

文章编号: 1001-0920(2007)11-1284-05

## TORA 的动力学建模与 Backstepping 控制

高丙团, 贾智勇, 陈宏钧, 张晓华  
(哈尔滨工业大学 电气工程系, 哈尔滨 150001)

**摘要:** 针对旋转小球在垂直平面内运动的欠驱动的具有旋转激励的平移振荡器 (TORA), 基于拉格朗日方程, 建立其动力学模型. 结合部分反馈线性化, 采用一个闭环坐标变换将系统动力学转换成严格反馈的级联非线性系统, 该级联系统由非线性子系统和两个积分器组成. 在设计了非线性子系统有界状态反馈算法的基础上, 应用积分 Backstepping 给出了实现系统全局稳定的状态反馈控制器. 仿真结果验证了该控制器的有效性.

**关键词:** 反推; 具有旋转激励的平移振荡器; 欠驱动; 级联系统; 部分反馈线性化

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

### Dynamical modeling and backstepping control of TORA

GAO Bing-tuan, JIA Zhi-yong, CHEN Hong-jun, ZHANG Xiao-hua

(Department of Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: GAO Bing-tuan, E-mail: gaopu1089@hit.edu.cn)

**Abstract:** Based on Lagrange equations, the dynamics is derived for an underactuated translational oscillators with rotating actuator (TORA) that actuator motion occurs in a vertical plane. After partial feedback linearization, a closed-loop change of coordinates is employed to transform the dynamics into a strict feedback cascade nonlinear system which consists of a nonlinear subsystem and two integrators. A state feedback for the nonlinear subsystem is introduced, and then a state feedback for the composite cascade system is obtained by using integrator Backstepping. Finally, simulation results demonstrate the feasibility of the presented controller.

**Key words:** Backstepping; TORA; Underactuated; Cascade systems; Partial feedback linearization

### 1 引言

具有旋转激励的平移振荡器 (TORA) 或称为 RTAC (Rotational/ Translational ACTuator) 由一个未驱动的平移振荡器和驱动的转动小球组成, 且振荡器和小球都在水平面内运动. 它是一个 4 阶的非线性基准系统, 通常用来检验低阶非线性动力学系统的非线性控制设计<sup>[1]</sup>.

Wan 等<sup>[2]</sup> 通过部分反馈线性化和 Backstepping 设计的方法得到 TORA 系统的全局渐近稳定控制, TORA 系统的全局输出跟踪问题也得到了解决<sup>[3]</sup>. 文献 [1, 4-6] 针对 TORA 系统的非线性控制进行了专门研究. Robert 等<sup>[4]</sup> 还搭建了 TORA 系统的实验平台, 对所设计的控制方案进行了验证.

本文针对旋转小球在垂直平面内运动的 TORA 系统进行基于 Backstepping 的控制方案设计, 并对所设计的控制系统进行了数值仿真实验. 本

文的工作与已有工作的主要区别在于: 1) 本文考虑的 TORA, 其小球是在垂直平面内运动, 小球的运动控制受本身重力的影响; 2) 本文基于 Backstepping 设计的状态反馈控制器, 在一定条件下可转为文献 [2] 中基于 Backstepping 设计的控制器.

### 2 动力学模型

如图 1 所示, TORA 系统由驱动小球和一个与弹簧连接的移动小车组成. 其中质量为  $M$  的小车与倔强系数为  $k$  的弹簧相连, 并在水平面内作一维运动, 小车在运动过程中受到扰动  $F$  的影响, 小车的运动位置记为  $x$ ; 质量为  $m$  的小球在输入转矩的作用下在一个垂直的平面内转动, 转动半径为  $r$ , 小球关于其质心的转动惯量为  $I$ , 小球逆时针转离重力方向的角度为  $\theta$ , 重力加速度为  $g$ .

首先给出整个系统的动能和势能, 以便进行拉格朗日方法的建模. 系统的总动能由小车的动能和

收稿日期: 2006-08-06; 修回日期: 2006-11-23.

作者简介: 高丙团 (1981—), 男, 江苏淮安人, 博士, 从事非线性控制、机器人控制的研究; 张晓华 (1961—), 男, 哈尔滨人, 教授, 博士生导师, 从事智能机器人与运动控制、机器视觉与自主控制的研究.

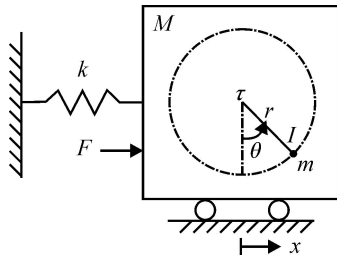


图 1 TORA 系统

小球的动能两个部分组成,即

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + mr\dot{x} \cos \theta + \frac{1}{2} (mr^2 + I) \dot{\theta}^2. \tag{1}$$

系统的总势能为

$$P = - mgr \cos \theta + \frac{1}{2} kx^2, \tag{2}$$

则系统的拉格朗日算子函数为

$$L = K - P = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + mr\dot{x} \cos \theta + \frac{1}{2} (mr^2 + I) \dot{\theta}^2 + mgr \cos \theta - \frac{1}{2} kx^2.$$

根据拉格朗日方程,相应的系统动力学方程为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

经计算可得系统的标准动力学描述为

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = U. \tag{3}$$

其中

$$q = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}, \quad G(q) = \begin{bmatrix} kx \\ mgr \sin \theta \end{bmatrix}, \quad M(q) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M + m & mr \cos \theta \\ mr \cos \theta & mr^2 + I \end{bmatrix}, \quad C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -mr \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}.$$

可证明  $M(q)$  是正定对称矩阵,且  $M - 2C$  是斜对称矩阵,这些特征将在后续的控制设计中起到重要作用.

由动力学描述(3)可知,TORA 系统中只有一个施加在小车上的驱动力,但却有两个状态变量需要控制,即小车的位置和小球的摆角,因此 TORA 系统是一个欠驱动机械系统.

注 1 文献[1-6]中的 TORA 系统是在水平面内运动的,而本文的 TORA 系统是在竖直方向的平面内运动的,因此小球的运动受其重力的影响,故在转角动力学方程中多出了  $mgr \sin \theta$  这一项.

### 3 TORA 系统的 Backstepping 控制

#### 3.1 严格反馈级联规范型

忽略水平向运动的扰动,将动力学描述(3)重写为微分方程的形式,即

$$(M + m) \ddot{x} + mr \cos \theta \ddot{\theta} - mr \sin \theta \dot{\theta}^2 + kx = 0, \quad mr \cos \theta \ddot{x} + (mr^2 + I) \ddot{\theta} + mgr \sin \theta = 0. \tag{4}$$

通过部分反馈线性化

$$\ddot{x} = \alpha(x, \dot{x}) u + \beta(q, \dot{q}), \tag{5}$$

其中

$$\alpha(x, \dot{x}) = (mr^2 + I) - \frac{(mr \cos \theta)^2}{M + m} > 0, \quad \forall x \in [-x_m, x_m];$$

$$\beta(q, \dot{q}) = mgr \sin \theta - \frac{mr \cos \theta}{M + m} (kx - mr \sin \theta \dot{\theta}^2).$$

将动力学转换成

$$\ddot{x} = - \frac{mr \cos \theta}{M + m} u - \frac{kx - mr \sin \theta \dot{\theta}^2}{M + m}, \quad \ddot{\theta} = u. \tag{6}$$

欠驱动系统(6)的主要特点是,控制输入  $u$  同时出现在系统的线性和非线性子系统中,这使系统的控制设计变得复杂.因此,需在保持线性子系统不变的情况下,将两个子系统关于控制输入解耦,从而可使用 Backstepping 控制设计的思想.

下面给出将式(6)两个子系统关于控制输入解耦的一个结论.

定理 1 考虑 TORA 系统(4),全局坐标变换

$$z_1 = x + \alpha(x, \dot{x}), \quad z_2 = m_{11}(x) \dot{x} + m_{12}(x) \dot{\theta} = \partial L / \partial \dot{x}, \quad \dot{z}_1 = \dot{x} + \alpha(x, \dot{x}), \quad \dot{z}_2 = \dot{z}_2.$$

将 TORA 系统的动力学转换成一个具有严格反馈形式的级联非线性系统,即

$$\dot{z}_1 = m_{11}^{-1}(z_1) z_2, \quad \dot{z}_2 = g(z_1 - \alpha(z_1), z_2), \quad \dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = u. \tag{8}$$

其中

$$\alpha(x, \dot{x}) = \int_0^x m_{11}^{-1}(s) m_{12}(s) ds,$$

$$g(x, z_2) = - \partial P(q) / \partial \dot{x}.$$

证明 根据  $z_1$  和  $z_2$  的定义,可得  $\dot{z}_1 = m_{11}^{-1}(z_1) z_2$ . 注意到  $\partial K / \partial x = 0$ , 可得

$$\dot{z}_2 = \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} = g(z_1, z_2).$$

通过计算,级联系统(8)可重写为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{1}{M+m} z_2, \\ \dot{z}_2 &= -kz_1 + k \frac{mr \sin^{-1}}{M+m}, \\ \dot{z}_1 &= \dot{z}_2, \\ \dot{z}_2 &= u. \end{aligned} \tag{9}$$

注2 系统(9)的非线性  $z$ -子系统具有拉格朗日算子

$$L_z(z_1, \dot{z}_1) = \frac{1}{2}(M+m)\dot{z}_1^2 - \frac{1}{2}kz_1^2,$$

它满足一维强制欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_z}{\partial \dot{z}_1} - \frac{\partial L_z}{\partial z_1} = k \frac{mr \sin^{-1}}{M+m}.$$

其中非线性输入力  $F_z(z_1) = k(z_1)$  依赖于  $z_1$ , 即形态变量. 如果  $k > 0$ , 归约系统就成了一个振荡器, 其频率为  $\omega_0 = \sqrt{k/(M+m)}$  rad/s. 根据 Backstepping 设计思想, 整个系统的稳定控制问题便归约成一个具有拉格朗日算子  $L_z(z_1, \dot{z}_1)$  的无阻尼质量弹簧系统的稳定控制问题.

### 3.2 基于 Backstepping 的稳定控制算法

为了给出稳定控制算法, 首先引入如下定义:

定义 1<sup>[7]</sup> (向量 S 形函数) 如果向量  $(x) : R^n \rightarrow R^n$  满足如下性质:

- 1)  $\exists L > 0: \forall x \in R^n, \|(x)\| \leq L$ ;
- 2)  $(0) = 0, x(x) > 0, \forall x > 0$ ;
- 3)  $y^T(x - (x+y)) < 0, \forall y > 0$ .

则称其为向量 S 形函数. 向量 S 形函数的例子为  $(x) = (s_1(x_1), \dots, s_n(x_n))^T$ , 其中  $s_i$  是与  $\arctan(z)$  或  $\tanh(z)$  相似的一维 S 形函数.

下面给出实现级联系统(9)稳定控制的结论.

定理 2 考虑由 TORA 动力学变换得到的级联非线性系统(9), 有如下结论成立:

- 1) 存在一个有界的状态反馈

$$z_1 = -(c_1 z_1 + c_2 z_2), \quad c_1, c_2 > 0, \tag{10}$$

将系统(9)的  $z$ -子系统全局渐近稳定于原点  $(z_1, z_2) = 0$ , 其中  $s$  表示满足  $|s| < \pi/2$  的一个 S 形函数.

- 2) 存在一个显式状态反馈  $u = K(z_1, z_2, z_1, z_2)$ , 将复合系统(9)全局渐近稳定于原点.

证明 首先证明结论 1), 结论 2) 可在 1) 的基础上根据标准积分 Backstepping 的步骤<sup>[8]</sup> 得证.

如果  $s(\cdot)$  是一个对于所有满足  $|s(\cdot)| < \pi/2$  的 S 形函数, 则  $\sin(s(\cdot))$  和  $(\cdot)$  也是 S 形函数. 取  $z$ -子系统的李亚普诺夫函数为

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2(M+m)} z_2^2 + \frac{1}{2} k z_1^2 +$$

$$\int_0^{z_1} k(s(c_1 s)) ds = 0.$$

沿闭环归约系统的解计算  $\dot{V}$  可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{(M+m)} z_2 \dot{z}_2 + k z_1 \dot{z}_1 + k \dot{z}_1 (c_1 z_1) = \\ &= \frac{k}{(M+m)} z_2 \left[ (c_1 z_1) + \frac{mr \sin^{-1}}{(M+m)} \right] = \\ &= \frac{k}{(M+m)} z_2 \left[ (c_1 z_1) + \right. \\ &\quad \left. (- (c_1 z_1 + c_2 z_2)) \right] = \\ &= \frac{k}{(M+m)} z_2 \left[ \tilde{(c_1 z_1)} - \tilde{(c_1 z_1 + c_2 z_2)} \right] = 0, \end{aligned}$$

其中  $\tilde{(x)} = s(x)$  是一个 S 形函数. 从以上方程可知, 对于所有的  $z_2 = 0$  有  $\dot{V} < 0$ . 基于拉萨尔不变性原理, 闭环系统的所有解都收敛于系统的最大不变集  $\Sigma = \{(0, 0)\}$ , 则原点  $(z_1, z_2) = (0, 0)$  是全局渐近稳定的.

注 3 文献[2]中得到的控制器等价于使用状态反馈  $z_1 = -(c_2 z_2)$ . 它是归约系统的一个全局渐近稳定反馈, 该反馈是定理 2 中  $c_1 = 0$  时 1) 的一个特殊状态反馈情况.

### 3.3 控制量的求取

根据定理 2, 基于积分 Backstepping 设计, 通过以下 3 个步骤来求取使系统(9)稳定的控制量:

Step1 考虑式(9)的  $z$ -子系统

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{1}{M+m} z_2, \\ \dot{z}_2 &= -kz_1 + k \frac{mr \sin^{-1}}{M+m}, \end{aligned} \tag{11}$$

其中  $z_1$  为控制输入. 根据式(10), 选取一个有界的状态反馈

$$\begin{aligned} z_1 &= k_1(z_1, z_2) = -\alpha_0 \arctan(c_1 z_1 + c_2 z_2), \\ 0 &< \alpha_0 < 2. \end{aligned} \tag{12}$$

同时选取李亚普诺夫函数

$$\begin{aligned} v_0(z_1, z_2) &= \frac{1}{2} k z_1^2 + \frac{1}{2} a z_2^2 + \\ &\quad \int_0^{z_1} b \sin(\alpha_0 \arctan(c_1 s)) ds = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

其中  $a = 1/(M+m)$ ,  $b = kmr/(M+m)$ . 计算可得

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 &= \\ &= k z_1 \dot{z}_1 + a z_2 \dot{z}_2 + b z_1 \sin(\alpha_0 \arctan(c_1 z_1)) = \\ &= a z_2 [-k z_1 - b \sin(\alpha_0 \arctan(c_1 z_1 + c_2 z_2))] + \\ &= a k z_1 z_2 + a b z_2 \sin(\alpha_0 \arctan(c_1 z_1)) = \\ &= a b z_2 [-\sin[\alpha_0 \arctan(c_1 z_1 + c_2 z_2)] + \\ &\quad \sin(\alpha_0 \arctan(c_1 z_1))] = 0. \end{aligned}$$

则反馈算法(12)可将系统(11)全局渐近稳定于原点  $(z_1, z_2) = 0$ .

Step2 根据积分 Backstepping 设计步骤,考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{1}{M+m} z_2, \\ \dot{z}_1 &= -kz_1 + k \frac{mrsin-1}{M+m}, \\ \dot{z}_1 &= z_2, \end{aligned} \tag{14}$$

其中  $z_2$  为控制输入. 选取李亚普诺夫函数

$$\begin{aligned} v_1(z_1, z_2, z_1) &= \\ v_0(z_1, z_2) &+ \frac{p_1}{2} [z_1 - k_1(z_1, z_2)]^2 \quad 0, p_1 > 0, \end{aligned} \tag{15}$$

设计的控制输入  $z_2$  应使  $\dot{v}_1 = 0$  成立. 选择控制输入为

$$\begin{aligned} z_2 &= k_2(z_1, z_2, z_1) = \\ &-c_3 y_3(z_1, z_2, z_1) - ac_0 c_1 z_2 y_1(z_1, z_2) + \\ &c_0 c_2 (kz_1 - bsin-1) y_1(z_1, z_2) - \\ &abp_1^{-1} z_2 y_2(z_1, z_2, z_1) y_3(z_1, z_2, z_1). \end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned} y_1(z_1, z_2) &= [1 + (c_1 z_1 + c_2 z_2)^2]^{-1}, \\ y_2(z_1, z_2, z_1) &= \\ \sin-1 + \sin/c_0 \arctan(c_1 z_1 + c_2 z_2), \\ y_3(z_1, z_2, z_1) &= 1 + c_0 \arctan(c_1 z_1 + c_2 z_2). \end{aligned}$$

此刻

$$\dot{v}_1 = \dot{v}_0 - p_1 c_3 [z_1 - k_1(z_1, z_2)]^2 \quad 0, c_3 > 0.$$

则反馈算法 (16) 可将系统 (14) 全局渐近稳定于原点  $[z_1 \ z_2 \ z_1]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ .

Step3 根据积分 Backstepping 设计步骤,考虑系统 (9). 选取李亚普诺夫函数

$$\begin{aligned} v_2(z_1, z_2, z_1, z_2) &= \\ v_1(z_1, z_2, z_1) &+ \frac{p_2}{2} [z_2 - k_2(z_1, z_2, z_1)]^2 \quad 0, \\ p_2 &> 0, \end{aligned} \tag{17}$$

设计的控制输入  $u$  应使  $\dot{v}_2 = 0$  成立. 选择控制输入为

$$\begin{aligned} u &= k_2(z_1, z_2, z_1, z_2) = \\ &-c_4 [z_2 + c_3 y_1 + c_0 c_1 z_2 y_1 - \\ &c_0 c_2 (kz_1 - bsin-1) y_1 + \\ &abp_1^{-1} z_2 y_1^{-1} y_2] + az_1 \{ -c_0 c_1 c_3 y_1 + \\ &2ac_0 c_1^2 z_2 (c_1 z_1 + c_2 z_2) y_1^2 + \\ &[c_0 c_2 ky_1^{-1} - 2c_0 c_1 c_2 (c_1 z_1 + \\ &c_2 z_2) (kz_1 - bsin-1)] y_1^2 - \\ &abp_1^{-1} z_2 (c_0 c_1 y_1 y_3 y_4 - c_0 c_1 y_1 y_2) (y_3^{-1})^2 \} - \\ &(kz_1 - bsin-1) \{ -c_0 c_2 c_3 y_1 - [ac_0 c_1 y_1^{-1} - \\ &2ac_0 c_1 c_2 (c_1 z_1 + c_2 z_2) z_2] y_1^2 - \\ &2c_0 c_2^2 (kz_1 - bsin-1) (c_1 z_1 + c_2 z_2) y_1^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} abp_1^{-1} [y_3 (y_2 + c_0 c_2 z_2 y_1 y_4) - c_0 c_2 z_2 y_1 y_2] \times \\ (y_3^{-1})^2 \} + z_2 \{ -c_3 - c_0 c_2 bcos-1 y_1 - \\ abz_2 p_1^{-1} (y_3 \cos-1 - y_2) (y_3^{-1})^2 \} - p_1 p_2^{-1} y_3, \end{aligned} \tag{18}$$

其中

$$y_4(z_1, z_2) = \cos/c_0 \arctan(c_1 z_1 + c_2 z_2).$$

此刻

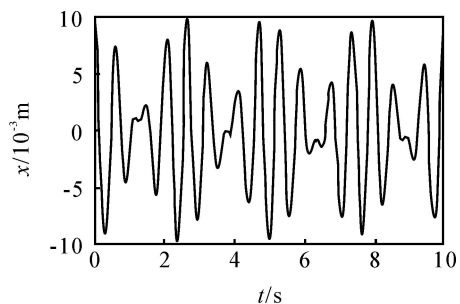
$$\dot{v}_2 = \dot{v}_1 - p_2 c_4 (z_2 - k_2(z_1, z_2, z_1))^2 \quad 0, c_4 > 0.$$

则反馈算法 (18) 可将系统 (9) 稳定在  $[z_1 \ z_2 \ z_1 \ z_2]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  处.

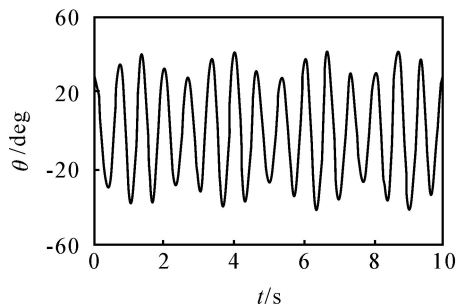
注 4 由式 (5) 和 (18) 可求出使得 TORA 系统稳定的物理控制输入.

### 4 仿真实验

仿真过程中系统参数取文献 [1] 中实验平台的参数, 即  $M = 1.3608 \text{ kg}, m = 0.096 \text{ kg}, k = 186.3 \text{ N/m}, r = 0.0592 \text{ m}, I = 0.0002175 \text{ kgm}^2$ . 其中: Backstepping 步骤中可调节参数取  $p_1 = p_2 = c_1 = c_1 = 1, c_3 = c_4 = 10$ ; S 函数的参数取  $c_0 = 2$ . 初始条件为  $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]^T = [0.01, 0, 0.5, 0]^T$ . 仿真结果如图 2 和图 3 所示.



(a) 小车位置



(b) 小球转角

图 2 未加控制的系统状态

图 2 为 TORA 系统未加控制输入转矩情况下小车的位置和小球转角的状态图. 由结果可知, 小车的位置曲线正如注 2 所述, 呈现出质量弹簧系统的特征, 系统不稳定. 图 3 为进行控制的仿真结果. 可以看出, TORA 系统在基于 Backstepping 设计的状态反馈控制器的作用下, 仅用 6 s 便基本完成系统稳定的任务, 即将系统的状态由初始的  $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]^T =$

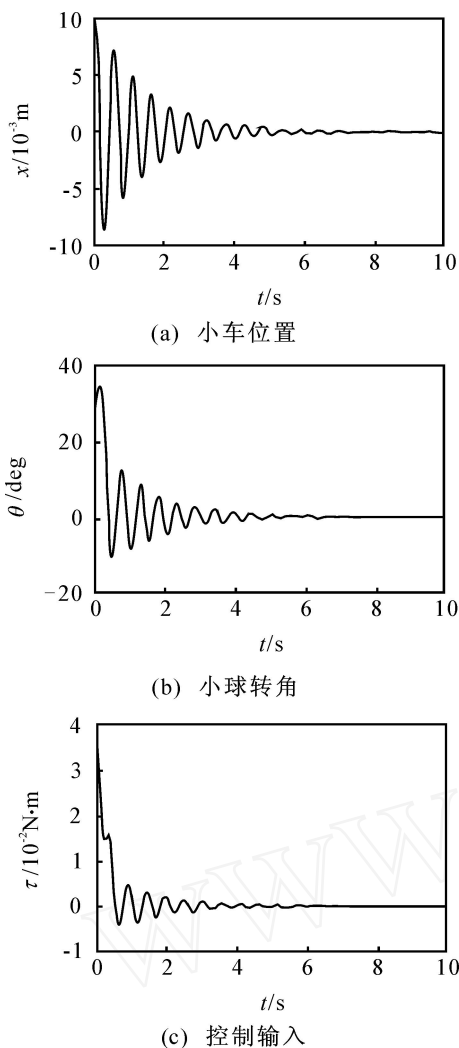


图3 加入控制的系统仿真结果

$[0.01 \ 0 \ 0.5 \ 1]^T$  稳定到原点  $[0, 0, 0, 0]^T$ 。同时仿真结果还表明, 小车的位置不大于  $0.025 \text{ m}$ , 持续输入转矩不大于  $0.1 \text{ N} \cdot \text{m}$ , 满足文献[1]中的设计要求。

## 5 结 论

本文针对旋转小球在垂直平面内运动的 TORA 系统进行了稳定控制的研究。基于拉格朗日方程建立了该系统的动力学模型, 与旋转小球在水平面内运动的 TORA 系统的动力学相比, 小球在转动过程中自身的重力将影响其运动特征。结合部分

反馈线性化和一个全局坐标变换, 将系统的动力学转换成严格反馈的级联规范型, 从而将控制设计的任务归结成对级联系统中的非线性子系统部分的设计。在给出更一般的实现非线性子系统全局渐近稳定的状态反馈算法后, 采用积分 Backstepping 设计了整个系统的全状态反馈控制器。最后对文中给出的控制方案进行了数值仿真, 实验结果证明了该方案的有效性。

## 参考文献(References)

- [1] Robert T B, Dennis S B, Vincent T C. A benchmark problem for nonlinear control design[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 1998, 8(4): 307-310.
- [2] Wan C J, Dennis S B, Vincent T C. Global stabilization of the oscillating eccentric rotor[C]. Proc of the 33rd IEEE Control Decision and Control. New York, 1994: 4024-4029.
- [3] Jiang Z P, Kanellakopoulos I. Global output feedback tracking for a benchmark nonlinear system[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(5): 1023-1027.
- [4] Robert T B, Dennis S B, Vincent T Coppola. Experimental implementation of integrator Backstepping and passive nonlinear controllers on the RTAC testbed[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 1998, 8(5): 435-457.
- [5] Ilya K, McClamroch N H. Hybrid feedback stabilization of rotational-translational actuator (RTAC) system[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 1998, 8(5): 367-370.
- [6] Curtis P M, James R C. Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 1998, 8(5): 401-433.
- [7] Reza O S. Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles [D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [8] Hassan K K. Nonlinear systems[M]. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002.

(上接第 1283 页)

- [8] Fuh Hwa, Liu F, Hsiao C J. A three-dimensional pallet loading method for single-size boxes[J]. J of the Operational Research Society, 1997, 48: 726-735.
- [9] Karabulut K, İnceoğlu M M. A hybrid genetic algorithm for packing in 3D with deepest bottom left with fill method[C]. Proc of the 3th Int Conf on Advances in Information Systems. Turkey: Tatyana

Yakhno, 2004: 441-450.

- [10] 王小平, 曹立明. 遗传算法——理论、应用与软件实现[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2002.  
(Wang Xiao-ping, Cao Li-ming. Genetic algorithm: Principles and applications and its software realization [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2002.)