

文章编号: 1001-0920(2007)10-1181-03

# 鲁棒稳定后推控制设计

谢成康<sup>1</sup>, 林意<sup>2</sup>

(1. 西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715; 2. 江南大学 信息工程学院, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 研究严格反馈形式系统的鲁棒稳定控制问题. 考虑输入噪声、测量噪声以及控制对象扰动的情况, 通过非线性距离度量框架结构, 建立了鲁棒稳定后推控制设计方法. 作为应用, 考虑一个时滞的二维系统, 得到了闭环系统对时滞的鲁棒稳定性.

**关键词:** 后推; 距离度量; 鲁棒性

**中图分类号:** TP302      **文献标识码:** A

## A backstepping design for robust stability

XIE Cheng-kang<sup>1</sup>, LIN Yi<sup>2</sup>

(1. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China; 2. School of Information Engineering, Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China. Correspondent: XIE Cheng-kang, E-mail: cxie@swu.edu.cn)

**Abstract:** The robust control for the nominal plant in strict-feedback form is studied. In the framework of nonlinear gap metric, a backstepping controller is designed to achieve robust stability with input, measurement disturbances and plant perturbations. As an application, a 2-dimension system with time delay is studied, and the robustness of the closed-loop to time delay is obtained.

**Key words:** Backstepping; Gap metric; Robustness

### 1 引言

一类构造性的设计方法即后推设计<sup>[1]</sup>, 于 20 世纪 90 年代逐步发展起来, 并成为非线性控制设计的有力工具. 一般的后推控制设计的目的是为了实现李雅普诺夫稳定性, 控制器的鲁棒性局限于模型中的不确定参数和输入噪声(输入误差). 对于输出噪声(输出误差)、模型扰动和时滞等控制系统中常见的不确定性, 则没有考虑. 一些学者<sup>[2-7]</sup>在某些限制条件下, 开始发展鲁棒后推控制设计, 总体思路是引入鲁棒李雅普诺夫函数作为控制设计工具, 但对于非模型化的控制对象扰动和时滞等不确定性, 应用上仍受到限制.

目前, 鲁棒后推控制设计还没有完全建立起来, 因而发展容许输入噪声、测量噪声及非模型化的对象扰动等系统不确定性的鲁棒后推设计, 取消对不确定性的限制条件, 是一项值得研究的工作. 就这项工作而言, 沿袭鲁棒李雅普诺夫函数设计方法有较大的障碍, 因此有必要建立或引入新的设计框架. 对

于线性控制系统, 距离度量是一种良好的拓扑结构, 并在鲁棒控制设计中获得了成功<sup>[8]</sup>. 由于非线性控制系统自身的复杂性, 相应的距离度量还没有发展起来, 直到 1997 年才较完整地建立起非线性控制系统的距离度量理论<sup>[9]</sup>. 作者和 French<sup>[10]</sup>尝试在非线性距离度量框架下进行鲁棒后推控制设计, 取得了初步的结果, 预示着非线性距离度量是一种合适的拓扑结构, 在此框架下可建立起鲁棒后推控制设计的系列方法.

本文在非线性距离度量的框架下, 考虑严格反馈形式控制系统的鲁棒后推设计, 建立起鲁棒稳定的后推控制设计方法. 作为应用, 考虑一个二维系统的时滞问题, 得到了闭环系统对时滞的鲁棒稳定性.

### 2 非线性距离度量及问题描述

要控制一个物理对象, 需要建立描述其状态的数学模型, 称为名义对象, 然后对名义对象设计控制器. 然而, 任何数学模型都不可能完全准确地描述物理对象的状态, 即总存在对象扰动. 另外, 在实施控

收稿日期: 2006-07-10; 修回日期: 2006-11-22.

基金项目: 重庆市自然科学基金项目(CSTC2005EB2048); 西南大学博士基金项目(SWNUB2005022).

作者简介: 谢成康(1962—), 男, 四川米易人, 教授, 博士, 从事控制理论与工程的研究; 林意(1963—), 男, 江苏无锡人, 教授, 博士, 从事控制理论与工程的研究.

制时,控制系统中还有输入噪声和测量噪声.控制器必须具有对这些扰动(或不确定性)的鲁棒性,才能使控制系统稳定,从而实现对原物理对象的控制.非线性距离度量框架正是考虑了这3类不确定性.

这里首先介绍有关非线性距离度量的思想,详细内容参见文献[9].

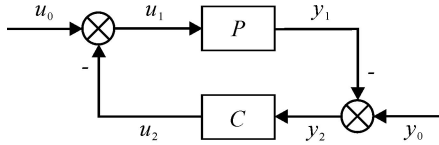


图 1 标准反馈结构

设  $U$  和  $Y$  为赋范信号空间,考虑图 1 所示的反馈控制系统(结构).其中:  $u_0$  和  $y_0$  分别表示输入噪声和测量噪声;  $y_1$  和  $y_2$  分别表示期望输出和测量输出;  $u_1$  和  $u_2$  分别表示扰动输入和控制输入;  $P:U \rightarrow Y, u_1 \mapsto y_1$  为名义控制对象;  $C:Y \rightarrow U, y_2 \mapsto u_2$  为控制器,闭环系统记为  $[P, C]$ .

设物理控制对象为  $P_1$ ,视其为名义控制对象的扰动,并适当定义  $P$  和  $P_1$  的距离度量  $(P, P_1)$ .首先设计控制器,实现闭环系统  $[P, C]$  稳定;然后研究和计算控制器的鲁棒边际.根据文献[9,10]中的相关定理,如果  $(P, P_1)$  小于控制器  $C$  的鲁棒边际,即控制对象扰动适当小,那么控制器  $C$  便可使闭环系统  $[P_1, C]$  稳定,从而实现对物理对象  $P_1$  的控制.

在距离度量框架下,鲁棒稳定性的相关定义及其物理含义,以及与李雅普诺夫稳定性的关系等内容参见文献[9-11].现在描述本文所要研究的名义控制对象及控制系统.

考虑如下严格反馈形式的名义对象  $P$  及控制系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = x_3 + f_2(x_1, x_2), \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), \\ \dot{x}_n = u_1 + f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n). \end{cases} \quad (1)$$

对名义控制对象  $P$  假设如下:对于  $1 \leq i \leq n$ ,有  $x_i(0) = 0$ ,且  $f_i$  为 Lipschitz 连续.即存在常数  $L_i$ ,使得对于任意  $x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \in \mathbb{R}^i$ ,均有

$$\|f_i(x_1^{(i)}) - f_i(x_2^{(i)})\| \leq L_i \|x_1^{(i)} - x_2^{(i)}\|. \quad (2)$$

这里用  $\|\cdot\|$  记 Euclid 范数.

本文考虑状态反馈控制问题,因而可测量状态为  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,从而图 1 反馈控制系统中的  $y_1$  就是  $x$ .信号空间取为

$$U = L(\mathbb{R}), Y = (L(\mathbb{R}))^n = L(\mathbb{R}) \times \dots \times L(\mathbb{R}).$$

于是

$$P: L(\mathbb{R}) \rightarrow (L(\mathbb{R}))^n,$$

$$C: (L(\mathbb{R}))^n \rightarrow L(\mathbb{R}).$$

空间  $L(\mathbb{R})$  的范数取为通常范数  $\|\cdot\|$ ,并且定义空间  $(L(\mathbb{R}))^n$  的范数为

$$\|y\| = (\|y_1\|^2 + \dots + \|y_n\|^2)^{1/2},$$

其中

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in (L(\mathbb{R}))^n.$$

本文考虑控制系统对输入噪声、输出噪声以及控制对象扰动的鲁棒性,因此标准的后推设计方法不再适用.这里借助于后推设计方法,在非线性距离度量框架下,设计控制器  $C: y_2 \mapsto u_2$ ,计算控制器的鲁棒边际,研究闭环系统的鲁棒性.

### 3 控制器设计

首先对名义对象  $P$  设计控制器  $C$ ,使闭环  $[P, C]$  稳定.

文献[10]的控制器设计中引入了数列  $\{c_i: 1 \leq i \leq n\}$ ,这一数列需满足递归条件,即第  $i$  项依赖于前  $i-1$  项.这一递归条件在具体控制时难以实现,为此本文重新设计控制器.

设  $\{L_i: 1 \leq i \leq n\}$  是由式(2)确定的常数,并任取  $n$  个正的常数  $\{c_i: 1 \leq i \leq n\}$ ,记

$$\begin{aligned} c &= \max\{c_i: 1 \leq i \leq n\}, \\ x^{(i)} &= (x_1, x_2, \dots, x_i)^T \in \mathbb{R}^i, \\ z^{(i)} &= (z_1, z_2, \dots, z_i)^T \in \mathbb{R}^i, \\ z &= (z_1, z_2, \dots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

然后用后推方法定义  $n$  个变换  $T_i: x^{(i)} \mapsto z^{(i)}$  为

$$\begin{cases} z_1 = x_1, & z_1 = -c_1 z_1 - \frac{n}{2c} L_1 z_1, \\ z_i(x^{(i)}) = x_i - f_{i-1}(x^{(i-1)}), \\ z_i(x^{(i)}) = \\ -c_i z_i - z_{i-1} - \left(\frac{n}{2c_{j=1}^i} L_j^2 T_j^{-1}\right) \times \\ \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_j}\right)^2\right) z + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_j} x_{j+1}, \\ i = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (3)$$

其中  $T_j^{-1}$  是变换  $T_j$  的逆算子的诱导范数.为使记号简便,把  $T_n: x \mapsto z$  记为  $T$ .

为说明上述定义是有意义的,需要证明:对于  $1 \leq i \leq n$ ,变换  $T_i$  是可逆的,且存在有限的范数.事实上,用数学归纳法不难证明:对于  $i = 1, 2, \dots, n$ , $z_i$  和  $x_i$  是其变量  $x_1, x_2, \dots, x_i$  的线性函数,变换  $T_i$  是线性和可逆的.

现任取一正的常数  $\gamma$ ,把控制器  $C: (L(\mathbb{R}))^n \rightarrow L(\mathbb{R}), y_2 \mapsto u_2$  设计为

$$C: u_2 = \gamma (y_2) - z_n (y_2). \quad (4)$$

### 4 鲁棒稳定性

本节给出闭环系统对控制对象扰动的鲁棒稳

定性结果,有如下定理:

定理1 对于由式(1) 给定的名义控制对象 P, 控制器 C 由式(4) 设计,那么存在连续函数  $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , 使得对于所有的  $(u_0, y_0)^T \in L(\mathbb{R}) \times (L(\mathbb{R}))^n$ , 有

$$\| (u_1, y_1)^T - (u_0, y_0)^T \| \leq \gamma(\| (u_0, y_0)^T \|) \quad (5)$$

成立,即闭环系统 [P, C] 是 gf 稳定的.

此外,如果控制对象开始时处于“休息”状态,即初始状态为 0,那么存在正的常数  $\gamma$ ,使得对于所有的  $(u_0, y_0)^T \in L(\mathbb{R}) \times (L(\mathbb{R}))^n$ , 有

$$\| (u_1, y_1)^T - (u_0, y_0)^T \| \leq \gamma(\| (u_0, y_0)^T \|) \quad (6)$$

成立,即闭环系统 [P, C] 是稳定的.

定理的证明较长,在此略去.

应用非线性距离度量理论,可得到闭环控制系统对于控制对象扰动的鲁棒稳定性,即物理控制对象的闭环系统 [P1, C] 的稳定性.

定理2 设 P 为由式(1) 定义的名义控制对象,且初始状态为 0,控制器 C 由式(4) 给定,常数  $\gamma > 0$  由式(6) 定义.对于任何控制对象扰动 P1,若

$$\| (P, P_1) \| < 1/\gamma,$$

则闭环系统 [P1, C] 是稳定的.

### 5 应用实例

在实施反馈控制时,时滞是客观存在的,因而要求控制系统对时间滞后具有鲁棒性,但通常时滞也是较难处理的系统扰动或不确定性.在此研究一个例子,把时滞考虑成控制对象扰动,然后利用非线性距离度量框架和已建立的结果,得到控制器对时滞的鲁棒性.

设名义对象 P 及控制系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - 2x_1 + \sin x_1, \\ \dot{x}_2 &= u_1 - x_1, \\ y_1 &= (x_1(t), x_2(t))^T. \end{aligned}$$

为了便于把时滞考虑成控制对象扰动,这里把可测量状态  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  明显写出来.设名义控制对象的初始状态为 0,其非线性项

$$f_1(x_1) = -2x_1 + \sin x_1, \quad f_2(x_1, x_2) = -x_1,$$

满足

$$f_1(0) = f_2(0) = 0,$$

且为全局 Lipschitz 连续.即对于任意的  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(1)}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(2)} \in \mathbb{R}^2$ , 有

$$\| f_1 \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(1)} \right) - f_1 \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(2)} \right) \| \leq 3 \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(1)} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(2)} \right\|.$$

对于任意的  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(2)}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(2)} \in \mathbb{R}^2$ , 有

$$\| f_2 \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(2)} \right) - f_2 \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(2)} \right) \| \leq \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(2)} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(2)} \right\|.$$

从而  $L_1 = 3, L_2 = 1$ .

由式(3) 和(4) 得到控制器

$$C: u_2 = -\gamma_2(y_2) - \gamma_2(y_2) = -b_1 x_1 - b_2 x_2.$$

其中

$$b_1 = \left( c_1 + \frac{1}{c} \right) + \left( 1 + c_1 + \frac{1}{c} \right),$$

$$b_2 = \gamma + \left[ c_2 + \frac{1}{c} (9 - T_1^{-1} - 2 + T_2^{-1} - 2) \right].$$

$T_1^{-1}$  和  $T_2^{-1}$  是依赖于  $c_1, c_2, c$  和  $\gamma$  可计算的常数.根据定理 1,闭环系统 [P, C] 是稳定的.

现在考虑反馈系统的时滞问题,即考虑如下控制系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - 2x_1 + \sin x_1, \\ \dot{x}_2 &= u_1 - x_1, \\ y_1 &= (x_1(t - \tau), x_2(t - \tau))^T. \end{aligned}$$

其中  $\tau$  为反馈滞后时间.把时滞这一系统扰动视为控制对象扰动,即考虑闭环系统 [P1, C].可以证明,如果  $\tau$  小于某个可计算的常数,则闭环系统 [P1, C] 也是稳定的,即控制器 C 具有对时滞的鲁棒性.

### 6 结 语

本文在非线性距离度量框架下,建立了存在输入噪声、测量噪声及控制对象扰动 3 类不确定性的鲁棒稳定的后推设计方法.这一方法消除了其他方法对于输入和测量噪声的限制条件,并且允许非模型化的控制对象扰动.本文的工作表明,非线性距离度量框架是研究鲁棒后推设计方法有效的拓扑结构,对于进一步发展鲁棒后推设计方法是一种有力的工具.应用表明,在非线性距离度量框架下研究控制系统对于时滞的鲁棒性也是有效的.

名义控制对象的非线性项的全局 Lipschitz 条件是获得对于输入和测量噪声的全局稳定的结果.如果把全局 Lipschitz 条件放松为局部 Lipschitz 条件,则可获得对于输入噪声和测量噪声局部稳定的结果.这将在后继论文中给出.

### 参考文献(References)

- [1] Kristić M, Kanellakopoulos I, Kokotović P. Nonlinear and adaptive control design [M]. New York: Wiley, 1995.
- [2] Arcak M, Kokotović P. Redesign of backstepping for robustness against unmodelled dynamics [J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2001, 11(7): 633-643.
- [3] Arcak M, Seron M, Braslavsky J, et al. Robustification of backstepping against input unmodeled dynamics [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(7): 1358-1363.
- [4] Ezal K, Pan Z, Kokotović P. Locally optimal and robust backstepping design [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(2): 260-271.

(下转第 1188 页)

然,针对不同的系统状况,M-agent 的评估和反馈信息也有所不同.

限于篇幅,C-agent 报价算法、HC-agent 报价评价算法以及分布式群控系统全局优化机制的验证和分析,将在后续文章中介绍.

## 5 结 语

现有的电梯群控智能调度方法基本属于集中式优化算法,由群控器负责对呼梯信号和系统状态进行优化求解,并将优化结果分派给各轿厢的控制器.集中式群控系统的计算代价主要由群控器承担.随着电梯交通系统复杂程度的提高,优化求解将成为电梯群控系统高效运行的瓶颈.将多代理系统(MAS)技术引入电梯群控系统,形成分布式电梯群控系统,能克服集中式群控系统的计算瓶颈问题,是智能电梯群控技术的一个很有前途的研究方向.

## 参考文献(References)

- [1] Yasuyuki Sogawa. Supervisory control for elevator group by using fuzzy expert system which addresses the riding time [C]. IEEE IECON. Taipei, 1996, 1: 419-424.
- [2] 宗群, 董玲, 牙淑红, 等. 基于遗传算法模糊神经网络的电梯群控调度[J]. 天津大学学报, 2003, 36(5): 585-589.  
(Zong Qun, Tong Ling, Ya Shu-hong, et al. Elevator group control dispatching using genetic algorithm based fuzzy neural network[J]. J of Tianjin University, 2003, 36(5): 585-589.)
- [3] 宗群, 董玲, 薛丽华. 电梯群控系统智能优化调度方法的研究[J]. 控制与决策, 2004, 19(8): 939-942.  
(Zong Qun, Tong Ling, Xue Li-hua. Research on intelligent optimal dispatching method in elevator group control systems [J]. Control and Decision, 2004, 19(8): 939-942.)
- [4] 毕晓亮, 李伟, 朱昌明, 等. 电梯群控系统多目标控制策略[J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(8): 1366-1368.  
(Bi Xiao-liang, Li Wei, Zhu Chang-ming, et al. Elevator service system based on multi-objective optimization [J]. J of Shanghai Jiaotong University, 2004, 38(8): 1366-1368.)
- [5] Cort P, Larraneta J, Onieva L. Genetic algorithm for controllers in elevator groups: Analysis and simulation during lunchpeak traffic [J]. Applied Soft Computing, 2004, 4(2): 159-174.
- [6] Marja-liisa Siikonen, Tuomas Susi, Henri Hakonen. Passenger traffic flow simulation in tall buildings [J]. Elevator World, 2001, 49(8): 117-124.
- [7] 朱昌明, 毕晓亮. 电梯智能群控系统研究概况[J]. 现代城市研究, 2003, (增1): 1-6.  
(Zhu Chang-ming, Bi Xiao-liang. Survey on elevator group control system [J]. Modern City Research, 2003, (S1): 1-6.)
- [8] 范玉顺, 曹军威. 多代理系统理论、方法与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.  
(Fan Yu-shun, Cao Jun-wei. Multi-agent systems: Theory, method and application [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)
- [5] Freeman R. Integrator backstepping for bounded control and control rates [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(2): 258-262.
- [6] Ito H, Freeman R. State-dependent scaling design for a unified approach to robust backstepping [J]. Automatica, 2001, 37(6): 843-855.
- [7] Freeman R, Kristić M, Kokotović P. Robustness of adaptive nonlinear control to bounded uncertainties [J]. Automatica, 1998, 34(10): 1227-1230.
- [8] 黄琳. 稳定性与鲁棒性的理论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.  
(Huang Lin. Fundamental theory for stability and robustness [M]. Beijing: Science Press, 2003.)
- [9] Georgiou T, Smith M. Robustness analysis of nonlinear feedback systems: An input-output approach [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(9): 1200-1221.
- [10] Xie C, French M. Gap metric robustness of a backstepping control design [C]. Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control. Hawaii, 2003, 5: 5180-5184.
- [11] Vinnicombe G. Uncertainty and feedback:  $H$  loop-shaping and  $\gamma$ -gap metric [M]. London: Imperial College Press, 2000.

(上接第 1183 页)