

文章编号: 1001-0920(2007)01-0081-04

非线性系统零解稳定性判定的广义二次型方法

陈雪波, 徐望宝, 李小华

(辽宁科技大学 电子与信息工程学院, 辽宁 鞍山 114044)

摘要: 为了寻找一种能充分利用矩阵理论构造非线性系统李亚普诺夫函数的方法, 首先提出分量函数矩阵和广义二次型函数等概念, 得到了如果一个函数的导数具有某种特定形式, 则不需处理旋度方程, 便可直接得到该函数的若干定理; 然后提出一种构造李亚普诺夫函数和判定非线性系统零解稳定性的广义二次型方法, 并举例说明了该方法的应用. 理论和实例表明, 该方法是一种充分利用矩阵特性, 适用范围广且不需处理旋度方程的方法.

关键词: 非线性系统; 李亚普诺夫函数; 稳定性; 广义二次型方法; 分量函数矩阵

中图分类号: TP202 **文献标识码:** A

Generalized quadratic form method for zero-solution stability of nonlinear systems

CHEN Xue-bo, XU Wang-bao, LI Xiao-hua

(School of Electronics and Information Engineering, Liaoning University of Science and Technology, Anshan 114044, China. Correspondent: CHEN Xue-bo, E-mail: xuebochen@126.com)

Abstract: In order to take advantage of matrix for constructing Lyapunov function of nonlinear systems, some conceptions, such as element function matrix and generalized quadratic form function, are proposed. The corresponding theorems are then proofed, in which if a function's derivative has a certain form, then the function could be directly concluded without dealing with rotation equations. Finally, a method of constructing Lyapunov function, so called generalized quadratic form method, is presented for zero-solution stability criterion of nonlinear systems. An example indicates its application. The theory and example of the proposed method show that the generalized quadratic form method take advantage of matrix characteristics, and is available in many cases.

Key words: Nonlinear systems; Lyapunov function; Stability; Generalized quadratic form method; Element function matrix

1 引言

李亚普诺夫稳定性定理作为处理一般系统稳定性问题的最主要的方法之一, 已得到广泛的应用^[1-6]. 文献[1, 2]运用李亚普诺夫稳定性定理, 对定常系统的稳定性问题进行了有益的探讨, 得到了如下判据:

引理 1 设 U 为原点的某邻域, 定常系统

$$\dot{x} = f(X). \quad (1)$$

其中: $X \in U, f(0) = 0$ 且 $f(\cdot) \in C(R)$. 如果存在连续可微函数 $V(X), V(0) = 0$, 且其沿系统(1)轨线的导数 $\dot{V}(X)$ 在原点的邻域内是定号的, 则当 $V(X)$ 是与 $\dot{V}(X)$ 正负号相反的定号函数时, 系统(1)的平衡点 $X = 0$ 是渐近稳定的, 否则该平衡点不

稳定.

此结果表明, 一旦求得某个定号的导函数 $\dot{V}(X)$, 则可构造出给定系统的李亚普诺夫函数, 并对给定系统的稳定性作出判定. 定号导函数的存在已在很大程度上得到了证明^[7]. 然而, 构造李亚普诺夫函数虽然有克拉索夫斯基法^[8, 9]、变量梯度方法^[9, 10]等多项成果, 但要构造非线性系统的李亚普诺夫函数, 无论是根据李亚普诺夫稳定性定理还是引理 1, 都很困难. 比如得到的 $V(X)$ 和 $\dot{V}(X)$ 表达式复杂, 其定号性判定困难等.

本文以针对非线性定常系统而提出的分量函数矩阵和广义二次型函数为工具, 提出一种构造李亚普诺夫函数和判定非线性定常系统零解稳定性的方

收稿日期: 2005-11-01; 修回日期: 2006-03-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60574010).

作者简介: 陈雪波(1960—), 男, 福建莆田人, 教授, 博士生导师, 博士, 从事复杂系统、群集智能等研究; 徐望宝(1973—), 男, 湖南耒阳人, 硕士生, 从事非线性系统的稳定性判定、移动机器人队形控制等研究.

法,即广义二次型方法.利用这一方法,只要能构造出一个符合要求的分量函数矩阵 $\overline{K}(X)$,使得另一与 $\overline{K}(X)$ 密切相关的分量函数矩阵 $Q(X)$ 负定,就能构造出一个可判定给定系统稳定性的李亚普诺夫函数,并能对给定系统的稳定性作出判定.该方法既有比较成熟的矩阵理论背景,又具有变量梯度法的优点,不需要处理旋度方程,较好地解决了非线性定常系统稳定性的判定问题.

2 相关符号和定义

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ 和 $X^{(i)} = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)^T$ 为以 X 各元素的 i 次幂为元素的向量, $X^{(1)} = X$.

定义 1 称以 X 的各分量为自变量的多元连续函数 $k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 X 的分量函数,记为 $k(X)$;称以 X 的分量函数为元素的 $n \times n$ 的方阵

$$K(X) = \begin{bmatrix} k_{11}(X) & k_{12}(X) & \dots & k_{1n}(X) \\ k_{21}(X) & k_{22}(X) & \dots & k_{2n}(X) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1}(X) & k_{n2}(X) & \dots & k_{nn}(X) \end{bmatrix}$$

为分量函数矩阵.

注 1 常数矩阵 K 是分量函数矩阵的特殊情况.

定义 2 设 $K(X)$ 为对称分量函数矩阵(即 $(K(X))^T = K(X)$,下文同),则称函数 $f(X) = (X^{(i)})^T K(X) X^{(i)}$ 为广义二次型函数,简称广义二次型.

$$\overline{K}(X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1^2} \int_0^{x_1} k_{11}(x_1) x_1 dx_1 & \frac{1}{x_1 x_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} k_{12}(x_1 x_2) x_1 dx_2 & \dots & \frac{1}{x_1 x_n} \int_0^{x_1} \int_0^{x_n} k_{1n}(x_1 x_n) x_1 dx_n \\ \frac{1}{x_1 x_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} k_{21}(x_2 x_1) x_1 dx_2 & \frac{1}{x_2^2} \int_0^{x_2} k_{22}(x_2) x_2 dx_2 & \dots & \frac{1}{x_2 x_n} \int_0^{x_2} \int_0^{x_n} k_{2n}(x_2 x_n) x_2 dx_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{x_1 x_n} \int_0^{x_1} \int_0^{x_n} k_{n1}(x_n x_1) x_1 dx_n & \frac{1}{x_2 x_n} \int_0^{x_2} \int_0^{x_n} k_{n2}(x_n x_2) x_2 dx_n & \dots & \frac{1}{x_n^2} \int_0^{x_n} k_{nn}(x_n) x_n dx_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

证明 设 V 为 $V(X)$ 的梯度,则

$$(V)^T = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) = (V_1 \quad \dots \quad V_n),$$

其中 V_i 表示 V 沿坐标轴 i 方向的分量.

依据变量梯度法,有

$$V(X) = \int_0^X (V)^T dX. \quad (6)$$

线积分(6)与路径无关的条件是其旋度方程满足

$$\frac{\partial(V_p)}{\partial x_q} = \frac{\partial(V_q)}{\partial x_p}, \quad p, q = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

又根据式(2)和(3),得 $V(X)$ 的梯度

注 2 二次型是广义二次型的特殊情况.

定义 3 设 $K(X)$ 为对称分量函数矩阵,广义二次型 $f(X) = X^T K(X) X$,如果:

1) $f(X)$ 为原点邻域的正定函数,则称 $K(X)$ 为正定,并称 $K(X)$ 的定号性为正定;

2) $f(X)$ 为原点邻域的负定函数,则称 $K(X)$ 为负定,并称 $K(X)$ 的定号性为负定;

注 3 函数 $f(X) = X^T K(X) X$ 在原点邻域内正(负)定的定义与文献[1]完全相同.

3 广义二次型方法

广义二次型方法是一种构造李亚普诺夫函数和判定非线性定常系统零解稳定性的方法,其基本依据是定理 1 和定理 2.

定理 1 设对称分量函数矩阵

$$\overline{K}(X) = \begin{bmatrix} k_{11}(x_1) & k_{12}(x_1 x_2) & \dots & k_{1n}(x_1 x_n) \\ k_{21}(x_2 x_1) & k_{22}(x_2) & \dots & k_{2n}(x_2 x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1}(x_n x_1) & k_{n2}(x_n x_2) & \dots & k_{nn}(x_n) \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中: $k_{pp}(x_p)$ 为 x_p 的连续函数, $k_{pq}(x_p x_q) = k_{qp}(x_q x_p)$ 为 x_p 与 x_q 的乘积 $x_p x_q$ 的连续函数, $p, q = 1, 2, \dots, n$.

如果函数 $V(X)$ 的全导数

$$\dot{V}(X) = \dot{X}^T \overline{K}(X) X + X^T \overline{K}(X) \dot{X}, \quad (3)$$

则可求得

$$V(X) = X^T \overline{K}(X) X. \quad (4)$$

其中

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} =$$

$$2 \begin{bmatrix} k_{11}(x_1) x_1 + k_{12}(x_1 x_2) x_2 + \dots + k_{1n}(x_1 x_n) x_n \\ k_{12}(x_1 x_2) x_1 + k_{22}(x_2) x_2 + \dots + k_{2n}(x_2 x_n) x_n \\ \dots \\ k_{1n}(x_1 x_n) x_1 + k_{2n}(x_2 x_n) x_2 + \dots + k_{nn}(x_n) x_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

任取 $0 < p, q < n$. 当 $p < q$ 时,不失一般性,设 $p < q$,并设 $y = x_p x_q, f = k_{pq}(x_p x_q) = k_{pq}(y)$,则由所

Step3: 令 $Q(X)$ 为负定, 从而确定 $\bar{K}(X)$ 的各元素值, 使得 $\bar{K}(X)$ 为对称分量函数矩阵(2);

Step4: 根据 $\bar{K}(X)$ 求得 $\bar{K}(X)$, 则得系统的李亚普诺夫函数为 $V(X) = X^T \bar{K}(X) X$;

Step5: 判定 $\bar{K}(X)$ 的定号性, 若 $\bar{K}(X)$ 为正定, 则系统零解渐近稳定, 否则不稳定.

例1 设非线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} - \frac{2x_2}{(1+x_1^2)^2}. \end{cases} \quad (17)$$

首先求得系统(17)的系数函数矩阵

$$A(X) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{(1+x_1^2)^2} & 2 \\ -\frac{2}{(1+x_1^2)^2} & -\frac{2}{(1+x_1^2)^2} \end{bmatrix}.$$

然后, 设 $\bar{K}(X) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}$, 根据式(15), 得

$$\begin{aligned} Q(X) &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{(1+x_1^2)^2} & 2 \\ 2 & -\frac{2}{(1+x_1^2)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{(1+x_1^2)^2} & 2 \\ -\frac{2}{(1+x_1^2)^2} & -\frac{2}{(1+x_1^2)^2} \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} -\frac{4K_{11}}{(1+x_1^2)^2} - \frac{4K_{12}}{(1+x_1^2)^2} & 2K_{11} - \frac{2}{(1+x_1^2)^2} \\ 2K_{11} - \frac{4K_{12}}{(1+x_1^2)^2} - \frac{2K_{22}}{(1+x_1^2)^2} & 4K_{12} - \frac{4K_{22}}{(1+x_1^2)^2} \end{bmatrix}. \quad (18) \end{aligned}$$

令 $Q(X)$ 为负定, 故取 $K_{12} = 0$, $K_{22} = 1$, 代入式(18), 得

$$Q(X) = \begin{bmatrix} -\frac{4K_{11}}{(1+x_1^2)^2} & 2K_{11} - \frac{2}{(1+x_1^2)^2} \\ 2K_{11} - \frac{2}{(1+x_1^2)^2} & -\frac{4}{(1+x_1^2)^2} \end{bmatrix},$$

继续取 $K_{11} = \frac{1}{(1+x_1^2)^2}$, 得

$$Q(X) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{(1+x_1^2)^4} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{(1+x_1^2)^2} \end{bmatrix},$$

由 Sylvester 判据知 $Q(X)$ 负定. 将 K_{12} , K_{22} 和 K_{11} 代入 $\bar{K}(X)$, 得

$$\bar{K}(X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+x_1^2)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

最后, 根据定理1, 由 $\bar{K}(X)$ 求得

$$\begin{aligned} \bar{K}(X) &= \\ &\begin{bmatrix} \frac{1}{x_1^2} \int \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} dx_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} \int 2x_2 dx_2 \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} \frac{1}{1+x_1^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (19) \end{aligned}$$

由定理2知, $V(X) = X^T \bar{K}(X) X$ 即为系统(17)的李亚普诺夫函数, 其中 $\bar{K}(X)$ 为式(19). 由 Sylvester 判据知 $\bar{K}(X)$ 正定, 所以由定理2知系统(17)的零解渐近稳定.

注6 同样用广义二次型方法, 可得到系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + (1-x_2^2)x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_1^3 \end{cases} \quad (20)$$

的判定矩阵 $\bar{K}(X) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, 进而可判定系统(20)是不稳定的.

4 结论

本文提出的构造李亚普诺夫函数和判定非线性定常系统零解稳定性的广义二次型方法, 是以广义二次型函数、分量函数矩阵及其定号性的概念为依据的. 通过分量函数矩阵 $\bar{K}(X)$ 和 $Q(X)$ 的定号性, 可确定多元函数 $V(X)$ 和 $\dot{V}(X)$ 的定号性, 因此比传统方法便利. 根据系统的特性构造判定矩阵 $\bar{K}(X)$, 再通过 $\bar{K}(X)$ 求得系统的李亚普诺夫函数 $V(X)$, 使得 $V(X)$ 的取值范围比克拉索夫斯基方法广泛、灵活, 所以其适用范围比克拉索夫斯基方法广. 该方法相对于变量梯度方法的另一优点是不需处理旋度方程.

参考文献(References)

- [1] 李春文. 一种由负定函数 $dV(x)/dt$ 判定动态系统原点稳定性的方法[J]. 河南科学, 1995, 13(3): 189-193. (Li C W. Determining stability of dynamical system by a derivative $dV(x)/dt$ being negative definite[J]. He 'nan Science, 1995, 13(3): 189-193.)
- [2] Li Chunwen, Miao Yuan, Miao Qinghai. A method to judge the stability of dynamical system[C]. Proc IFAC Youth Automation Conf. Beijing: Pergamon Press, 1995:101-106.

(下转第90页)

与决策,提高了物流配送的智能化处理.

5 结 论

本文根据电子商务物流配送问题的复杂性特点,引入人工智能与知识工程的知识表示理论,提出一种基于知识的描述物流配送问题的树状表示法.这一表示法具有良好的问题可辨识性和问题描述结构的可扩性,具有较高的信息搜索与处理效率和辨识与推理效率,为物流配送的智能化科学调度奠定了基础.

通过 XML 保持的物流配送知识库与 GIS 中空间数据库之间的映射关系文档,为知识工程与地理信息系统之间融合提供了借鉴和参考.在 GIS 中实现可视化的智能推理和决策分析,有利于深化基于 GIS 的物流配送实时决策与智能物流调度系统的研究.

有待进一步开展的研究工作是提高在 GIS 中对知识的抽取效率,使映射文档具有更好的通用性.

参考文献(References)

- [1] 张潜,高立群,胡祥培.集成化物流中的定位-运输路线安排问题(LRP)优化算法评述[J].东北大学学报,2004,24(1):31-34.
(Zhang Q, Cao L Q, Hu X P. Review on optimal algorithms of location-routing problem (LRP) in integrated logistics [J]. J of Northeastern University, 2004, 24(1): 31-34.)
- [2] Andreas K, Andreas D. Facility location models for distribution system design [J]. European J of Operational Research, 2005, 162(1): 4-29.
- [3] Zha X F. An object-oriented knowledge based Petri net approach to intelligent integration of design and assembly planning [J]. Artificial Intelligence in Engineering, 2000, 14(1): 83-112.
- [4] Li X, Lara-Rosano F. Adaptive fuzzy Petri nets for dynamic knowledge representation and inference [J]. Expert System with Applications, 2000, 19(3): 235-241.
- [5] 常伟,刘文剑,许之伟,等.基于人工神经网络的工艺知识表示方法的研究[J].哈尔滨工业大学学报,2000,32(3):132-136.
(Chang W, Liu W J, Xu Z W, et al. Expression of process knowledge based on neural network [J]. J of Harbin Institute of Technology, 2000, 32(1): 132-136.)
- [6] 鲍军鹏,刘晓东,沈钧毅.基于XML的知识融合与知识库组织[J].计算机工程,2003,29(3):56-57.
(Bao J P, Liu X D, Shen J Y. XML-based knowledge fusion and knowledge base construction [J]. Computer Engineerings, 2003, 29(3): 56-57.)
- [7] Vojtech Sv áek, Marek Ruzicka. Step-by-step mark-up of medical guideline documents [J]. Int J of Medical Informatics, 2003, 70(2/3): 329-335.
- [8] 胡祥培,修立军,杨德礼.生产作业计划问题的知识表示研究[J].管理科学学报,1999,2(2):41-48.
(Hu X P, Xiu L J, Yang D L. A problem oriented knowledge representation for production scheduling [J]. J of Management Science, 1999, 2(2): 41-48.)
- [9] John Abbott. The use of GIS in informal settlement upgrading: Its role and impact on the community and on local government [J]. Habitat International, 2003, 27(4): 575-593.
- [10] Chris Upchurch, Michael Kuby, Michael Zoldek, et al. Using GIS to generate mutually exclusive service areas linking travel on and off a network [J]. J of Transport Geography, 2004, 12(1): 23-33.

(上接第84页)

- [3] Fu Jyunhong, Eyad H A. Families of Lyapunov functions for nonlinear systems in critical cases [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1993, 38(1): 1-16.
- [4] 廖晓昕.稳定性的理论、方法和应用[M].武汉:华中科技大学出版社,1999.
(Liao X X. Theory method and application of stability [M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science and Technology, 1999.)
- [5] Wang Zhongsheng, Zeng Zhigang, Liao Xiaoxin. Stability criteria for a class of uncertain systems with time delay [J]. J of Systems Science and Systems Engineering, 2003, 12(2): 204-209.
- [6] Wu Jianrong, Yang Chengwu. New Lyapunov criteria for asymptotic stability in singular system [J]. Mathematica Applicata, 2003, 16(2): 92-96.
- [7] Khalil Hassan K. Nonlinear system [M]. New York: Macmillan Publishing Company, 1992.
- [8] Krasovskii N N. Stability by Lyapunov's direct method with applications [M]. New York: Academic, 1964.
- [9] 郑大钟.线性系统理论[M].第2版.北京:清华大学出版社,2002.
(Zheng D Z. Linear system theory [M]. 2ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)
- [10] Schultz D F. The variable gradient method for generating Lyapunov functions [J]. Proc AIEE, 1962, 81(2): 203-310.