \quad (8)$$

当$t = r_i$时, 对$\forall 1 \le i \le m$, 存在z_0和$1 \le j \le m$, 使

$$L_{b_j} L_{Az}^{r_i} h_i(z_0) \neq 0. \tag{9}$$

矩阵

$$A(z,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial v_1} L_{Az+Bv}^{r_1} h_1(z) & \cdots & \frac{\partial}{\partial v_m} L_{Az+Bv}^{r_1} h_1(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial v_1} L_{Az+Bv}^{r_m} h_m(z) & \cdots & \frac{\partial}{\partial v_m} L_{Az+Bv}^{r_m} h_m(z) \end{bmatrix} \tag{10}$$

的秩为m. 可以看出, 式(9) 与式(10) 等价.

下面推导 rank$A(z,v)$ = rank$A(x,u)$, 即$A(z,v)$ 与$A(x,u)$ 同秩. 首先

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial v} L_{Az+Bv} h(z) = \\ &\frac{\partial}{\partial v} L_{\frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x,u(x,v))_{x=\Phi^{-1}(z)}} h(x)_{x=\Phi^{-1}(z)} = \\ &\frac{\partial}{\partial v} L_{\frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x,u(x,v))} h(x) \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} = \\ &\frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial h(x)}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x,u) \right\} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} = \\ &\frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial x} L_{f(x,u)} h(x) \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} = \\ &\frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} L_{f(x,u)} h(x) \right\} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}, \end{aligned}$$

其次

$$\begin{aligned} &L^2_{\frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x,u(x,v))} h(x) \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} = \\ &L_{\frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x,u)} L_{\frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x,u)} h(x) \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} = \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x,u) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} L_{f(x,u)} h(x) \right\} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} = \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x,u) \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} L_{f(x,u)} h(x) + \right. \\ &\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} L_{f(x,u)} h(x) \right\} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} = \\ &\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} f(x,u) L_{f(x,u)} h(x) + \right. \\ &\left. \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 L^2_{f(x,u)} h(x) \right\} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial v} L^2_{Az+Bv} h(z) = \\ &\frac{\partial}{\partial v} L^2_{\frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x,u(x,v))_{x=\Phi^{-1}(z)}} h(x)_{x=\Phi^{-1}(z)} = \\ &\frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} f(x,u) L_{f(x,u)} h(x) + \right. \\ &\left. \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 L^2_{f(x,u)} h(x) \right\} \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}. \end{aligned}$$

再由假设$\frac{\partial \Phi}{\partial x}$和$\frac{\partial u}{\partial v}$ 都是可逆矩阵, 可以推出在点(x_0, u_0) 的某个邻域内

$$\frac{\partial}{\partial u_j} (L^t_{f(x,u)} h_i(x)) = 0,$$

$$1 \le j \le m,\ 1 \le i \le m,\ t \le r_i - 1,$$

且$m \times m$ 阶矩阵

$$A(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} L_{f(x,u)}^{r_1} h_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial u_m} L_{f(x,u)}^{r_1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u_1} L_{f(x,u)}^{r_m} h_m(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial u_m} L_{f(x,u)}^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix}$$

在点(x_0, u_0) 的秩为m. □

4　结　　论

一般非线性控制系统的线性化是系统分析的一个重要方面, 对于仿射非线性系统已有判别法判别它是否可以线性化, 而对一般非线性控制系统并没有相应的判别法. 本文用微分几何方法研究了一般非线性控制系统, 借用一般非线性系统相关阶的概念, 得出一般非线性控制系统可以线性化与各输出函数相关阶的和及特征矩阵的秩的关系, 为研究和分析一般非线性控制系统的线性化问题提供了判别方法.

参考文献(References)

[1] Isidori A. *Nonlinear Control System* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989: 227-241.

[2] 程代展. *非线性系统的几何理论*[M]. 北京: 科学出版社, 1988: 231-246.
(Cheng D Z. *Geometric Theory of Nonlinear System* [M]. Beijing: Science Press, 1988: 231-246.)

[3] 佘焱, 张嗣瀛. 非线性大系统的分散线性化与分散控制[J]. *自动化学报*, 1998, 24(5): 585-591.
(She Y, Zhang S Y. Discrete Linearization and Discrete Control for Large-scale Nonlinear Systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24(5): 585-591.)

[4] Krener A J, Isidori A. Linearization by Output Injection and Nonlinear Observers [J]. *System Control Letter*, 1983, 3: 47-52.

[5] Krener A J. Normal Forms for Linear and Nonlinear Systems[J]. *Contempor*, 1987, 68: 157-189.

[6] Xu Z, Hanser J. Higher Order Approximate Feedback Linearization about a Manifold for Multi-input System [J]. *IEEE Trans on Automation Control*, 1995, 40: 833-840.

[7] Cheng D, Tarn T J, Isidori A. Global External Linearization of Nonlinear Systems via Feedback [J]. *IEEE Trans on Automation Control*, 1985, 30: 808-811.

(下转第 1072 页)

空间由 3 个离散值 + 1, - 1 和 0 构成. 回报函数设计为

$$r_t = \begin{cases} -1, x < 0.5; \\ 0, x \geq 0.5. \end{cases} \tag{22}$$

每次学习实验小车的初始状态为 $x = -0.5, v = 0$, 当小车到达 G 点或时间步数超过设定值时, 当前学习结束. 学习系统的性能由每次实验中小车从起始点运动到G 点的时间步数来评价. 仿真中, 网络权值初始化为[- 1, 1] 内的随机值, $\gamma = 0.98, \alpha_C = 0.2, \alpha_A = 0.3, \gamma_c = 0.35, \theta_c = 3.0, \theta_g = 0.01, \epsilon = 0.135\,4, \tau = 0.45, d_\epsilon = 0.01, \eta_1 = 0.05, \eta_2 = 0.03$, 采样周期为 0.02 s.

图 3 给出了仿真曲线. 图 3(a) 为模糊 Actor-Critic 强化学习算法在Mountain Car 问题中的一次典型运行的学习曲线, 横坐标为学习次数, 纵坐标为每次学习实验中小车从S 点运动到G 点所需的时间步数. 从图中可以看出, 学习系统在经过大约 60 次学习后, 小车可以在 100 个时间步内到达目标点, 表明小车已获得了有效的快速爬山控制策略. 图 3(b)～ (d)给出了学习控制器在经过 80 次学习后系统的有关状态变化数据, 其中图 3(b) 为小车的位置曲线, 从图中可以看出, 小车在动力不足的情况下, 必须利用反向运动来积蓄爬山所要求的势能. 由上述曲线可以看出, 模糊Actor-Critic 学习算法在有收敛性保证的同时, 具有良好的学习效率和泛化性能.

5 结 语

本文充分利用模糊推理的可理解性与RBF 神经网络的学习能力, 采用 FRBF 神经网络建立的模糊推理系统来实现模糊Actor-Critic 学习, 解决状态空间泛化中易出现的"维数灾"问题. FRBF 网络具有根据环境状态和被控对象特性的变化进行网络规则层节点动态、自适应地增加和合并的能力, 文中分别给出了节点增加的TD 误差标准和 if-part 标准, 以及节点合并的模糊相似性测度准则. 另外, 采用梯度下降法对网络规则层节点的中心和宽度进行在线调整. Mountain Car 控制的仿真结果验证了本文算法的有效性.

参考文献(References)

[1] Creighton D C, Nahavandi S. Optimizing Discrete Event Simulation Models Using a Reinforcement Learning Agent[A]. *Proc of Winter Simulation Conf* [C]. San Diego, 2002: 1945-1950.

[2] 李晓萌, 杨煜普, 许晓鸣. 基于递阶强化学习的多智能体AGV 调度系统[J]. *控制与决策*, 2002, 17(3): 292-296.
(Li X M, Yang Y P, Xu X M. Multiagent AGV Dispatching System Based on Hierarchical Reinforcement Learning [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(3): 292-296.)

[3] Ster B. An Integrated Learning Approach to Environment Modeling in Mobile Robot Navigation[J]. *Neurocomputing*, 2004, 57(1-4): 215-238.

[4] 秦斌, 吴敏, 王欣. 模糊神经网络模型混沌混合优化学习算法及应用 [J]. *控制与决策*, 2005, 20(3): 261-265.
(Qin B, Wu M, Wang X. Hybrid Chaos Optimization Algorithm for Fuzzy Neural Network Model and Its Applications[J]. *Control and Decision*, 2005, 20(3): 261-265.)

[5] Samejima K, Omori T. Adaptive Internal State Space Construction Method for Reinforcement Learning of a Real-world Agent[J]. *Neural Networks*, 1999, 12(7): 1143-1155.

[6] Meesad P, Yen G G. Accuracy, Comprehensibility and Completeness Evaluation of a Fuzzy Expert System [J]. *Int J of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems*, 2003, 11(4): 445-466.

[7] Lee Y A, Chung T C. A Function Approximation Method for Q-learning of Reinforcement Learning[J]. *J of KISS: Software and Applications*, 2004, 31(11): 1431-1438.

(上接第 1067 页)

[8] Byrnes C I, Hu X. The Zero Dynamics Algorithm for General Nonlinear Systems and Its Application in Exact Output Tracking [J]. *J of Mathmatic Systems, Estimation and Control*, 1993, 3(1): 51-72.

[9] 佘焱, 张嗣瀛. 一般非线性系统的相关阶与标准型[J]. *自动化学报*, 1998, 24(4): 570-572.
(She Y, Zhang S Y. Relative Degree and Normal Form for General Nonlinear Systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24(4): 570-572.)

[10] 佘焱, 张嗣瀛. 一般非线性控制系统的局部反馈渐近镇定[J]. *控制与决策*, 1998, 13(6): 624-628.
(She Y, Zhang S Y. Local Feedback Asymptotic Stabilization for General Nonlinear Systems [J]. *Control and Decision*, 1998, 13(6): 624-628.)

[11] Hu X. Some Results in Nonlinear Output Regulation and Feedback Stabilization[J]. *Automatica*, 1994, 59(4): 1085-1093.