第 22 卷 第 1 期　　控 制 与 决 策　　2007 年 1 月
Vol. 22 No. 1　　Control and Decision　　Jan. 2007

文章编号: 1001-0920(2007)01-0007-04

基于交叉熵法解决随机用户和需求车辆路径问题

娄山佐, 史忠科
(西北工业大学 自动化学院, 西安 710072)

摘　要: 提出一种解决随机用户和需求车辆路径问题(VRPSCD)的方法. 针对目标函数的复杂性,设计一种基于Monte-Carlo抽样求解路径期望费用的有效方法;为提高标准交叉熵(CE)法性能,针对用于更新Markov转移矩阵关键路径,根据分位值改变大小,设计了自适应调整方法. 计算结果验证了采用该方法解决此问题的鲁棒性和有效性.

关键词: 车辆路径; 随机规划; 交叉熵法; 自适应
中图分类号: TP301　　**文献标识码**: A

Vehicle routing problem with stochastic customers and demands based on the cross-entropy method

LOU Shan-zuo, SHI Zhong-ke
(College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China. Correspondent: LOU Shan-zuo, E-mail: lshanzuo@163.com)

Abstract: A method is proposed to the vehicle routing problem with stochastic customers and demands. Due to the complexity of its objective function, an effective algorithm is designed to obtain the expected cost of routes by using Monte-Carlo sampling. In order to improve the performance of standard cross-entropy method, an adaptive adjustment scheme is developed for the crucial routes used to update Markov transition matrix in terms of the improvement level of quintiles. Computational results show the robustness and the validity of the proposed approach for solving such problems.

Key words: Vehicle routing; Stochastic programming; Cross-entropy method; Adaptive

1　引　言

随机车辆路径问题,因其求解的复杂性,近年来随着计算技术的发展已逐渐引起人们的重视. 它分为3种类型:一是随机需求问题;二是VRPSCD;三是随机行程时间问题. 文献[1]验证了VRPSCD比单纯随机需求问题更难解决. 解决方法有分枝定界法[2]、Rollout算法[3]、模拟退火法[4]、禁忌搜索法[5]、遗传算法[6]和CE法[7]等. CE法[8]是Rubinstein在研究小概率事件自适应估计算法[9]的基础上提出的,随后被应用于许多领域,成为解决随机规划问题的一种有效工具.

文献[7]应用CE法解决随机需求车辆路径问题,本文则基于CE法对更复杂的VRPSCD进行研究,为解决该问题提供一种新的方法.

2　问题描述

VRPSCD可描述如下:定义一个完全图 $G = (V, A, C)$. 其中: $V = \{1, 2, \cdots, n\}$ 为图的顶点集, 1表示库房,其余为用户点; $A = \{(i, j): i, j \in V, i \neq j\}$ 为两点弧集; $C = \{c_{ij}: i, j \in V, i \neq j\}$ 为两点间距离或费用集,满足对称性和三角不等式. 用户 i 存在的概率为 p'_i,假设它的需求为独立的离散随机变量 ξ_i,有 D 个可能值 $q_i^d (d = 1, 2, \cdots, D)$,对应概率为 $p_{i,d} = P(\xi_i = q_i^d)$,实际值车辆到达时才能知道. 车载量为 Q,且用户需求量均小于 Q,即 $q_i^d \leq Q$. 当 i 不存在时,需求量为0. 自文献[10]提出采用补救随机规划法解决随机车辆路径问题以来,便得到人们普遍重视. 该方法分为两步:第1步,规划1条起点和终点都为库房的路径,每个用户仅访问1次;第2步,车辆沿该路径服务,当确知用户不存在时,则跳过该用户,直接服务下一存在用户. 因车载量有限,车辆沿该路径服务可能发生失败,需采取补救措施. 补救措施包括:如未满足用户需求,车辆回库房载货

收稿日期: 2005-10-18; **修回日期**: 2006-03-22.
基金项目: 国家自然科学基金重点项目(60134010).
作者简介: 娄山佐(1964—),男,山东莱州人,博士生,从事智能算法、组合优化、交通调度等研究; 史忠科(1956—),男,陕西岐山人,教授,博士生导师,从事非线性系统控制、大系统理论、交通规划等研究.

后从该用户沿路径向前服务;如刚好满足用户需求,车辆回库房载货后从路径下一存在用户向前服务.已知用户和需求概率,确定一条第 1 步的路径,使期望总费用最小,包括车辆沿此路径的行程费用和往返库房的费用.

对任意一个用户序列(即路径) $x = \{v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{n+1}\}$,其中 $v_{n+1} = v_1$ 表示库房.它的期望费用可表示如下:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n+1} c_{v_iv_j}\bar{p}_{v_iv_j} + r_{v_2}(Q). \tag{1}$$

其中

$$\bar{p}_{v_iv_j} = \dot{p}_{v_i}\dot{p}_{v_j}\prod_{k=i+1}^{j-1}(1-\dot{p}_{v_k}); \tag{2}$$

$$r_{v_n}(g) = 2\dot{p}_{v_n}c_{v_nv_1}\sum_{d|(q^d_{v_n}>g)} p_{v_n,d}, 1 \le g \le Q; \tag{3}$$

$$r_{v_i}(g) =$$
$$(1-\dot{p}_{v_i})r_{v_{i+1}}(g) + \dot{p}_{v_i}\Big[\sum_{d|(q^d_{v_i}>g)} p_{v_i,d}(r_{v_{i+1}}(Q-$$
$$q^d_{v_i}) + 2c_{v_1v_i}) + \sum_{d|(q^d_{v_i}<g)} p_{v_i,d}r_{v_{i+1}}(g-q^d_{v_i})\Big] +$$
$$p_{v_i,d|(q^d_{v_i}=g)}\Big[\dot{p}_{v_i}r_{v_{i+1}}(Q) +$$
$$\sum_{j=i+1}^{n}\bar{p}_{v_iv_j}(c_{v_iv_1}+c_{v_1v_j}-c_{v_iv_j})\Big],$$
$$i = 2,3,\cdots,n-1,\ 0 < g \le Q. \tag{4}$$

式(1)为车辆沿路径 x 的期望总费用;式(2)为车辆由用户 v_i 直接到 v_j 的概率;式(3)为边界条件;式(4)表示到达用户 v_i 车载余量为 g 时,车辆从 v_i 到库房的期望补救费用.

3 交叉熵法原理

CE 法是基于 Monte-Carlo 和重要抽样技术,从某一分布 $P_0 \in \Psi$(Ψ为分布集)开始,通过迭代构建一系列分布 $P_t \in \Psi$,使生成最优解的概率增大.下面概述此方法,详见文献[11].对于最小值问题,是将在可行域 X 求解 $S(x^*) = \gamma^* = \min_{x\in X} S(x)$ 与估计事件$\{S(X) \le \gamma\}$概率联系起来,即

$$l = P_u(S(X) \le \gamma) =$$
$$\sum_x I_{\{S(x)\le\gamma\}} f(x,u) = E_u I_{\{S(X)\le\gamma\}}.$$

其中指示函数

$$I_{\{S(x)\le\gamma\}} = \begin{cases} 1, S(x) \le \gamma; \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$$

当可行域 X 非常大时,事件$\{S(X) \le \gamma\}$在密度测度 u 下为小概率事件,直接使用经典 Monte-Carlo 法估计,如抽样数不很大,l 经常等于 0.一种有效方法是基于重要抽样法,即

$$l = E_g I_{\{S(X)\le\gamma\}} \frac{f(X)}{g(X)}.$$

通过改变密度测度为 g,使小概率事件$\{S(X) \le \gamma\}$发生概率变大,从而减小估计方差.显然,当抽样密度测度为 $g^*(x) = \frac{I_{\{S(x)\le\gamma\}} f(x;u)}{l}$ 时,估计方差为 0.由于 g^* 与待求的 l 有关,上式不能直接应用.一种处理办法是从分布族$\{f(\cdot;v)\}$中选取 g,通过确定参数 v,使 g^* 与 $f(\cdot;v)$ 的距离最近.

Kullback-Leibler 距离(又称 CE)

$$D(g,h) = E_g \ln\frac{g(X)}{h(X)} =$$
$$\int g(x)\ln g(x)\,dx - \int g(x)\ln h(x)\,dx,$$

常用来衡量密度 g 与 h 间的距离.确定参数 v 使 g^* 与 $f(\cdot;v)$ 距离最小,根据上式求解

$$\max_v \int g^*(x)\ln f(x;v)\,dx.$$

代入 g^*,得

$$\max_v D(v) = \max_v E_u I_{\{S(X)\le\gamma\}} \ln f(X;v).$$

上式对应的估计为

$$\max_v \hat{D}(v) = \max_v \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_{\{S(X_i)\le\gamma\}} \ln f(X_i;v).$$

对上式 v 求梯度 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_{\{S(X_i)\le\gamma\}} \nabla \ln f(X_i;v) = 0$,可得 $\hat{D}(v)$ 的最优解 v^*.

利用多级迭代算法,从某一$\{\gamma_1, v_1\}$开始,通过抽样和 ρ 分位更新,构建了一系列$\{\gamma_t, v_t\}$,经过 T 代,$\{\gamma_T, v_T\}$非常接近最优的$\{\gamma^*, v^*\}$,则 γ_T 可视为 S 的最小值.

4 求解随机用户和需求车辆路径问题

4.1 路径期望费用的求解

VRPSCD 因增加用户的随机性,使求解路径期望费用很困难.式(1)复杂度为 $O(n^2 + nDQ)$,如果用户数较大,则求解式(3)和(4)受到状态维数制约,且需要很多计算时间.本文基于 Monte-Carlo 抽样法,根据用户和需求概率,对每个用户 v_i 随机抽取 M 个样本 $\hat{q}^k_{v_i}, k = 1, \cdots, M$.设路径为 $x = \{v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{n+1}\}$,其中 $v_{n+1} = v_1$ 表示库房,则它对应第 k 个实现为 $\hat{q}_k := \{\hat{q}^k_{v_2}, \hat{q}^k_{v_3}, \cdots, \hat{q}^k_{v_n}\}$.根据式(1)~(4),按下面步骤计算路径 x 对每个实现的费用.令 $k = 1$.

Step1: 初始化.对于实现 $\hat{q}_k$,确定最早服务用户 $v_i, i := \min\{i \mid \hat{q}^k_{v_i} > 0, i = 2, \cdots, n\}$;最晚服务用户 $v_{\tilde{j}}, \tilde{j} := \max\{j \mid \hat{q}^k_{v_j} > 0, j = 2, \cdots, n\}$.服务用户 v_i 后车辆余货 $\mathrm{leav}(v_i) = Q - \hat{q}^k_{v_i}$,费用 $F(\hat{q}_k) = c_{v_1v_i}$.

Step2: 确定路径中下一个服务用户 v_j, 其中 $j := \min\{j \mid \hat{q}^k_{v_j} > 0, j = i+1, \cdots, n\}$.

Step3: 定义指示函数

$$I(v_i) = \begin{cases} 0, \mathrm{leav}(v_i) = 0; \\ 1, \text{其他}. \end{cases}$$

Step4: 车辆服务用户 v_j 后, 剩余货量

$$\mathrm{leav}(v_j) = \begin{cases} \mathrm{leav}(v_i) - \hat{q}^k_{v_j}, \ \mathrm{leav}(v_i) > 0; \\ Q - \hat{q}^k_{v_j}, \ \mathrm{leav}(v_i) = 0; \\ Q + \mathrm{leav}(v_i) - \hat{q}^k_{v_j}, \ \mathrm{leav}(v_i) < 0. \end{cases}$$

Step5: 补救费用

$$k(v_j) = \begin{cases} 0, \ \mathrm{leav}(v_j) > 0, \mathrm{leav}(v_j) \neq Q - \hat{q}^k_{v_j}; \\ c_{v_1 v_j}, \mathrm{leav}(v_j) = Q - \hat{q}^k_{v_j}; \\ c_{v_j v_1}, \mathrm{leav}(v_j) = 0; \\ 2c_{v_j v_1}, \ -\infty < \mathrm{leav}(v_j) < 0. \end{cases}$$

Step6: 服务完用户 v_j 的费用

$$F(x, \hat{q}_k) = F(x, \hat{q}_k) + c_{v_i v_j} \cdot I(v_i) + k(v_j).$$

Step7: 若 $j = \tilde{j}$, 则计算总费用为

$$F(x, \hat{q}_k) = \begin{cases} F(x, \hat{q}_k) + c_{v_{\tilde{j}} v_1}, \mathrm{leav}(v_{\tilde{j}}) \neq 0; \\ F(x, \hat{q}_k), \ \mathrm{leav}(v_{\tilde{j}}) = 0. \end{cases}$$

否则, 令 $i := j$, 返回 Step2.

Step8: 若 $k < M$, 则令 $k = k+1$, 返回 Step1; 否则, 终止计算.

得到 M 个样本实现费用后, 路径 x 近似期望费用为 $F(x) := \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} F(x, \hat{q}_k)$.

4.2　交叉熵法的设计

文献[11]将 CE 法与 Markov 链相结合, 通过迭代求解旅行商问题(TSP), 利用每代优良解更新 Markov 转移矩阵, 使下一代随机生成更优路径的概率增大. 转移矩阵更新规则为

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{N} I_{\{S(X_k) \le \gamma\}} I_{\{X_k \in \chi_{ij}\}}}{\sum_{k=1}^{N} I_{\{S(X_k) \le \gamma\}}},$$

其中 χ_{ij} 为含有从点 i 直接到点 j 的所有路径集合.

由于 TSP 与车辆路径问题的相似性, 文献[7, 12]基于 TSP 求随机车辆路径问题. 本文则基于该思想进行研究.

CE 法的分位参数 ρ 的设置非常关键, 它决定用于更新转移矩阵 P 的路径. 文献[11]仅给出 ρ 为[0.01, 0.1]的常数, 没有给出确定方法. 经过迭代更新, P 趋近退化, 即每行有一个元素接近 1, 其余近似为 0. 经 ρ 分位用于更新 P 的 $[\rho \cdot N]$ ($[\cdot]$ 表示取整, 下同) 条路径几乎相同(或完全相同), 求解处于停滞状态, 此时有可能收敛到局部最优解. 本文借鉴遗传算法变异操作的思想, 用互不相同的优良路径替代此 $[\rho \cdot N]$ 条路径, 这样由 P 生成的路径既不偏离目前最佳路径太远, 又能增加产生新的更优路径的概率. 设计 CE 法如下:

Step1: 生成初始转移矩阵 P, 令 $p_{ij} = 1/(n-1)$, $i \neq j$; $p_{ij} = 0$, $i = j$. 设置分位参数 ρ, 分位阈值 ε 和最优路径数 N^{elite} 的大小. 令 $\hat{P}_1 = P$, $t = 1$.

Step2: 根据用户和需求概率, 应用 Monte-Carlo 法对每个用户随机抽取 M 个样本. 基于 Markov 转移矩阵 P, 随机选取一点, 经 n 步不同状态随机转移可生成 1 条路径. 照此生成 N 条路径 $x_1, \cdots, x_N$, 并按 4.1 节方法, 计算每条路径 x_i 的平均费用 $F(x_i)$.

Step3: 将路径费用 $F(x_i)$ 由小到大排序: $\widetilde{F}_{(1)} \le \widetilde{F}_{(2)} \le \cdots \le \widetilde{F}_{(N)}$, 则它的 ρ 分位值为 $\gamma_t = \widetilde{F}_{([\rho \cdot N])}$. 更新目前为止得到的 N^{elite} 条最优路径和它的值.

Step4: 若 $\gamma_t < \gamma_{t-1} - \varepsilon$, 则执行 Step5, 用最好的 $[\rho \cdot N]$ 条路径更新 P; 否则, 若存在 ρ_t, 则由它得到 $\gamma_t = \widetilde{F}_{([\rho_t \cdot N])}$. 如果满足 $\gamma_t < \gamma_{t-1} - \varepsilon$, 则执行 Step5, 用最好的 $[\rho_t \cdot N]$ 条路径更新 P; 如不存在 ρ_t, 则执行 Step5, 从目前保留最优 N^{elite} 条路径中随机选取 $[\rho \cdot N]$ 条路径更新 P.

Step5: 更新 P, 即

$$p_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{N} I_{\{F(x_k) \le \gamma_t\}} I_{\{x_k \in \chi_{ij}\}}}{\sum_{k=1}^{N} I_{\{F(x_k) \le \gamma_t\}}}.$$

Step6: 如果到目前为止的最优解连续 d 次迭代保持不变, 则停止计算; 否则, 令 $t = t+1$, 返回 Step2, 继续执行. 这里 d 取为 10.

求解过程中, 若 ε 和 N^{elite} 选取太小, 最优解改进效果不明显; 选择太大, 会增加太多循环次数, 甚至影响收敛. 因此, 应根据问题综合考虑, 选取适当值. 本文取 $\rho = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$, $N^{\mathrm{elite}} = 3 \cdot [\rho \cdot N]$.

直接利用上面得到的 P, 当有的 p_{ij} 过早为 0 时, 易陷入局部最优解. 采用文献[11]方法, P 更新修改为 $p^t_{ij} = \alpha \cdot p_{ij} + (1-\alpha) \cdot p^{t-1}_{ij}$. α 为平滑参数, 本文取 0.9.

5　仿真试验及结果分析

由于缺少标准数据, 本文基于随机生成数据进行仿真试验. 用户坐标在 $[0, 100]^2$ 中随机产生, 库房坐标为 (50, 50), 所有距离为欧氏距离. 每个用户

存在概率在(0,1)间随机生成,假设它可能有3种需求量,分别从(0,10],(10,20]和(20,30]中随机产生.对应每种需求量的概率随机产生于(0,1)中,但需通过标准化,使它们之和为1.车辆数为1,载重量为50,单位距离费用为1.文献[11]建议路径样本数为$5n^2 \sim 10n^2$,n为用户数.采用4种实例进行试验,用户数为15和20,路径数N取$10n^2$;用户数为25和30,路径数N取$7n^2$.因问题具有很强的随机性,需较多样本,按用户和需求概率,随机抽取10 000个样本.每种实例运行10次,表1～表3中数值为平均值.

5.1 交叉熵法的鲁棒性

下面分析路径的随机生成和用户的随机抽样对解的影响.计算10次运行统计值:最优解估计均值$\overline{F}$,最优解最大值F^{max},最优解最小值F^{min},标准方差σ,变化系数$CV = \sigma/\overline{F}$.结果如表1所示.

表1 交叉熵法的鲁棒性

n	$\overline{F}$	F^{max}	F^{min}	σ	CV
15	525.7	528.8	523.9	1.6	0.003 0
20	645.6	651.4	638.1	4.5	0.006 9
25	801.6	807.8	792.2	4.8	0.005 9
30	927.1	935.5	918.4	4.8	0.005 1

从表1可以得出,尽管标准方差σ稍大些,但对解决用户和需求两个均为随机的问题,其值是可以接受的.从变化系数CV看,4种实例最大为0.69%,结果令人满意,说明CE法对路径的随机生成和用户的随机抽样具有较强的鲁棒性.

5.2 转移矩阵自适应更新与固定更新的比较

转移矩阵采用固定更新,即每次从抽样的N条路径中取固定数量$[\rho \cdot N]$条最优路径更新P.表2给出的是系统最优解连续10次迭代保持不变时的值,此时终止执行,括号内的数为终止时的迭代数.

表2 自适应更新与固定更新对比

n	自适应更新	固定更新
15	525.7 (24.9)	531.1 (21.1)
20	645.6 (33.3)	647.9 (22.2)
25	801.6 (27.7)	803.6 (22.9)
30	927.1 (28.7)	932.5 (27.1)

从表2可以看出,P采用本文设计的自适应更新比采用固定更新得到的解更优,尤其用户数为15和30的实例.说明当系统陷入局部最优解时,通过给P施加合理的小的扰动,可以使系统跳出局部最优解,得到质量更优的解.当然系统终止时的迭代数要大些,这可由表中括号内的数据看出.当执行到终止代数时,转移矩阵P退化为每行有一个元素非常接近1,其他元素都接近0,根据它抽取的N条路径,经ρ分位得到的$[\rho \cdot N]$条路径完全一样.如果继续执行到一个较大相同的迭代次数,仿真试验证明固定更新的最优解不再改进,自适应更新由于采用保留最优的路径,它的最优解不变或改进非常小.

5.3 交叉熵法与遗传算法比较

从现有文献知,采用精确的分枝定界法求解VRPSCD,其最大用户数不超过10.为此,采用与遗传算法(GA)比较,算法设计依照文献[6],交叉和变异概率分别为0.8和0.05,群体大小为100,适应度为路径近似期望费用的倒数,最大进化代数为1 500.表3给出的是最优解.

表3 交叉熵法与遗传算法比较

n	交叉熵法	遗传算法
15	525.7	527.3
20	645.6	669.9
25	801.6	843.4
30	927.1	962.8

从表3可知,CE法解决VRPSCD优于GA,尤其用户数较大的情况.文献[6]应用GA解决此问题,在用户数不超过10时,与分枝定界法相比,其结果比较理想.由本文试验可知,当用户数较大时,GA极易陷入局部最优解.另据测试发现,虽然CE法和GA都为全局搜索方法,但GA需设计复杂的编码、解码操作和设置关键的交叉和变异算子,相比之下,CE法要简单得多.尽管目前它也存在一些问题,如参数ρ的设置,但随着研究的深入,CE法会成为继GA之后解决复杂组合问题的又一有效方法.

6 结 语

本文基于CE,结合重要抽样、Monte-Carlo以及Markov状态转移技术,研究了VRPSCD,为解决该问题提供了一种新的方法.在描述问题和概述CE法的基础上,针对复杂的路径期望费用函数,设计了基于Monte-Carlo抽样求解的有效方法.另外,为提高标准CE法性能,增强跳出局部最优解的能力,针对用于更新转移矩阵关键路径,根据迭代过程中分位值改变大小,设计了自适应调整方法.仿真试验验证了所设计的CE法对路径的随机生成和用户的随机抽样具有较强的鲁棒性,通过与标准CE法、GA解的对比,证实了它的有效性.

参考文献(References)

[1] Gendreau M, Laporte G, Séguin R. An exact algorithm for the vehicle routing problem with stochastic demands and customers [J]. Trans Portation Science, 1995, 29(2): 143-155.

(下转第20页)

从上述数值举例不难看出,激励 Stackelberg 价控策略在网络中对通信量所产生的激励作用,体现了价格机制对网络的调节机能.因此,建立合理的激励策略是加强系统稳定性和控制网络拥塞的一个重要的手段.

5 结 语

本文引入非合作用户对策论的思想,讨论一类网络系统的通信量价控问题.考虑了各优先级间的竞争关系,给出了多优先级网络系统通信量的状态方程.在动力平衡状态下,用矩阵函数理论提出并阐述了非线性交叉干扰多激励价控的 Stackelberg 策略.文中给出了非线性交叉干扰的多激励价控,其优势在于通过调整激励参数可调控系统达到平衡点的速度,增强了用户间及网络系统的利益统一性,使系统尽快达到理想状态.

参考文献(References)

[1] Adamic L A , Huberman B A. Power-law distribution of the world wide web[J]. Science Magazine, 2000, 287 (5461): 2115.

[2] Lopez L, Sanjuan A F. Defining strategies to win in the internet market[J]. Physical A, 2001, 301(1-4): 512-534.

[3] DaSilva L A, Petr D W, Akar N. Equilibrium pricing in multi-service priority-based networks [J]. IEEE/ Globecom 97 Phoenix, 1997, 3(8): 1373-1377.

[4] 井元伟, 杨开阳, 金福德, 等. 具有多优先级多服务网络的激励价格控制[J]. 控制与决策, 2001, 16(4): 425-429.
(Jing Y W, Yang K Y, Jin F D, et al. Inventive pricing problem of multi-service networks with multi-priority-level[J]. Control and Decision 2001, 16(4): 425-429.)

[5] Cocchi R, Shenker S, Estrin D, et al. Pricing in computer networks: Motivation, formulation and example[J]. IEEE/ ACM Trans on Networking, 1993, 1(6): 617-627.

[6] Dziong Z, Mason L G. Fair-efficient call admission control policies for broadband networks — A game-theoretic framework [J]. IEEE/ AMC Trans on Networking, 1996, 4(1): 123-136.

[7] Shenker S J. Making greed work in networks: A game theoretic analysis of switch service disciplines [J]. IEEE/ ACM Trans on Networking, 1995, 3(6): 819-831.

[8] Haurie A, Marcotte P. On the relationship between Nash-cournot and wardrop equilibria [J]. Networks, 1985, 15(2): 295-308.

[9] Patriksson M. The traffic a ssignment problem: Models and methods[J]. Transportation Science, 1996, 30(3): 271-272.

[10] Mazumdar R, Mason L, Douligeris C. Fairness in network optimal flow control: Optimality of product forms[J]. IEEE Trans on Communications, 1991, 39 (5): 775-782.

(上接第 10 页)

[2] Hjorring C, Holt J. New optimality cuts for a single-vehicle stochastic routing problem [J]. Annals of Operations Research, 1999, 86: 569-584.

[3] Secomandi N. A rollout policy for the vehicle routing problem with stochastic demands [J]. Operations Research, 2001, 49(5): 796-802.

[4] Teodorovic D, Pavkovic G. A simulated annealing technique approach to the vehicle routing problem in the case of stochastic demand [J]. Transportation Planning and Technology, 1992, 16: 261-270.

[5] Gendreau M, Laporte G, Séguin R. A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with stochastic demands and customers [J]. Operations Research, 1996, 44(3): 469-477.

[6] Guo Z G, Mak K L. A heuristic algorithm for the stochastic vehicle routing problems with soft time windows [C]. Proc of the 2004 Congress on Evolutionary Computation (CEC2004). Portland, 2004: 1449-1456.

[7] Chepuri K, Homem-de-Mello T. Solving the vehicle routing problem with stochastic demands using the cross-entropy method [J]. Annals of Operation Research, 2005, 134(1): 153-181.

[8] Rubinstein R Y. The cross-entropy method for combinatorial and continuous optimization [J]. Methodology and Computing in Applied Probability, 1999, 1(2): 127-190.

[9] Rubinstein R Y. Optimization of computer simulation models with rare events [J]. European J of Operational Research, 1997, 99(1): 89-112.

[10] Bertsimas D J. A vehicle routing problem with stochastic demand[J]. Operations Research, 1992, 40 (3): 574-585.

[11] Boer D, Kroese D P, Mannor S, et al. A tutorial on the cross-entropy method [J]. Annals of Operations Research, 2005, 134(1): 19-67.

[12] Bertsimas D J, Chervi P, Peterson M. Computational approaches to stochastic vehicle routing [J]. Transportation Research, 1995, 29(4): 342-352.