第 22 卷 第 10 期 控 制 与 决 策 2007 年 10 月
Vol. 22 No. 10 Control and Decision Oct. 2007

文章编号: 1001-0920(2007)10-1189-04

# 基于不动点的强化缓冲算子序列及其应用

关叶青, 刘思峰
(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016)

**摘 要**: 在灰色系统理论缓冲算子公理体系下,构造了 4 类强化缓冲算子序列,整合了已有的实用强化缓冲算子,并对它们的缓冲作用进行比较. 实例验证了这类算子序列的有效性和实用性,解决了冲击扰动系统行为数据在建模预测过程中出现的定性分析与定量预测不符的问题.

**关键词**: 不动点; 强化缓冲算子; 平均
**中图分类号**: N94 **文献标识码**: A

# Sequence of strengthening buffer operator and its application based on fixed point

*GUAN Ye-qing, LIU Si-feng*
(College of Economic and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China. Correspondent: GUAN Ye-qing, E-mail: nuaaynx@nuaa.edu.cn)

**Abstract**: Under the axiomatic system of buffer operator in grey system theory, four classes of strengthening buffer operators are established and unificated, which have the universality and practicability. Their inherent relations are compared, an example shows the validity and practicability of the proposed operator. The problem of some contradictions between qualitative analysis and quantitative forecast in pretreatment for vibration data sequences is resolved effectively.

**Key words**: Fixed point; Strengthening buffer operator; Average

## 1 引 言

灰色系统理论认为:任何随机过程都是在一定幅值范围和一定时区内变化的灰色量,通过对部分已知信息的生成和开发, 提取有价值的信息, 挖掘系统本身固有的规律[1],实现对系统运行行为和演化规律的正确描述和有效监控. 其特色是研究小样本和贫信息的不确定问题[2],其中的新信息优先原理是灰色系统理论的信息观,即认为新信息对认知的作用大于旧信息,赋予新信息较大的权重,可提高灰色建模、灰色预测、灰色决策等的功效;其中的方法体系 ——灰色序列生成是指通过信息覆盖选择适当的方法,对原始数据进行挖掘、整理来寻求系统变化规律的技术[2,3]. 文献[4]从改造原始序列和改变生成方式两个方面,总结了适应原始数据模式的 GM(1,1)预测模型的建模技术.

文献[3]提出了冲击扰动系统和缓冲算子的概念,现已在许多领域得到了应用. 冲击扰动项对数据序列的干扰表现在两方面:既可加快数据的发展趋势或使数据序列的振幅变大,又能减缓数据的发展趋势或使数据序列的振幅变小[5]. 文献[6,7]分别构造了一些弱化缓冲算子和强化缓冲算子,并研究了它们的关系及特性. 本文在上述工作的基础上,针对强化缓冲算子进行讨论,通过生成模式的分析构造强化缓冲算子,并研究这些强化缓冲算子的特性和缓冲作用效果.

## 2 基本概念

**定义 1**[8] 设系统行为数据序列为 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$,如果:

1) $\forall k = 2,3,\cdots,n$,有 $x(k) - x(k-1) > 0$,则称 $X$ 为单调增长序列.

**收稿日期**: 2006-07-06; **修回日期**: 2006-09-13.
**基金项目**: 国家自然科学基金项目(70473037); 教育部博士学科点基金项目(20020287001); 南京航空航天大学特聘教授和创新群体科研基金项目(1009-260812).
**作者简介**: 关叶青(1968 —),女(锡伯族),沈阳人,讲师,博士生,从事灰色系统理论的研究; 刘思峰(1955 —),男,河南平舆人,教授,博士生导师,从事灰色系统理论、数量经济学的研究.

2) $\forall k = 2,3,\cdots,n$,有 $x(k) - x(k-1) < 0$,则称 $X$ 为单调衰减序列.

3) $\forall k,k' \in \{2,3,\cdots,n\}$,有 $x(k) - x(k-1) > 0$,或 $x(k') - x(k'-1) < 0$,则称 $X$ 为振荡序列. 令

$$x(l) = \max\{x(k), k = 1,2,\cdots,n\},$$
$$x(h) = \min\{x(k), k = 1,2,\cdots,n\},$$

称 $x(l) - x(h)$ 为序列 $X$ 的振幅.

**定义 2**[2] 设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为系统行为数据序列,令

$$r(k) = \frac{x(n) - x(k)}{(n-k)x(k)}, k = 1,2,\cdots,n-1,$$

称 $r(k)$ 为序列 $X$ 从 $x(k)$ 到 $x(n)$ 的平均变化率. 对于单调增长序列,$r(k)$ 为序列 $X$ 从 $x(k)$ 到 $x(n)$ 的平均增长率;对于单调衰减序列,$r(k)$ 为序列 $X$ 从 $x(k)$ 到 $x(n)$ 的平均衰减率.

**定义 3** 设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为系统行为数据序列,$X$ 经过 $D$ 作用后所得序列记为 $XD = (x(1)d, x(2)d, \cdots, x(n)d)$. 称 $D$ 为序列算子,称 $XD$ 为算子作用序列.

**公理 1**[3] (不动点公理) 设 $X$ 为系统行为数据序列,$D$ 为序列算子,则 $D$ 满足 $x(n)d = x(n)$.

不动点公理限定在序列算子作用下,新信息数据保持不变.

**公理 2**(信息充分利用公理) 系统行为数据序列 $X$ 中的每一数据 $x(k)(k = 1,2,\cdots,n)$ 都应充分参与算子作用的全过程.

**公理 3**(解析化和规范化公理) 任意 $x(k)d(k = 1,2,\cdots,n)$ 均可由统一的初等解析式表达.

解析化和规范化公理要求系统行为数据序列得到算子作用的程序清晰、规范和统一,易于在计算机上实现.

满足上述 3 个公理的序列算子 $D$ 称为缓冲算子,$XD$ 称为缓冲序列.

**定义 4**[2] 设 $X$ 为系统行数据序列,$D$ 为缓冲算子,若满足下列两个条件,则称缓冲算子 $D$ 为强化缓冲算子:

1) 当 $X$ 为单调增长序列(单调衰减序列)时,缓冲序列 $XD$ 比系统行为数据序列 $X$ 的增长速度(衰减速度)加快;

2) 当 $X$ 为振荡序列时,缓冲序列 $XD$ 比系统行为数据序列 $X$ 的振幅增大.

**定理 1**[9] 设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为系统行为数据序列,缓冲序列记为 $XD = (x(1)d, x(2)d, \cdots, x(n)d)$. 则有:

1) 当 $X$ 为单调增长序列时,$D$ 为强化缓冲算子 $\Leftrightarrow x(k) \geq x(k)d, k = 1,2,\cdots,n$;

2) 当 $X$ 为单调衰减序列时,$D$ 为强化缓冲算子 $\Leftrightarrow x(k) \leq x(k)d, k = 1,2,\cdots,n$;

3) 当 $X$ 为振荡序列时,$D$ 为强化缓冲算子 $\Leftrightarrow x(l) \leq x(l)d, x(h) \geq x(h)d$.

由定理 1 可知,单调增长序列在强化缓冲算子作用下数据萎缩;单调衰减序列在强化缓冲算子作用下数据膨胀.

## 3 强化缓冲算子的构造

**定理 2** 设 $X = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$ 为系统行为数据序列,令

$$XD_{tA} = (x(1)d_{tA}, x(2)d_{tA}, \cdots, x(n)d_{tA}).$$

其中

$$x(k)d_{tA} = \frac{\sum_{i=k}^{n} i^t (x(k))^2}{\sum_{i=k}^{n} i^t x(i)}, \quad \sum_{i=k}^{n} i^t x(i) \neq 0,$$
$$k = 1,2,\cdots,n, t = 0,1,\cdots. \tag{1}$$

则不论 $X$ 为单调增长、单调衰减或振荡序列,$D_{tA}(t = 0,1,\cdots)$ 均为强化缓冲算子.

**证明** 容易验证

$$x(n)d_{tA} = \frac{n^t (x(n))^2}{n^t x(n)} = x(n),$$

$D_{tA}(t = 0,1,\cdots)$ 满足缓冲算子的 3 个公理.

1) 当 $X$ 为单调增长序列时,有

$$x(k)d_{tA} = \frac{\sum_{i=k}^{n} i^t (x(k))^2}{k^t x(k) + (k+1)^t x(k+1) + \cdots + n^t x(n)} \leq$$
$$\frac{\sum_{i=k}^{n} i^t (x(k))^2}{k^t x(k) + (k+1)^t x(k) + \cdots + n^t x(k)} = x(k),$$
$$k = 1,2,\cdots,n.$$

所以当 $X$ 为单调增长序列时,$D_{tA}(t = 0,1,\cdots)$ 为强化缓冲算子.

2) 同理可证,当 $X$ 为单调衰减序列时,$D_{tA}(t = 0,1,\cdots)$ 为强化缓冲算子.

3) 当 $X$ 为振荡序列时,有

$$x(l)d_{tA} = \frac{\sum_{i=l}^{n} i^t (x(l))^2}{l^t x(l) + (l+1)^t x(l+1) + \cdots + n^t x(n)} \geq$$
$$\frac{\sum_{i=l}^{n} i^t (x(l))^2}{l^t x(l) + (l+1)^t x(l) + \cdots + n^t x(l)} = x(l),$$

$$x(h)d_{tA} = \frac{\sum_{i=h}^{n} i^t (x(h))^2}{h^t x(k) + (h+1)^t x(h+1) + \cdots + n^t x(n)} \leq$$

$$\frac{\sum_{i=h}^{n} i^t (x(h))^2}{h^t x(h) + (h+1)^t x(h) + \cdots + n^t x(h)} = x(h).$$

因此当 $X$ 为振荡序列时,$D_{t\text{-}A}$ $(t=0,1,\cdots)$ 为强化缓冲算子. □

称 $D_{t\text{-}A}$ $(t=0,1,\cdots)$ 为 $t$ 次算术平均强化缓冲算子($t$-ASBO),当 $t=0$ 时,0 次算术平均强化缓冲算子(0-ASBO)为文献[6]定义的平均强化缓冲算子(ASBO),即

$$x(k)d_{0\text{-}A} = \frac{(n-k+1)(x(k))^2}{x(k)+x(k+1)+\cdots+x(n)}.$$

**定理3**　设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列,且 $x(i)>0$, $i=1,2,\cdots,n$. 令 $XD_{t\text{-}G}=(x(1)d_{t\text{-}G}, x(2)d_{t\text{-}G},\cdots,x(n)d_{t\text{-}G})$,其中

$$x(k)d_{t\text{-}G} = \frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^{n}(x(i))^{i^t}\right]^{1/\sum_{i=k}^{n} i^t}},$$
$$k=1,2,\cdots,n, t=0,1,\cdots. \tag{2}$$

则当 $X$ 为单调增长、单调衰减或振荡序列时,$D_{t\text{-}G}$ $(t=0,1,\cdots)$ 为强化缓冲算子.

**证明**　容易验证

$$x(n)d_{t\text{-}G} = \frac{(x(n))^2}{[x(n)^{n^t}]^{1/n^t}} = x(n).$$

$D_{t\text{-}G}$ $(t=0,1,\cdots)$ 满足缓冲算子的 3 个公理.

当 $X$ 为单调增长、单调衰减或振荡序列时,证明方法同定理 2. □

称 $D_{t\text{-}G}$ $(t=0,1,\cdots)$ 为 $t$ 次几何平均强化缓冲算子($t$-GASBO),当 $t=0$ 时,0 次几何平均强化缓冲算子(0-GASBO)为文献[6]定义的几何平均强化缓冲算子(GASBO),即

$$x(k)d_{0\text{-}G} = (x(k))^2 / \left[\prod_{i=k}^{n}(x(i))\right]^{1/(n-k+1)},$$
$$k=1,2,\cdots,n.$$

**定理4**　设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列,且 $x(i)>0$, $i=1,2,\cdots,n$. 令 $XD_{t\text{-}H}=(x(1)d_{t\text{-}H}, x(2)d_{t\text{-}H},\cdots,x(n)d_{t\text{-}H})$,其中

$$x(k)d_{t\text{-}H} = \frac{(x(k))^2}{\sum_{i=k}^{n} i^t \Big/ \sum_{i=k}^{n}\frac{i^t}{x(k)}},$$
$$k=1,2,\cdots,n, t=0,1,\cdots. \tag{3}$$

则当 $X$ 为单调增长、单调衰减或振荡序列时,$D_{t\text{-}H}$ $(t=0,1,\cdots)$ 为强化缓冲算子.

**证明**　容易验证

$$x(n)d_{t\text{-}H} = \frac{(x(n))^2}{n^t \Big/ \frac{n^t}{x(n)}} = x(n).$$

$D_{t\text{-}H}$ $(t=0,1,\cdots)$ 满足缓冲算子的 3 个公理.

当 $X$ 为单调增长、单调衰减或振荡序列时,证明方法同定理 2. □

称 $D_{t\text{-}H}$ $(t=0,1,\cdots)$ 为 $t$ 次调和平均强化缓冲算子($t$-HASBO),当 $t=0$ 时,0 次调和平均强化缓冲算子(0-HASBO)为

$$x(k)d_{0\text{-}H} = \frac{(x(k))^2}{\dfrac{n-k+1}{1/x(k)+1/x(k+1)+\cdots+1/x(n)}},$$
$$k=1,2,\cdots,n.$$

**定理5**　设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列,且 $x(i)>0$, $i=1,2,\cdots,n$. 令 $XD_{t\text{-}S}=(x(1)d_{t\text{-}S}, x(2)d_{t\text{-}S},\cdots,x(n)d_{t\text{-}S})$,其中

$$x(k)d_{t\text{-}S} = \frac{(x(k))^2}{\sqrt{\sum_{i=k}^{n} i^t (x(i))^2 \Big/ \sum_{i=k}^{n} i^t}},$$
$$k=1,2,\cdots,n, t=0,1,\cdots. \tag{4}$$

则当 $X$ 为单调增长、单调衰减或振荡序列时,$D_{t\text{-}S}$ $(t=0,1,\cdots)$ 为强化缓冲算子.

**证明**　容易验证

$$x(n)d_{t\text{-}S} = \frac{(x(n))^2}{\sqrt{n^t (x(n))^2 / n^t}} = x(n).$$

$D_{t\text{-}S}$ $(t=0,1,\cdots)$ 满足缓冲算子的 3 个公理.

当 $X$ 为单调增长、单调衰减或振荡序列时,证明方法同定理 2. □

称 $D_{t\text{-}S}$ $(t=0,1,\cdots)$ 为 $t$ 次平方平均强化缓冲算子($t$-SASBO),当 $t=0$ 时,0 次平方平均强化缓冲算子(0-SASBO)为

$$x(k)d_{0\text{-}S} = \frac{(x(k))^2}{\sqrt{\dfrac{(x(k))^2+(x(k+1))^2+\cdots+(x(n))^2}{n-k+1}}},$$
$$k=1,2,\cdots,n.$$

**定理6**　设 $X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$ 为系统行为数据序列,且 $x(i)>0$, $i=1,2,\cdots,n$. 对于任意给定的 $t=0,1,\cdots$,有

$$x(k)d_{0\text{-}S} \le x(k)d_{0\text{-}A} \le x(k)d_{0\text{-}G} \le x(k)d_{0\text{-}H},$$
$$k=1,2,\cdots,n. \tag{5}$$

当且仅当 $x(1)=x(2)=\cdots=x(n)$ 时,所有等式成立,即序列为常数序列.

**证明**　利用算术平均和几何平均、调和平均和平方平均的不等式关系[10],可得结论成立. □

定理 2～定理 6 分别构造了满足缓冲算子 3 个公理的 $t$ 次强化缓冲算子序列,整合了已有的实用强化缓冲算子,并比较了 $t=0$ 时平均意义下强化缓冲算子的缓冲作用. 从以上内容可知,单调增长序列在强化缓冲算子作用下使系统行为数据萎缩,单调衰减序列在强化缓冲算子作用下使系统行为数据膨

胀.

根据缓冲算子的不动点公理 $x(n)d = x(n)$ 和灰色系统新息优先的建模思想,当前一部分增长(或衰减)速度过缓,而后一部分增长(或衰减)速度过快时,利用强化缓冲算子可使单调增长序列的缓冲作用序列变得比较平缓,因而使预测模型的模拟精度提高,有效地消除冲击扰动系统的行为数据序列在建模预测过程中的干扰.

## 4 应用实例

本文以文献[6]中的企业新产品1月～7月的月销售额(见表1)作为系统行为数据序列,用于说明 $t$ 次强化缓冲算子序列在冲击扰动系统建模预测过程中的作用.

表1 企业新产品月销售额 万元

| 月份 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 销售额 | 60.8 | 62.6 | 65.7 | 70.4 | 77.4 | 86.7 | 96.8 |

计算该企业各月销售额的增长率分别为2.96%,4.95%,7.12%,9.94%,12.01%,11.65%,前半部分增长速度相比后半部分过缓.用强化缓冲算子进行作用,以消除原始数据序列所受冲击扰动因素的干扰.分别在无缓冲作用、强化缓冲算子 $D_{0\text{-}A}$ 作用、强化缓冲算子 $D_{0\text{-}S}$ 作用和强化缓冲算子 $D_{1\text{-}A}$ 作用4种情况下,用前6个月的销售额建立灰色GM(1,1)模型,并模拟7月份的销售额(见表2).

表2 4种情况GM(1,1)模型

| 强化算子 | GM(1,1)模型 | $\hat{x}(7)$ |
|---|---|---|
| 无 | $\hat{x}(k+1) = 693.919e^{0.084k} - 693.119$ | 92.62 |
| $D_{0\text{-}A}$ | $\hat{x}(k+1) = 385.738e^{0.125k} - 333.378$ | 95.51 |
| $D_{0\text{-}S}$ | $\hat{x}(k+1) = 376.837e^{0.127k} - 324.897$ | 95.71 |
| $D_{1\text{-}A}$ | $\hat{x}(k+1) = 342.004e^{0.135k} - 292.650$ | 96.71 |

模拟结果表明,在 $t = 1$ 次强化缓冲算子 $D_{1\text{-}A}$ 的缓冲作用下,模拟值的精度最高,$\hat{x}(7) = 96.71$(万元),模拟值的相对误差为0.093%,符合实际情况.用模拟值相对误差最小的模型预测8月份的销售额,$\hat{x}(8) = 110.66$(万元).

## 5 结 语

本文基于算术平均、几何平均、调和平均的定义和性质研究强化缓冲算子,构造了 $t$ 次算术平均强化缓冲算子、$t$ 次几何平均强化缓冲算子、$t$ 次调和平均强化缓冲算子和 $t$ 次平方平均强化缓冲算子,扩大了强化缓冲算子.对已有的一些强化缓冲算子进行整合,并研究了它们的内在关系.最后通过实例说明所构造的强化算子提高了GM(1,1)模型在冲击扰动系统预测中的模拟精度,消除了冲击扰动因素对原始数据的干扰.本文结果为解决定量预测结果与定性分析结论不符的问题提供了可供借鉴的方法.

## 参考文献(References)


[1] 邓聚龙.灰理论基础[M].武汉:华中科技大学出版社,2002.
(Deng Ju-long. Grey theoretical foundation [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2002.)

[2] 刘思峰,党耀国,方志耕,等.灰色系统理论及其应用[M].第3版.北京:科学出版社,2004.
(Liu Si-feng, Dang Yao-guo, Fang Zhi-geng, et al. Grey system theory and its application [M]. 3rd ed. Beijing: Science Press, 2004.)

[3] Liu S F. The three axioms of buffer operator and their application[J]. J of Grey System, 1991, 3(1): 39-48.

[4] 肖新平,宋中民,李峰.灰技术基础及其应用[M].北京:科学出版社,2005.
(Xiao Xin-ping, Song Zhong-min, Li Feng. Grey techniques foundation and its application [M]. Beijing: Science Press, 2005.)

[5] 张志祥.随机扰动间断动力系统的极限性质及其应用[J].数学的实践与认识,2002,32(4):651-657.
(Zhang Zhi-xiang. Limiting property of randomly perturbed discontinuous dynamic system with an application [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2002, 32(4): 651-657.)

[6] 党耀国,刘思峰,刘斌,等.关于弱化缓冲算子的研究[J].中国管理科学,2004,12(2):108-111.
(Dang Yao-guo, Liu Si-feng, Liu Bin, et al. Study on the weakening buffer operators and researches [J]. Chinese J of Management Science, 2004, 12(2): 108-111.)

[7] 党耀国,刘斌,关叶青.关于强化算子的研究[J].控制与决策,2005,20(12):1332-1336.
(Dang Yao-guo, Liu Bin, Guan Ye-qing. Study on the strengthening buffer operators [J]. Control and Decision, 2005, 20(12): 1332-1336.)

[8] 刘思峰.缓冲算子及其应用[J].灰色系统理论与实践,1992,2(1):45-50.
(Liu Si-feng. Buffer operator and its application [J]. Theories and Practices of Grey System, 1992, 2(1): 45-50.)

[9] Liu S F, Lin Y. An introduction to grey systems: Foundations, methodology and applications [M]. Slippry Rock: IIGSS Academic Publisher, 1998.)

[10] 匡继昌.常用不等式[M].第3版.济南:山东科学技术出版社,2004.
(Kuang Ji-chang. Applied inequalities [M]. 3rd ed. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 2004.)