

文章编号: 1001-0920(2007)01-0016-05

理想状态下网络非线性交叉干扰激励价控策略

岳晓宁^{1,2}, 井元伟¹, 王竞波²

(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004; 2. 沈阳大学 理学院, 沈阳 110044)

摘要: 针对多用户多优先级网络系统的管理问题, 利用对策论中的 Nash 平衡和激励 Stackelberg 策略等相关概念, 提出了理想状态下的激励价控策略设计. 在系统的动态平衡状态下, 利用信息量的瞬时变化率及用户与平衡点的偏离, 给出了非线性交叉干扰的多激励价控策略, 加强了用户与网络管理者的合作性, 激励和引导非合作用户选取对系统整体有益的服务请求, 以提高网络资源的利用率.

关键词: 激励策略; 价控; 多优先级; Nash 平衡; 理想状态

中图分类号: TP393

文献标识码: A

Nonlinear and crossing influences incentive pricing control strategy for network systems with ideal state

YUE Xiao-ning^{1,2}, JING Yuan-wei¹, WANG Jing-bo²

(1. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. School of Science, Shenyang University, Shenyang 110044, China. Correspondent: YUE Xiao-ning, E-mail: xiaoningyue62@163.com)

Abstract: Using the concepts of Nash equilibrium and Stackelberg incentive strategy in the game theory, the incentive pricing control strategy is devised for the management problem of the multi-user multi-priority system. In the ideal state, the nonlinear and crossing influence incentive pricing strategy is presented to encourage and guide the noncooperative users to select the serving request, which intensifies the cooperation of the users and network, and increases the using of network resource rate by using the instantaneous change of rate on network and deviating from the state equilibrium point.

Key words: Incentive strategy; Pricing; Multi-priority; Nash equilibrium; Ideal state

1 引言

近年来,关于多优先级通讯网络的通信量管理模型的研究已经取得了很大的进展,网络系统的动力学性态对于网络经济的影响问题也引起了一些学者的关注. Adamic 等^[1]通过市场上对网络用户量的统计,发现网络用户呈重尾分布. Lopez 等^[2]描述了不同策略下多优先级网络点击率的动力学性态. DaSilva 等^[3]利用对策论中的 Nash 平衡点的概念,研究了具有多优先级的网络服务系统中的价格问题. 用户与网络服务方的目标有时可能不一致,所以价控可作为一种手段来激励和引导用户采取对多优先级网络整体有益的行为. 文献[4]在多优先级情况下,考虑了调控用户自身价格对该用户盈余函数的

影响,采用线性激励 Stackelberg 策略,引导每个用户遵从某个恰当的策略组合. 多优先级网络服务中的价控问题,不仅决定了商业网络的经济生存性,而且通过对用户行为的影响,在通信量管理中起着重要作用. 当然还可从其他方面应用对策论原理对网络进行研究,如文献[5-10]从流量控制、拥塞控制和呼叫允许控制等方面进行了讨论.

本文建立了多优先级竞争服务网络系统的 Lotka-Volterra 型状态方程,讨论了系统在状态平衡下如何使网络用户的盈余函数达到 Nash 平衡的条件,同时给出了理想状态的网络形式. 通过对网络系统加入非线性交叉干扰的激励 Stackelberg 策略,激励和引导非合作用户的服务请求,以便网络系统

收稿日期: 2005-09-15; 修回日期: 2005-12-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60274099); 国家 863 计划基金项目(2004AA412030); 东北大学教育部暨辽宁省流程工业综合自动化重点实验室项目.

作者简介: 岳晓宁(1962—),女,沈阳人,副教授,博士,从事高速通信网络激励价格控制等研究; 井元伟(1956—),男,辽宁西丰人,教授,博士生导师,从事高速通信网络激励价格控制等研究.

达到理想状态.

2 系统描述

考虑 N 用户 M 优先级网络系统, 给出用户的盈余函数数学模型和网络系统各优先级通信量的 Lotka-Volterra 型状态方程. 设 $s_{ni} (s_{ni} \in \{0, 1\})$ 为用户 n 对优先级 i 的通信量或点击率, 且 $s_{n1} + s_{n2} + \dots + s_{nM} = 1$, 用户对网络系统的服务请求为

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1M} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{N1} & s_{N2} & \dots & s_{NM} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

则用户 n 盈余函数的数学模型可建立如下^[4]:

$$c_n(S) = \frac{a_n - b_n w_n^{d_n}}{U_n(q_n)} - \sum_{i=1}^M p_i s_{ni} \quad (2)$$

其中: $c_n(S)$ 和 $U_n(q_n)$ 分别为用户 n 的盈余函数和获益函数; q_n 为从网络得到的服务质量程度; d_n, a_n, b_n 为常数; n 为平均到达率, 且与 s_{ni} 无关; p_i 为用户使用第 i 优先级所支付的单价; \bar{x} 和 \bar{x}^2 为各用户信息长度最先两段, w_n 为在队列中的平均等待时间, 且

$$w_n = k \frac{1 - \bar{x}^T \sum_{i=1}^{M-1} s_{ni}}{N \sum_{h=1}^{M-1} h s_{hi}}, \quad T = \sum_{n=1}^N n, \quad k = \frac{\bar{x}^2 T}{z(1 - \bar{x}^T T)}$$

为讨论方便, 不妨设

$$C(S) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_N \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_N \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w_1^{d_1} \\ w_2^{d_2} \\ \dots \\ w_N^{d_N} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_M \end{bmatrix}, \quad (3)$$

则式(2)可用矩阵函数表示为

$$C(S) = A - BW - TSP. \quad (4)$$

网络系统优先级 i 的用户盈余总和可描述为

$$l_i(S) = (s_{1i}, s_{2i}, \dots, s_{Ni}) C(S); \quad (5)$$

各优先级用户组盈余函数的矩阵表达式为

$$L(S) = S^T C(S), \quad (6)$$

其中 $L(S) = (l_1(S), l_2(S), \dots, l_M(S))^T$.

若设 $s_i = s_{1i} + s_{2i} + \dots + s_{Ni} (i = 1, 2, \dots, M)$ 为所有用户使用第 i 优先级的通信量总和, 则满足 $s_1 + s_2 + \dots + s_M = N$. 由于网络各优先级间存在着相互依赖、相互制约和相互竞争的关系, 通信量 s_1, s_2, \dots, s_M 应满足下面的 Lotka-Volterra 型状态方程^[2]:

$$\begin{cases} ds_1/dt = s_1(-a_{11}s_1 - a_{12}s_2 - \dots - a_{1M}s_M), \\ ds_2/dt = s_2(-a_{21}s_1 - a_{22}s_2 - \dots - a_{2M}s_M), \\ \dots \\ ds_M/dt = s_M(-a_{M1}s_1 - a_{M2}s_2 - \dots - a_{MM}s_M). \end{cases} \quad (7)$$

其中: 参数 0 为网络通信量的自然增长率; 参数 $a_{ij} > 0 (i, j = 1, 2, \dots, M, i \neq j)$ 为优先级 j 对优先级 i 通信量的影响率; $a_{ii} > 0$ 为密度制约系数, $a_{ii} > 0$ 时称系统的优先级 i 为密度制约的, $a_{ii} = 0$ 时系统称为非密度制约的.

$$\text{设 } A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MM} \end{bmatrix} \text{ 为系统(7)系数}$$

矩阵, 若系统的平衡点存在, 且为 $(s_1^*, s_2^*, \dots, s_M^*)^T$, 则应满足

$$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} - A_0 \begin{bmatrix} s_1^* \\ s_2^* \\ \dots \\ s_M^* \end{bmatrix} = 0. \quad (8)$$

如果 $|A_0| \neq 0$, 即 A_0 可逆, 且有

$$\frac{1}{|A_0|} (A_{1i} + A_{2i} + \dots + A_{Mi}) > 0, \quad (9)$$

其中 A_{ij} 为矩阵 A_0 第 i 行第 j 列代数余子式, 则系统(7)存在唯一的正平衡点 $(s_1^*, s_2^*, \dots, s_M^*)^T$, 且满足

$$s_i^* = \frac{1}{|A_0|} (A_{1i} + A_{2i} + \dots + A_{Mi}). \quad (10)$$

若网络系统能在状态平衡点处达到 Nash 平衡 (该状态正是网络管理者与用户同时期待的理想状态), 则可给出如下定义:

定义 1 若系统(4)在系统(7)状态平衡点处达到 Nash 平衡点, 则称网络系统达到理想状态.

3 多用户多优先级的激励策略

首先引入激励 Stackelberg 策略以及最优策略组合的一个引理^[4].

定义 2 (激励 Stackelberg 策略) 假设 S^* 为网络系统的某一合适的策略组合, 若网络管理者以某种价格决定因素构成主导策略 $P_0(S)$, 使得

$$l_i[P_0(s_i^*, s_{-i}^*), s_i^*, s_{-i}^*] \geq l_i[P_0(s_i, s_{-i}^*), s_i, s_{-i}^*]. \quad (11)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, M$; $-i$ 表示在 $1, 2, \dots, M$ 中不等于 i 的其他各数. 则称 $P_0(S)$ 为网络管理者的激励 Stackelberg 策略.

在竞争模型中, 网络提供者是具有管理能力的一方, 管理者代表整个系统的利益. 考虑由 $l_i(S)$ 的线性组合作为管理者的网络效益, 即管理者的盈余函数为

$$L_0(P_0(S), S) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M) L(P_0(S), S). \quad (12)$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M$ 为各优先级用户组的加权值, 且有 $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_M = M$; $P_0(S)$ 为网络管理者的策略, 是策略组合 S 的函数.

下面给出最优策略组合的一个引理:

引理 1 若 S^* 是如下方程组的解:

$$\frac{\partial L_0(P_0(S), S)}{\partial s_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (13)$$

则 S^* 为网络总体最优的策略组合.

假定网络用户选定服务请求

$$S^* = \begin{bmatrix} s_{11}^* & s_{12}^* & \dots & s_{1M}^* \\ s_{21}^* & s_{22}^* & \dots & s_{2M}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{N1}^* & s_{N2}^* & \dots & s_{NM}^* \end{bmatrix}$$

在系统 (7) 唯一的正平衡点处 (此时对网络系统而言最为合适), 若用户表现为一个整体, 则很容易得到一个价格平衡策略. 然而, 在实际问题中, 消费者往往是不合作的, 即使平衡点 S^* 处系统 (4) 达到了 Nash 平衡, 采用 Nash 平衡也不一定会使用户改变其选择, 用户会单方面追求增加自己的盈余, 采取使自己消费最优的策略组合, 使系统在平衡点 S^* 处不稳定. 为此, 本文在用户组之间建立 Nash 平衡, 并制定相应的激励策略来维护最优状态. Stackelberg 策略是达到这一目的的一个有效方法, 它可以引导用户遵从服务请求 S^* 这一策略组合, 使系统稳定在平衡点 S^* 处, 并达到 Nash 平衡.

$\tilde{L}(P(S), S)$ 作为 $L(S)$ 的一个扩展, 即

$$\tilde{L}(P(S), S) = (\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \dots, \tilde{l}_M)^T = L(S) - P \quad (14)$$

是管理者对网络系统采取的激励策略. 其中

$$P = (P_1, P_2, \dots, P_M)^T. \quad (15)$$

假设服务请求 S^* 在系统 (7) 唯一的正平衡点处, 且满足条件

$$\frac{\partial \tilde{L}(P(S), S)}{\partial s_i} \Big|_{S^*} = 0, \quad (16)$$

$$\partial^2 \tilde{L} / \partial s_i^2 < 0, \quad (17)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, M$. 由于函数 $\tilde{l}_i(P_0(s_i, s_{-i}^*), s_i, s_{-i}^*)$ 是以 s_i 为变量的一元函数, 由式 (16) 和 (17) 可知,

s_i^* 是函数 $\tilde{l}_i(P_0(s_i, s_{-i}^*), s_i, s_{-i}^*)$ 的最大值点, 根据定义 2, P 为网络管理者的激励 Stackelberg 策略.

因为

$$\frac{\partial L_0(P(S), S)}{\partial s_i} \Big|_{S^*} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M) \frac{\partial \tilde{L}(P(S), S)}{\partial s_i} \Big|_{S^*} = 0, \quad (18)$$

由引理 1 可得, S^* 为网络总体最优的策略组合. 于是有如下结论:

定理 1 假设服务请求 S^* 在系统 (7) 唯一的正平衡点处, 且式 (16) 和 (17) 成立, 则 P 为理想状态下网络管理者的激励 Stackelberg 策略, 且 S^* 是网络总体的最优策略组合.

本文所讨论的各用户是在相同条件下接收网络服务的, 即有

$$a_i = a, \quad b_i = b, \quad d_i = d, \quad i = \dots \quad (19)$$

由式 (2) 可得

$$l_i(S) = a s_i - b k^d s_i f_i^d - p_i s_i. \quad (20)$$

其中

$$f_i = \begin{cases} \frac{1 - \bar{x}^{M-1}}{1 - \bar{x}^{M-1} s_j}, & i = M; \\ \frac{1}{1 - \bar{x}^{M-1} s_j}, & i = M. \end{cases} \quad (21)$$

假设选择非线性矩阵函数 $P = P_1 + P_2$ 作为激励惩罚结构, 即取

$$P_1 = Q_1 \left(\frac{\partial s_1}{\partial t}, \frac{\partial s_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial s_M}{\partial t} \right)^T, \quad (22)$$

$$P_2 = Q_2 \left[\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_1^* \\ s_2^* \\ \dots \\ s_M^* \end{bmatrix} \right], \quad (23)$$

其中 Q_1 和 Q_2 是 $M \times M$ 阶矩阵. 为选取 P_1 和 P_2 , 将 $P = P_1 + P_2$ 代入式 (14), 且满足式 (16) 和 (17), 得

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial s_1} & \frac{\partial L_1}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial L_1}{\partial s_M} \\ \frac{\partial L_2}{\partial s_1} & \frac{\partial L_2}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial L_2}{\partial s_M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial L_M}{\partial s_1} & \frac{\partial L_M}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial L_M}{\partial s_M} \end{bmatrix}_{S^*}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} a_{11} s_1^* & a_{12} s_1^* & \dots & a_{1M} s_1^* \\ a_{21} s_2^* & a_{22} s_2^* & \dots & a_{2M} s_2^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M1} s_M^* & a_{M2} s_M^* & \dots & a_{MM} s_M^* \end{bmatrix}. \quad (24)$$

因为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{l}_1}{\partial s_1^2} & \frac{\partial \tilde{l}_1}{\partial s_2 \partial s_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{l}_1}{\partial s_M \partial s_1} \\ \frac{\partial \tilde{l}_2}{\partial s_1 \partial s_2} & \frac{\partial \tilde{l}_2}{\partial s_2^2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{l}_2}{\partial s_M \partial s_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \tilde{l}_M}{\partial s_1 \partial s_M} & \frac{\partial \tilde{l}_M}{\partial s_2 \partial s_M} & \cdots & \frac{\partial \tilde{l}_M}{\partial s_M^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial s_1^2} & \frac{\partial l_1}{\partial s_2 \partial s_1} & \cdots & \frac{\partial l_1}{\partial s_M \partial s_1} \\ \frac{\partial l_2}{\partial s_1 \partial s_2} & \frac{\partial l_2}{\partial s_2^2} & \cdots & \frac{\partial l_2}{\partial s_M \partial s_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial l_M}{\partial s_1 \partial s_M} & \frac{\partial l_M}{\partial s_2 \partial s_M} & \cdots & \frac{\partial l_M}{\partial s_M^2} \end{bmatrix} - Q_1, \quad (25)$$

若取

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{(M-1)(M-1)} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

且满足

$$q_{ii} > \frac{1}{a_{ii}} \max_s \frac{\partial^2 l_i(s)}{\partial s_i^2}, \quad (27)$$

则 $\partial \tilde{l}_i / \partial s_i^2 < 0$ 成立. 由上述讨论, 可得下述结论:

定理 2 若网络系统的 Lotka-Volterra 型状态方程满足条件(9), 策略 P_1 和 P_2 分别取为式(22) 和 (23) 的形式, Q_1 和 Q_2 的选取分别满足式(24) 和 (26), 则该策略为理想状态下的网络激励 Stackelberg 策略, 同时管理者的期望策略为

$$P(S^*) = P_1(S^*) + P_2(S^*) = 0, \quad (28)$$

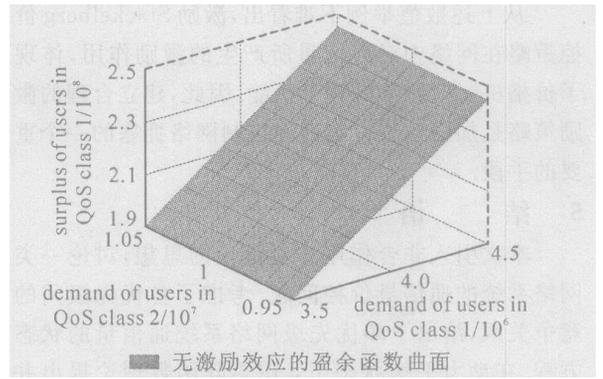
且 S^* 为网络总体的最优策略组合.

4 激励 Stackelberg 策略举例

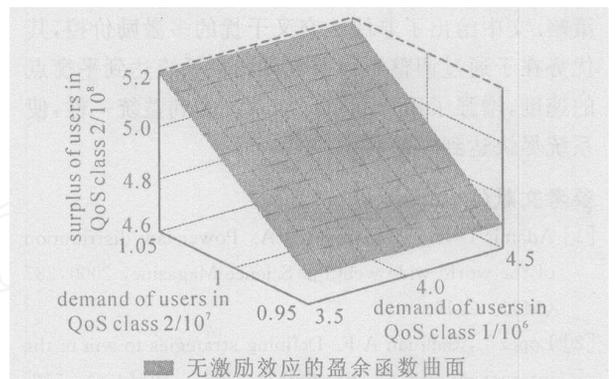
本文以 N 用户两优先级网络系统为例, 设 $\bar{x} = 5.26 \times 10^6$, $k = 0.25$, $\beta = 0.443$, $a = 60$, $b = 20$, $d = 2$, $p_1 = 11.67$, $p_2 = 20$, $a_{11} = 0.8$, $a_{12} = 0.2$, $a_{21} = 0.1$, $a_{22} = 0.5$. 由式(10), 可得系统状态平衡点为 $(s_1^*, s_2^*) = (3.9571 \times 10^6, 9.8929 \times 10^6)$.

优先级 $i (i = 1, 2)$ 的用户盈余函数是通信量 s_i 的单调增函数, 而网络资源是一个有限量, 这必然导致网络拥塞的出现, 从而降低网络的服务质量, 如图 1 所示.

若对系统施加激励 Stackelberg 价控策略, 即系统的价格机制是由通信量的单价和激励价格两部分组成, 当通信量 $s_i (i = 1, 2)$ 偏离了网络系统的状态平衡点 s_i^* 时, 用户盈余函数将减小, 根据用户追求高额利润的特性, 用户必然将自己的服务选择在 s_i^* 点处, 这样就达到了激励用户通信量稳定在平衡点处的目的, 如图 2 所示.

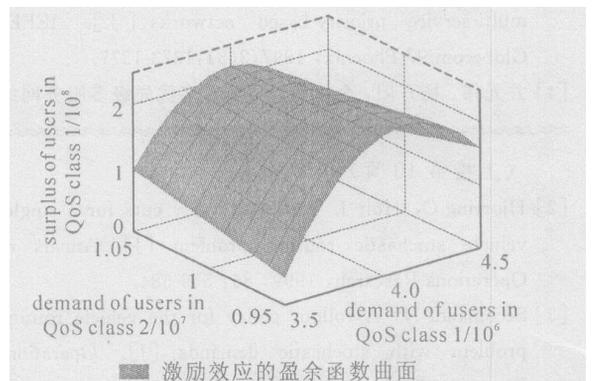


(a) 优先级等级 1 的用户组盈余函数曲面

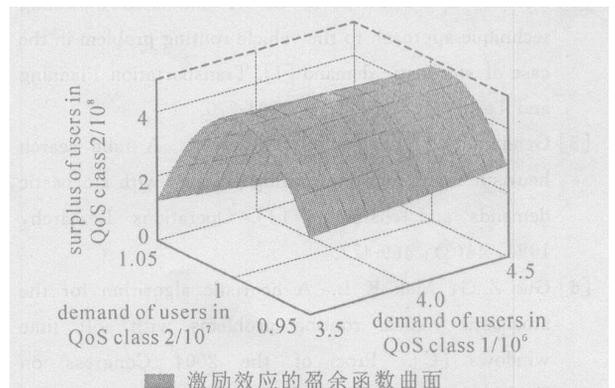


(b) 优先级等级 2 的用户组盈余函数曲面

图 1 两优先级用户无激励效应盈余函数曲面



(a) 优先级等级 1 的用户组盈余函数曲面



(b) 优先级等级 2 的用户组盈余函数曲面

图 2 两优先级用户激励效应盈余函数曲面

从上述数值举例不难看出,激励 Stackelberg 价控策略在网络中对通信量所产生的激励作用,体现了价格机制对网络的调节机能.因此,建立合理的激励策略是加强系统稳定性和控制网络 congestion 的一个重要手段.

5 结 语

本文引入非合作用户对策论的思想,讨论一类网络系统的通信量价控问题.考虑了各优先级间的竞争关系,给出了多优先级网络系统通信量的状态方程.在动力平衡状态下,用矩阵函数理论提出并阐述了非线性交叉干扰多激励价控的 Stackelberg 策略.文中给出了非线性交叉干扰的多激励价控,其优势在于通过调整激励参数可调控系统达到平衡点的速度,增强了用户间及网络系统的利益统一性,使系统尽快达到理想状态.

参考文献(References)

- [1] Adamic L A, Huberman B A. Power-law distribution of the world wide web[J]. Science Magazine, 2000, 287(5461): 2115.
- [2] Lopez L, Sanjuan A F. Defining strategies to win in the internet market[J]. Physical A, 2001, 301(1-4): 512-534.
- [3] DaSilva L A, Petr D W, Akar N. Equilibrium pricing in multi-service priority-based networks [J]. IEEE/Globecom 97 Phoenix, 1997, 3(8): 1373-1377.
- [4] 井元伟, 杨开阳, 金福德, 等. 具有多优先级多服务网络

的激励价格控制[J]. 控制与决策, 2001, 16(4): 425-429.

- (Jing Y W, Yang K Y, Jin F D, et al. Incentive pricing problem of multi-service networks with multi-priority-level[J]. Control and Decision 2001, 16(4): 425-429.)
- [5] Cocchi R, Shenker S, Estrin D, et al. Pricing in computer networks: Motivation, formulation and example[J]. IEEE/ACM Trans on Networking, 1993, 1(6): 617-627.
- [6] Dziong Z, Mason L G. Fair-efficient call admission control policies for broadband networks — A game-theoretic framework [J]. IEEE/ACM Trans on Networking, 1996, 4(1): 123-136.
- [7] Shenker S J. Making greed work in networks: A game theoretic analysis of switch service disciplines [J]. IEEE/ACM Trans on Networking, 1995, 3(6): 819-831.
- [8] Haurie A, Marcotte P. On the relationship between Nash-cournot and wardrop equilibria [J]. Networks, 1985, 15(2): 295-308.
- [9] Patriksson M. The traffic assignment problem: Models and methods[J]. Transportation Science, 1996, 30(3): 271-272.
- [10] Mazumdar R, Mason L, Douligeris C. Fairness in network optimal flow control: Optimality of product forms[J]. IEEE Trans on Communications, 1991, 39(5): 775-782.

(上接第 10 页)

- [2] Hjorring C, Holt J. New optimality cuts for a single-vehicle stochastic routing problem [J]. Annals of Operations Research, 1999, 86: 569-584.
- [3] Secomandi N. A rollout policy for the vehicle routing problem with stochastic demands [J]. Operations Research, 2001, 49(5): 796-802.
- [4] Teodorovic D, Pavkovic G. A simulated annealing technique approach to the vehicle routing problem in the case of stochastic demand [J]. Transportation Planning and Technology, 1992, 16: 261-270.
- [5] Gendreau M, Laporte G, Séguin R. A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with stochastic demands and customers [J]. Operations Research, 1996, 44(3): 469-477.
- [6] Guo Z G, Mak K L. A heuristic algorithm for the stochastic vehicle routing problems with soft time windows [C]. Proc of the 2004 Congress on Evolutionary Computation (CEC2004). Portland, 2004: 1449-1456.
- [7] Chepuri K, Homenr-de-Mello T. Solving the vehicle

routing problem with stochastic demands using the cross-entropy method [J]. Annals of Operation Research, 2005, 134(1): 153-181.

- [8] Rubinstein R Y. The cross-entropy method for combinatorial and continuous optimization [J]. Methodology and Computing in Applied Probability, 1999, 1(2): 127-190.
- [9] Rubinstein R Y. Optimization of computer simulation models with rare events [J]. European J of Operational Research, 1997, 99(1): 89-112.
- [10] Bertsimas D J. A vehicle routing problem with stochastic demand[J]. Operations Research, 1992, 40(3): 574-585.
- [11] Boer D, Kroese D P, Mannor S, et al. A tutorial on the cross-entropy method [J]. Annals of Operations Research, 2005, 134(1): 19-67.
- [12] Bertsimas D J, Chervi P, Peterson M. Computational approaches to stochastic vehicle routing [J]. Transportation Research, 1995, 29(4): 342-352.